

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

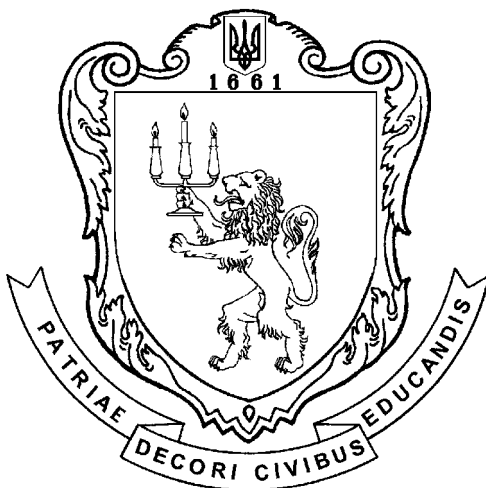
XXI Всеукраїнська
наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

APAMCS – 2015

*присвячена
80-річчю проф. Й.В.Людкевича,
40-річчю заснування факультету прикладної математики
та інформатики,
20-річчю заснування кафедри інформаційних систем*

24–25 вересня 2015 року



Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

XXI Всеукраїнська
наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

APAMCS – 2015

*присвячена
80-річчю проф. Й.В.Людкевича,
40-річчю заснування факультету прикладної математики
та інформатики,
20-річчю заснування кафедри інформаційних систем*

24–25 вересня 2015 року

Збірник наукових праць

Львів – 2015

УДК
ББК

Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць. – Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. – 2015. – 371 с.

Редакційна колегія:

Я.Г. Савула	декан факультету прикладної математики та інформатики, завідувач кафедри прикладної математики, д-р фіз.-мат. наук, професор
Г.А. Шинкаренко	завідувач кафедри інформаційних систем, д-р фіз.-мат. наук, професор
Р.С. Хапко	завідувач кафедри обчислювальної математики, д-р фіз.-мат. наук, професор
П.С. Венгерський	доцент кафедри інформаційних систем, канд. фіз.-мат. наук, доцент
В.М. Горlach	доцент кафедри інформаційних систем, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Оргкомітет виражає щирю вдячність спонсорам конференції:

 SOLUTIONS FOR YOUR SUCCESS	ТЗОВ “N-iX”
 Software Development Company	ТЗОВ “DevCom”
	ТЗОВ “ABTO SoftWare”
	ТЗОВ “SoftServe”

та благодійникам: Віктор Гордійчук, Василь Бакалець, Ірина Ширій, Зореслава Бережанська, Федір Чабан, Дмитро Косарев, Володимир Миколайович Вовк

© Львівський національний університет
імені Івана Франка

ЗМІСТ

<i>Б.А. Остудін, Р.С. Ханко</i> ЙОСИФ ВАСИЛЬОВИЧ ЛЮДКЕВИЧ.....	12
<i>Я.Г. Савула</i> ФАКУЛЬТЕТУ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ – 40 РОКІВ.....	14
<i>Г.А. Шинкаренко, В.М. Горlach</i> КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ. ІСТОРІЯ І СЬОГОДЕННЯ.....	16
<i>D.V. Breslavsky, V.O. Mietielov, O.K. Morachkovsky, S.O. Pashchenko, O.A. Tatarinova</i> ASYMPTOTIC METHODS AND FINITE ELEMENT METHOD IN CYCLIC CREEP-DAMAGE PROBLEMS.....	19
<i>Maria O. Chetvertak</i> NEW GNENERALIZATION OF THE CLASSICAL INTEGRAL TRANSFORMS.....	21
<i>A. Chugay, A. Pankratov, T. Romanova</i> OPTIMIZED OBJECT PACKINGS USING QUASI-PHI-FUNCTIONS.....	23
<i>Ibraim Didmanidze, Gregory Kakhiani</i> OPTIMIZATION TRAINING ARTIFICIAL NEURAL NETWORK FOR SOME SOLUTIONS.....	25
<i>R.G. Drebotiy</i> A POSTERIORI ERROR ESTIMATORS FOR HP-ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD.....	27
<i>I. Dyyak, I. Makar, Ihor Prokopyshyn, M. Shahin, Yu. Yashchuk</i> ADAPTIVE HETEROGENEOUS NUMERICAL SCHEMES VIA DOMAIN DECOMPOSITION METHODS.....	31
<i>M.O. Gnuskina</i> THREE-DIMENSIONAL DIRECT AND INVERSE PROBLEM OF FINDING THE STRESS STATE.....	34
<i>V.M. Patsuk</i> A METHOD OF COVERING A REGION FORMED BY A CONTOUR CONTAINING LINEAR SEGMENTS AND CIRCULAR ARCS BY ELEMENTARY REGIONS.....	38
<i>A.O. Shcherba, O.S. Bychkov</i> CROSS-LANGUAGE SENTIMENT ANALYSIS ALGORITHM.....	40
<i>V. Stelmashchuk</i> NUMERICAL SCHEME FOR LORD-SHULMAN THERMOPIEZOELECTRICITY PROBLEM.....	42
<i>G. Zholtkevych, V. Dorozhinsky</i> A REGULAR COMPLEX EVENT PROCESSING.....	46
<i>A.B. Артюх, М.В. Судоров</i> МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ В'ЯЗКИХ ТЕЧІЙ.....	49

<i>В.С. Бахрушин</i> ПРОБЛЕМА ЧУТЛИВОСТІ УНІВЕРСИТЕТСЬКИХ РЕЙТИНГІВ, ОДЕРЖУВАНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ЛІНІЙНОЇ ЗГОРТКИ.....	53
<i>В.С. Бахрушин, І.О. Дудко</i> ВАРІАНТИ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧІ ПЕРЕВІРКИ ЗГОДИ НАЯВНИХ ЕМПІРИЧНИХ ДАНИХ З ТЕОРЕТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ РОЗПОДІЛУ.....	55
<i>І.Є. Бернакевич, П.П. Вагін, І.Я. Козій, В.М. Харченко</i> КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ.....	57
<i>Я.Й. Бігун</i> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ЕКОЛОГІЧНОГО ФАКТОРУ НА ІМУННУ ВІДПОВІДЬ ОРГАНІЗМУ ЛЮДИНИ.....	59
<i>Р. Бігун, Г. Цегелик</i> ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МІНОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ АБСОЛЮТНОГО ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ ФУНКЦІЙ НА ЗАДАНОМУ ПРОМІЖКУ.....	61
<i>Ю.І. Білушак, В.С. Гончарук, А.С. Давидок, О.Ю. Чернуха</i> ПАКЕТ ПРОГРАМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДИФУЗІЇ У ВИПАДКОВИХ СТРУКТУРАХ.....	63
<i>В.О. Богаєнко, О.О. Марченко, Т.А. Самойленко</i> МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО СТАНУ ВОДОНАСИЧЕНОГО ГРУНТОВОГО МАСИВУ ЗА НАЯВНОСТІ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ.....	67
<i>Р. Боднарук, В. Бомк, П. Муць</i> РОЗРОБКА ВЕБ САЙТУ КОНФЕРЕНЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ РКР.....	70
<i>Б.Л. Божєнко, Л.М. Кіт, Т.С. Нагирний</i> ДО ПИТАННЯ КЕРУВАННЯ СКЛАДНИМИ ТЕХНІЧНИМИ СИСТЕМАМИ.....	73
<i>Ю.В. Бойчук</i> ІТЕРАЦІЙНИЙ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОНДУКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ В ПЛОСКОМУ ШАРІ.....	75
<i>І.В. Борачок, Р.С. Хапко</i> ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА У ТРИВИМІРНИХ ДВОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ АЛЬТЕРНУЮЧИМ МЕТОДОМ.....	77
<i>А.Я. Бомба, О.В. Присяжнюк</i> МОДЕЛЮВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛО- МАСОПЕРЕНОСЕННЯ В НАНОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ.....	81
<i>В.В. Вербіцький, І.М. Іванищева</i> ПЕРЕУПОРЯДКУВАННЯ СІДЛОВИХ МАТРИЦЬ.....	83
<i>О.Н. Вітюк, О.Д. Кічмаренко, К.Ю. Сапожнікова</i> ПРО НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З МАКСИМУМОМ.....	85

<i>А.П. Власюк, Н.А. Жуковська</i> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО- МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН ГРУНТОВОГО МАСИВУ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В ТРИВИМІРНОМУ ВИПАДКУ.....	87
<i>А.П. Власюк, В.В. Жуковский</i> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІГРАЦІЇ РАДІОНУКЛІДІВ У КАТАЛІТИЧНОМУ ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ З ПАСТКАМИ У НЕЛІНІЙНОМУ ВИПАДКУ.....	89
<i>А.П. Власюк, Т.П. Цветкова</i> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЕЙ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНІЙ ФІЛЬТРАЦІЇ ПІДЗЕМНИХ ВОД ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННІ У НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНОМУ ҐРУНТІ З РУХОМОЮ ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ.....	90
<i>В.Д. Вовк</i> ДО ВИКОРИСТАННЯ КВАДРАТИЧНИХ АПРОКСИМАЦІЙ КООРДИНАТ ДЛЯ ПОБУДОВИ СІТОК МСЕ.....	92
<i>О.В. Вовк, Г.А. Квасниці, Г.А. Шинкаренко</i> АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНКИ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ ДЛЯ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ КРУЧЕННЯ ПРИЗМАТИЧНИХ СТРИЖНІВ.....	94
<i>О.В. Вовк, Г.А. Шинкаренко</i> ОЦІНКИ ВЕРХНЬОЇ ТА НИЖНЬОЇ МЕЖ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	98
<i>С. Я. Вольфсон, О. В. Черницька</i> ЗАДАЧА РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ.....	102
<i>Р.А. Воробель</i> АЛГЕБРИЧНА СТРУКТУРА ОПРАЦЮВАННЯ НАПІВТОНОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ, ЯКА ВРАХОВУЄ ЙОГО ОСВІТЛЕННЯ.....	104
<i>Г.А. Гайна, А.В. Єрукаєв</i> ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ НЕЧІТКОЇ ПРОДУКЦІЙНОЇ КОГНІТИВНОЇ КАРТИ.....	106
<i>Я.С. Гарасим, Б.А. Остудін</i> ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ НА КОМПАКТІ.....	110
<i>Г.Ю. Гарматій, В.С. Попович, М. Круль</i> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ НЕУСТАЛЕНОГО ТЕПЛОВОГО СТАНУ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ЗА РІЗНИХ УМОВ НАГРІВАННЯ.....	114
<i>В.А. Герус, П.М. Мартинюк</i> ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ КОНТАКТНОЇ СУФОЗІЇ В НАСИЧЕНИХ ҐРУНТАХ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	118
<i>М.І. Глебена, Г.Г. Цеселик</i> ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ.....	121

<i>В.М. Горбачук</i> МЕТОД БАНАХА–КНАСТЕРА–ШТЕЙНГАУЗА РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЧЕСНОГО ПОДІЛУ.....	124
<i>В.М. Горlach, Г.А. Шинкаренко</i> ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ АКУСТИКИ ТЕРМОГІДРОПРУЖНИХ СИСТЕМ.....	128
<i>І.В. Гребеннік, О.С. Чорна</i> СПЕЦІАЛЬНІ ТРАНСПОЗИЦІЇ ЕЛЕМЕНТІВ ПЕРЕСТАНОВОК ТА ВЛАСТИВОСТІ ЇХ КОМПОЗИЦІЇ.....	132
<i>Н.А. Гук, Н.І. Степанова</i> ОБРОБКА ДАНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ МЕТОДОМ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ПРИ ДІАГНОСТУВАННІ ПРИПОВЕРХНЕВИХ ТРІЩИН.....	134
<i>Л.Ф. Гуляницький</i> АЛГОРИТМИ ОМК З ДИВЕРСИФІКОВАНИМ ПОШУКОМ.....	136
<i>Л.Ф. Гуляницький, О.Ю. Мулеса</i> ДО КЛАСИФІКАЦІЇ МЕТАЕВРИСТИК.....	139
<i>Л.П. Добуляк, Г.Г. Цегелик</i> ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ПІДПРИЄМСТВОМ ВЗЯТОГО КРЕДИТУ НА МОЖЛИВІ ВИДИ ДІЯЛЬНОСТІ З ВРАХУВАННЯМ ПОТРЕБ НА КОЖНИЙ ВИД ДІЯЛЬНОСТІ.....	143
<i>С.О. Довгий, Д.І. Черній</i> ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ТЕХНОЛОГІЇ (НА ОСНОВІ МДО) ДЛЯ КОМП’ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.....	147
<i>В.М. Домрачев, В.В. Третиник</i> МОДЕЛЮВАННЯ ГАЛУЗЕВИХ РИЗИКІВ ЯК ОСНОВА ПРОГНОЗУВАННЯ ВВП В УКРАЇНІ.....	149
<i>О.О. Смець, Т.М. Барболіна</i> ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ЕВКЛІДОВИХ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ.....	153
<i>М.В. Жук, А.Ю. Кіндибалюк</i> ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА У ВИПАДКУ ДЕЯКОГО НЕВИРОДЖЕНОГО РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ.....	157
<i>А.І. Кардаш</i> ДО 40 ЛІТТЯ ФАКУЛЬТЕТУ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ.....	159
<i>В.О. Катан</i> ЗАСТОСУВАННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ В СЕНСІ СКІНЧЕНОЇ ЧАСТИНИ ЗА АДАМАРОМ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ УДАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛА ТА РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ.....	161
<i>А.В. Кінаш, Я.М. Чабанюк, У.Т. Хімка</i> ГРАНИЧНИЙ ГЕНЕРАТОР ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ В СХЕМІ АСИМПТОТИЧНО МАЛОЇ ДИФУЗІЇ.....	163
<i>А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула</i> ЗАСТОСУВАННЯ КУСКОВО-СТЕПЕНЕВИХ АПРОКСИМАЦІЙ MSE ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ- ДИФУЗІЇ-РЕАКЦІЇ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ.....	165

<i>Л.М. Клакович, Л.Б. Галамага</i>	
ЗАДАЧА АНАЛІЗУ АНТЕННИХ РЕШТОК З ПЛОСКИХ ПРЯМОКУТНИХ ВИПРОМІНЮВАЧІВ.....	166
<i>В.Ю. Клим</i>	
ПРО ЕФЕКТИВНИЙ ПІДХІД ЩОДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ.....	170
<i>В.Д. Клименко, М.В. Марчук, В.С. Пакош, В.М. Харченко, М.М. Хом'як</i>	
ОСОБЛИВОСТІ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНКУ СТИКІВ ВІДСІКІВ КОРПУСІВ РАКЕТ.....	172
<i>А.А. Коваленко, Т.С. Романова</i>	
ЗАДАЧА БАЛАНСНОГО КОМПОНУВАННЯ 3D ОБ'ЄКТІВ З УРАХУВАННЯМ МІНІМАЛЬНО ТА МАКСИМАЛЬНО ДОПУСТИМИХ ВІДСТАНЕЙ.....	176
<i>О.В. Ковальчук</i>	
ОГЛЯД ТРИКРОКОВИХ МЕТОДІВ НА ОСНОВІ МЕТОДУ НЬЮТОНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	179
<i>Я.В. Коковська, П.С. Венгерський</i>	
ПРО ПОРІВНЯННЯ ДВОХ ПІДХОДІВ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ РУСЛОВОГО СТОКУ РІДИНИ.....	183
<i>С.В. Колосова, В.С. Луханін, М.В. Сидоров</i>	
ПРО ПОБУДОВУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ.....	185
<i>Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко</i>	
ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З ОБМЕЖЕННЯМИ.....	189
<i>Т.В. Кравчук</i>	
ПРОГНОЗУВАННЯ ФОРМИ І ОБ'ЄМУ ПОКЛАДІВ КОРИСНИХ КОПАЛИН З ДОПОМОГОЮ БІКУБІЧНОГО СПЛАЙНА.....	191
<i>К.С. Красніков</i>	
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАСВОЄННЯ ПОРОШКОВОГО ДРОТУ У РОЗПЛАВІ СТАЛІ ПІД ЧАС ПРОДУВАННЯ НА УСТАНОВЦІ КІВШ-ПІЧ.....	193
<i>Р.П. Краснюк, Г.Г. Цегелик</i>	
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОГО РОЗПОДІЛУ ЗАВДАНЬ У ВУЗЛАХ КОМП'ЮТЕРНИХ МЕРЕЖ.....	197
<i>В.І. Кузьменко, Г.Й. Михальчук</i>	
ПРО ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У НЕКЛАСИЧНИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ.....	200
<i>О.Ю. Кучанський, В.В. Мазурак</i>	
ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ ІНТЕРНЕТ-БАНКІНГУ В УКРАЇНІ.....	203
<i>С.М. Левицька, А.Т. Дудикевич</i>	
ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ.....	205
<i>С. Літинський, А. Музичук</i>	
ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАПІЗНЮЮЧОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ.....	209

<i>О.П. Луценко, О.Г. Байбуз</i>	
АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ НОВОЇ ЙМОВІРНІСНОЇ МОДЕЛІ ОЦІНКИ СТАНУ ВАЛЮТНОГО РИНКУ	213
<i>Р. Малець</i>	
ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИХ ПРОЦЕСІВ В ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТАХ, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВІВ ТА СТИСНЕННЯ	217
<i>Вал. Мамчук, К. Гомон</i>	
ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ПІДЙОМНОЇ СИЛИ КРИЛА ЛІТАКА ПІД ЧАС ОБТІКАННЯ ЙОГО ПЛОСКИМ НЕСТИСЛИВИМ ПОТОКОМ З ВИКОРИСТАННЯМ ЧИСЕЛЬНО-КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ	221
<i>Н.В. Медвідь, П.М. Мартинюк</i>	
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ ЧЕРЕЗ ГРУНТОВУ ГРЕБЛЮ З ВОДОВОДОМ ТА ЗОНОЮ ВИМИВУ В УМОВАХ ВПЛИВУ ТЕХНОГЕННИХ ФАКТОРІВ	223
<i>О.Р. Мічута, П.М. Мартинюк, В.А. Герус</i>	
ПРО МАТЕМАТИЧНУ МОДЕЛЬ ЗАГАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ВПЛИВУ АДСОРБЦІЇ (ДЕСОРБЦІЇ) НА ПРОЦЕСИ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТІВ	225
<i>О.О. Михальова, Л.С. Корякикіна</i>	
ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО БАГАТОКРАТНОГО КУЛЬОВОГО ПОКРИТТЯ ТА МУЛЬТИПЛЕКСНЕ РОЗБИТТЯ МНОЖИН	227
<i>Ю.А. Музичук</i>	
ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ ТРИКУТНОЇ СИСТЕМИ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЙ ҐРІНА	230
<i>З.Т. Назарчук, Р.О. Гринів, А.Т. Синявський</i>	
МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ РОЗСПОВАННЯ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТОЧОК ГРАНИЦІ РОЗСПОВАЧІВ	233
<i>О.Г. Наконечний</i>	
ГАРАНТОВАНІ ЛІНІЙНІ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНІ ОЦІНКИ АБСТРАКТНИХ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ ТА НЕЙМАНА ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ СПОСТЕРЕЖЕННЯХ	237
<i>А.М. Недашковська</i>	
ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАТОРНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	238
<i>В.В. Нобіс, А.О. Музичук</i>	
ПРО ВІРТУАЛІЗАЦІЮ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ І ПРАКТИЧНИХ НАВИКІВ У ГАЛУЗІ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК У НАВЧАЛЬНИХ ОНЛАЙН-СИСТЕМАХ	242
<i>Н.І. Ободан, О.С. Магас</i>	
СТВОРЕННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ ОБРОБКИ СПОСТЕРЕЖУВАНИХ ПАРАМЕТРІВ ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ ДІАГНОСТИЦІ ЗАЛИШКОВОЇ МІЦНОСТІ СИСТЕМ	244

<i>А.О. Пашко</i>	ОЦІНКА ТОЧНОСТІ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В ПРОСТОРАХ ОРЛІЧА.....	247
<i>Р.М. Пелешак, М.В. Дорошенко, М.Б. Мельник</i>	РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ МЕТОДОМ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛАПЛАПСА З ВИКОРИСТАННЯМ СКМ МАТНЕМАТИСА.....	249
<i>Я.В. Пізюр, О.М. Іванова</i>	МОДИФІКОВАНИЙ АЛГОРИТМ БАЛАНСНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ІЗ ЗАДАНОЮ ПОХИБКОЮ МІНІМАКСНИМИ СПЛАЙНАМИ.....	253
<i>С.О. Плащенко, В.І. Кузьменко</i>	ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВ'ЯЗАНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ.....	255
<i>О.Д. Поліщук</i>	СКЛАДНІ МЕРЕЖІ ТА МЕРЕЖЕВІ СИСТЕМИ: І. ПОТОКОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	259
<i>О.Д. Поліщук</i>	СКЛАДНІ МЕРЕЖІ ТА МЕРЕЖЕВІ СИСТЕМИ: ІІ. СИНХРОНІЗАЦІЯ ТА КЕРОВАНІСТЬ.....	263
<i>В.Л. Поляков, Ю.І. Калугін, С.М. Курганська, О.В. Харламова</i>	ПРО ІНФОРМАЦІЙНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РОЗРАХУНКІВ НЕУСТАЛЕНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ НА ФОНІ ДРЕНАЖУ.....	267
<i>М.В. Приймак</i>	ФУНКЦІЇ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА СПОСОБИ ЇХ АНАЛІТИЧНОГО ЗАДАВАННЯ.....	271
<i>О.Я. Прядко, Г.Г. Цегелик</i>	МОДЕЛІ ОБСЯГУ КРЕДИТУВАННЯ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПРОЦЕНТНОЇ СТАВКИ.....	275
<i>Н.М. Романюк</i>	АЛГОРИТМІЧНІ АСПЕКТИ РЕАЛІЗАЦІЇ FD-МЕТОДУ ДЛЯ ЗАДАЧІ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ.....	278
<i>П.О. Савенко</i>	СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНА АПРОКСИМАЦІЯ ДІЙСНОЇ НЕВІД'ЄМНОЇ ФУНКЦІЇ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ МОДУЛЕМ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ФУР'Є.....	282
<i>М.Ю. Савкіна</i>	ТЕОРЕМА ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ ОЦІНКАМИ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ НЕПОВНОГО РАНГУ.....	286
<i>Я.Г. Савула</i>	ГЕТЕРОГЕННЕ РІЗНОМАСШТАБНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....	289
<i>Я.Г. Савула, Ю.І. Турчин</i>	ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ У ЖИВИХ ТКАНИНАХ.....	293
<i>П.С. Сеньо</i>	МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ТА ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЗАСНОВАНІ НА МАТЕМАТИЦІ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ.....	295

<i>П.І. Стецюк</i> БУЛЕВА ЗАДАЧА ДЛЯ НАЙКОРОТШОГО -ВЕРШИННОГО ЦИКЛУ У ПОВНОМУ ГРАФІ.....	297
<i>Ю.Г. Стоян, М.І. Гіль</i> ФОРМАЛІЗАЦІЯ УМОВ ВЗАЄМОДІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ, ЩО МАЮТЬ ФОРМУ ЕЛІПСА.....	300
<i>І.О. Субота, О.М. Хлуд, Г.М. Яськов</i> ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ ГОМОТЕТИЧНИХ ОРІЄНТОВАНИХ ЕЛІПСОЇДІВ.....	302
<i>Л.О. Терейковська</i> ВИКОРИСТАННЯ СХОВАНИХ МАРКІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ РОЗПІЗНАВАННЯ ГОЛОСОВИХ СИГНАЛІВ В СИСТЕМІ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ.....	304
<i>О.В. Терендій</i> СПОСОБИ ІНТЕЛЕКТУАЛІЗАЦІЇ ІНТЕРФЕЙСУ АВТО- МАТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ ОПРАЦЮВАННЯ ДАНИХ.....	306
<i>Н.К. Тимофієва</i> ПРЯМІ ТА ОБЕРНЕНІ ФУНКЦІЇ В ЗАДАЧАХ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА СИМЕТРІЯ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИН.....	310
<i>Ю.В. Токовий, А.І. Чиж</i> ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА.....	314
<i>Ю.В. Турбал, А.Я. Бомба, М.Ю. Турбал</i> МЕТОД ОПЕРАТОРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ МОДЕЛЮВАННЯ ТОЧОК ПЕРЕТИНУ ТРАЄКТОРІЙ ВІДОКРЕМЛЕНИХ ХВИЛЬ ТА ОБЛАСТЕЙ ЗМІНИ ГУСТИНИ.....	316
<i>Р.Б. Тушинський, В.М. Макар, Т.П. Могіляк</i> ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ОПРАЦЮВАННЯ БІБЛІОГРАФІЧНИХ ОПИСІВ ПУБЛІКАЦІЙ.....	318
<i>О.М. Ходзінський, М.І. Огурцов</i> ПРО ФОРМАЛІЗАЦІЮ ЗАДАЧІ МАРШРУТИЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ ІЗ ЧАСОВИМИ ВІКНАМИ.....	320
<i>Г.Г. Цегелик, Л.І. Фундак, Н.В. Грининська</i> АПАРАТ МАЖОРАНТ І МІНОРАНТ ТА ЇХНІХ ДІАГРАМ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО.....	323
<i>В.В. Черняхівський</i> ВИБІР СЕРЕДИННИХ УМОВ ДЛЯ БУДОВИ ЛАНЦЮГА ГРАФА.....	327
<i>Ю.В. Чуй, П.М. Мартинюк</i> ПРО ВПЛИВ НАПІВПРОНИКНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА СТИБОК НАДЛИШКОВИХ НАПОРІВ В ҐРУНТІ (ДВОВИМІРНИЙ ВИПАДОК).....	330
<i>С.М. Шахно, О.Я. Боднар, Г.П. Ярмола</i> КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД НЬЮТОНА-БРОЙДЕНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	333
<i>С.П. Шевчук</i> ВПЛИВ ПРУЖНОГО СТІЧКОВОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ.....	335

<i>Г.М. Щербата</i> МЕТА МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ОДНОВИМІРНОГО ГЕТЕРОДИФУЗНОГО МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ З ДОПОМОГОЮ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ.....	338
<i>М.В. Щербатий</i> ІМІТАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ СКЛАДНИХ СИСТЕМ.....	342
<i>Ю. Щербина, Р. Ракус</i> АЛГОРИТМ ВІЮЛІ-ДЖОНСА ЯК ОСНОВА ДЛЯ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБЛИЧЧЯ.....	345
<i>А.Г. Яровенко</i> ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ ОБЧИСЛЕНЬ В МАТЕМАТИЧНІЙ ПІДГОТОВЦІ СТУДЕНТІВ.....	348
<i>М.Я. Бартіш, О.В. Ковальчук</i> ОГЛЯД ТРИКРОКОВИХ МЕТОДІВ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГАУССА- НЬЮТОНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЕРЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	351
<i>К.С. Іванків</i> МАТЕМАТИЧНЕ І КОМПЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ЗАБРУДНЕННЯ ІЗ НАВКОДИШНІМ СЕРЕДОВИЩЕ.....	355
<i>Д.В. Кравцов</i> МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВІДНОВЛЕННЯ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ ЗА НЕПОВНОЮ ІНФОРМАЦІЄЮ.....	358
<i>С.В. Колосова, В.С. Луханін, М.В. Сидоров</i> ПРО ІСНУВАННЯ ДОДАТНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ І ПОБУДОВУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ З РІВНЯННЯМ ЛАНЕ-ЕМДЕНА.....	362
<i>О.Г. Наконечний, П.М. Зінько</i> ІГРОВІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ІНФОРМАЦІЙНОГО ПРОТИБОРСТВА.....	366
<i>І.П. Твердохліб</i> КОНЦЕПТУАЛІЗАЦІЯ ПРОБЛЕМИ ПРОГРАМНО-ЦІЛЬОВОГО УПРАВЛІННЯ ЕКОНОМІЧНИМ РОЗВИТКОМ РЕГІОНУ НА ПІДСТАВІ МОДЕЛІ БАГАТОВИМІРНОГО ЛІНІЙНОГО ОБ'ЄКТУ.....	367

УДК 519.6

Б.А. Остудін, Р.С. Хапко

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ЙОСИФ ВАСИЛЬОВИЧ ЛЮДКЕВИЧ

Одним з фундаторів і багаторічним лідером наукового та навчального напрямів, пов'язаних з обчислювальною та прикладною математикою у Львівському університеті імені Івана Франка у 1960-90рр. був Йосиф Васильович Людкевич. Сферу його безпосередніх наукових інтересів становили прикладні проблеми математичної фізики, для чисельного аналізу яких застосовувався метод граничних інтегральних рівнянь. Зокрема, Й.В. Людкевич вперше запропонував зводити крайові задачі на розізнаних поверхнях до інтегральних рівнянь першого роду з різними особливостями в ядрах та запровадив оригінальний метод чисельного розв'язування таких рівнянь. Згодом у працях В. Вендландта було строго математично обгрунтовано справедливості цього підходу. Йосифом Васильовичем та його багаточисельними учнями було розроблено цілу низку оригінальних алгоритмів розв'язування граничних інтегральних рівнянь першого роду проєкційними методами та застосовано їх до стаціонарних і нестационарних плоских, осесиметричних і просторових крайових задач для різних типів диференціальних рівнянь. Слід також зауважити, що Й.В. Людкевич як високо ерудований науковець і творча особистість завжди добре бачив перспективні напрямки у дослідженнях. Саме за його власною ініціативою на факультеті прикладної математики почали активно займатись перспективним на той час методом скінченних елементів та його застосуванням для чисельного аналізу широкого кола задач механіки.

Йосиф Васильович Людкевич народився 29 вересня 1935р. в селі Іванівці Жидачівського району Дрогобицької (тепер Львівської) області. У 1955р. закінчив із золотою медаллю Стрийську СШ № 2 і у 1955-60 рр. навчався на механіко-математичному факультеті Львівського університету імені Івана Франка за спеціальністю обчислювальна математика, який закінчив з відзнакою. Подальша трудова діяльність Й.В. Людкевича пов'язана з Львівським університетом: інженер-програміст, старший науковий співробітник, завідувач обчислювальним центром; старший викладач, доцент, завідувач кафедри обчислювальної математики.

Й.В. Людкевич опублікував близько 100 наукових праць. В рамках створеного ним наукового напрямку і під його керівництвом захистили кандидатські дисертації В. Гордійчук, Б. Остудін, З. Бережанська, А. Дудикевич, А. Чухлебов, В. Бакалець, А. Музичук, І. Ширій, Ю. Сибіль, В. Терешко, Е. Собхі, С. Кічура, Р. Хапко, Р. Пасічник,

М. Дорошенко, В. Пучка, Р. Скасків. Йосиф Васильович глибоко переймався долею своїх учнів і завжди намагався завершити дослідження кожного успішним захистом кандидатської дисертації. На той час проблема полягала і в тому, що підготовлену молодим науковцем дисертаційну роботу, через відсутність у Львівському університеті спеціалізованої вченої ради, потрібно було представляти тільки у наукових установах та навчальних закладах Києва, Москви, Мінська, Донецька, Новосибірська, Казані. Власне тому він активно наводив контакти з провідними вченими в області обчислювальної математики, шукав у них підтримки та допомоги для своїх учнів. Його самовіддана і наполеглива праця в цьому напрямку приносила завжди свої плоди – учні успішно захищали кандидатські дисертації, а його авторитет у науковому світі невпинно зростав. Кожен учень Й. В. Людкевича з вдячністю згадує допомогу і турботу, проявлені шефом при написанні ними дисертації, і, особливо, організацію захисту. Його творчий неспокій створював у колективі учнів атмосферу наукового пошуку, стимулював до отримання нових наукових результатів.

Й.В. Людкевич приділяв значну увагу навчальному процесові у Львівському університеті. Понад 25 років на різних факультетах він читав загальні та спеціальні курси, керував курсовими та дипломними роботами студентів факультету прикладної математики. Саме його стараннями на факультеті для подальшої наукової та викладацької роботи залучались здібні студенти з районів Львівської та інших областей Західної України. Йосиф Васильович розробив цілісну систему підготовки кадрів, завдяки якій на факультеті прикладної математики та інформатики зараз працюють багато його учнів і чимала кількість викладачів, яких він свого часу опікував. Така турбота до людей пояснюється в деякій мірі складністю його нелегкої особистої долі.

Поряд з науковою і педагогічною діяльністю Йосиф Васильович постійно цікавився філософськими та історичними проблемами. Як постійний керівник філософського семінару, майстерний лектор він завоював популярність, авторитет і любов серед студентів і викладачів. Його лекції з історії України та релігії в період радянських часів завжди були гостроактуальними і цікавими, виховували у студентів почуття патріотизму, закликали до постійного поповнення своїх знань.

Усе своє відносно коротке творче життя Йосиф Васильович генерував нові наукові ідеї. Вони виявились настільки глибокими та плідними, що і тепер знаходять розвиток у роботах сучасного покоління молодих науковців. Світла пам'ять про Йосифа Васильовича Людкевича, талановитого вченого і яскраву особистість, назавжди залишилась у серцях вдячних учнів та його друзів.

УДК 519.6

Я.Г. Савула

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**ФАКУЛЬТЕТУ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
ТА ІНФОРМАТИКИ – 40 РОКІВ**

Факультет прикладної математики та інформатики – один з перших в Україні та перший на західних її теренах факультет комп'ютерного профілю, який утворився з механіко-математичного факультету в 1975 році, увібравши в себе комп'ютерно орієнтовані кафедри обчислювальної математики, прикладної математики та кафедри теорії оптимальних процесів. Поштовхом для виникнення цих кафедр, та й факультету загалом, було створення у Львівському університеті в 1959 році обчислювального центру та розвиток на його основі наукових робіт в галузі обчислювальної математики.

Викладачі факультету, серед яких є 12 докторів наук, професорів та 32 кандидатів наук доцентів, ведуть наукову роботу у напрямках: комп'ютерне моделювання процесів і систем, числові методи розв'язування операторних рівнянь, методи розв'язування задач оптимізації, створення інформаційних систем та систем комп'ютерного забезпечення навчального процесу.

Свій науковий та науково-методичний доробок викладачі факультету регулярно публікують у міжнародних та вітчизняних наукових журналах, а також у монографіях, підручниках та навчальних посібниках. Щорічно на факультеті проводиться наукова конференція з сучасних проблем прикладної математики та інформатики, а також студентська наукова конференція.

Головними структурними підрозділами факультету є кафедри: обчислювальної математики, прикладної математики, теорії оптимальних процесів, програмування, інформаційних систем, математичного моделювання соціально-економічних процесів, дискретного аналізу та інтелектуальних систем. Створені комп'ютерні лабораторії, які функціонують при кафедрах. Для стимулювання інноваційної активності студентів на факультеті засновано лабораторію ідей.

Факультет веде підготовку бакалаврів за спеціальностями: інформатика, прикладна математика та системний аналіз. Ведеться навчання магістрів за спеціальностями: інформатика, прикладна інформатика, прикладна математика, системний аналіз і управління, системи і методи прийняття рішень. Навчання аспірантів здійснюється за спеціальностями: математичне моделювання та обчислювальні методи і обчислювальна математика. На факультеті працює рада із захисту кандидатських дисертацій за спеціальністю обчислювальна математика.

Студенти факультету мають можливість отримувати знання з усіх фундаментальних дисциплін, які складають основу комп'ютерних технологій, вивчати основні мови програмування та ознайомлюватись з найважливішими комп'ютерними технологіями. В рамках асоціації з консорціумом європейських університетів (<http://mathmods.eu>) випускники – бакалаври факультету мають можливість здобувати магістерський ступінь в п'яти університетах Європи: L'Aquila (Italy), Barcelona (Catalonia/Spain), Gdansk (Poland), Hamburg (Germany) and Nice (France). Цією можливістю уже скористалися більше десяти наших студентів. У 2014/15 навчальному році студенти факультету мали можливість слухати сертифікований курс в рамках угоди з університетом Вюрцбурга (Німеччина). Двоє студентів факультету на конкурсній основі вибороли можливість навчання протягом місяця у Вюрцбургу.

Факультет прикладної математики та інформатики є базовим у Західному регіоні з проведення Всеукраїнської студентської олімпіади з програмування (за міжнародними правилами ACM). До складу регіону входять області: Вінницька, Волинська, Житомирська, Закарпатська, Івано-Франківська, Львівська, Рівненська, Тернопільська, Чернівецька. Команди факультету були неодноразовими переможцями у Західному регіоні, учасниками фіналу цієї престижної Всесвітньої олімпіади а у 2008 році в Канаді здобули Золоту медаль.

Факультет упродовж останніх років був учасником низки TEMPUS проєктів: 2008 p. Educational centers' network on modern technologies of local governing; 2012 p. Integrated university management system: EU experience on NIS countries' ground; 2012 p. Informatics and management: Bolona style Qualifications frameworks. Студенти факультету мали можливість брати участь у конкурсі інноваційних та ІТ проєктів. Переможці вибороли право на короткотермінове навчання в університетах Швеції в рамках діяльності гранту “Лабораторія ідей” та колективного гранту "Education for Entrepreneurship and Innovation", які фінансувалися Урядом Швеції. В останньому факультет співпрацював з відомими ІТ компаніями SoftServe (Україна) та Ayond AB (Швеція).

Найбільшим і найважливішим здобутком факультету прикладної математики та інформатики за сорок років є майже шість тисяч випускників факультету, які працюють в науці, в бізнесі, в державних установах, а також достойно представляють Україну за її межами.

УДК 519.6

Г.А. Шинкаренко, В.М. Горлач

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ.
ІСТОРІЯ І СЬОГОДЕННЯ**

Кафедра інформаційних систем створена 1 червня 1995 року за наказом Ректора Львівського університету проф. І.О. Вакарчука.

У рамках підготовки фахівців з інформатики кафедрі було доручено забезпечувати спеціалізацію "математичне та програмне забезпечення проблемно-орієнтованих систем". Завідувачем кафедри призначено професора кафедри прикладної математики, д.ф.-м.н. Г.А. Шинкаренка. Для забезпечення навчального процесу на посади доцентів кафедри було залучено викладачів кафедри прикладної математики доцентів В.О. Ліхачова та В.М. Вовка, старших наукових співробітників науково-дослідних лабораторій університету, кандидатів фіз.-мат. наук П.П. Вагіна, В.Д. Вовка та В.М. Горлача, а також лаборанта Т.А. Семенюту. У різні роки на кафедрі працювали інж. Г.А. Квасниця, с.н.с. О.М. Левченко, н.с. Р.Б.Малець та ас. В.М. Трушевський.

Сьогодні на кафедрі працюють завідувач кафедри Г.А. Шинкаренко, доценти І.Є. Бернакевич, П.П. Вагін, П.С. Венгерський, В.Д. Вовк, В.М. Горлач та ст.лаб. Т.А. Семенюта.

У своїй навчально-методичній практиці кафедра інформаційних систем ставить за мету підготовку висококваліфікованих фахівців у галузі розробки та застосування інформаційно-аналітичних систем підтримки прийняття управлінських рішень на базі сучасних інформаційних технологій, комп'ютерної техніки та засобів математичного і чисельного моделювання.

Сьогодні у межах галузі знань "Системні науки та кібернетика" кафедра забезпечує підготовку фахівців освітнього рівня бакалавр за напрямком "Інформатика" та освітніх рівнів магістр і спеціаліст за напрямком "Прикладна інформатика". Викладачі кафедри забезпечують викладання основних курсів "Організація та обробка електронної інформації", "Функціональний аналіз та обчислювальна математика", "Обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка", "Програмування та підтримка веб-застосувань", "Чисельні методи математичної фізики", "Моделювання динамічних систем", "Основи екології", "Системний аналіз", "Розподілені застосування", а також ряду дисциплін за вибором студентів.

За 20 років діяльності викладачами кафедри підготовано більше 20 науково-методичних видань, серед яких, зокрема три видання підручника "Інформатика. Комп'ютерна техніка. Комп'ютерні технології", який

рекомендований МОН України як підручник для студентів вищих навчальних закладів.

З 1997 року по 2015 рік кафедрою здійснено 17 випусків фахівців у галузі інформатики. Дипломи магістрів отримали 171, дипломи спеціалістів – 208 випускників. За ці роки на кафедрі підвищили свою кваліфікацію 22 випускники аспірантури.

Кафедра інформаційних систем є відомим в Україні та за її кордонами науковим колективом, який має вагомі здобутки в галузі математичного моделювання, проведення обчислювального експерименту в задачах механіки суцільного середовища, фізики, медицини та охорони довкілля. З цієї тематики слід відзначити результати виконаних досліджень таких фундаментальних та прикладних задач:

- числове моделювання динамічної взаємодії пружних тіл та оболонок з рідинами;
- побудова моделей та числовий аналіз нестационарних процесів дисипативної акустики, термопружності та п'єзо- і піроелектрики;
- числове моделювання процесів стоку мілких потоків рідини з рельєфу земної поверхні та їх взаємодії з атмосферою і підземними водами;
- тривимірне моделювання та скінченно-елементний аналіз пружних властивостей зубощелепного апарату;
- аналіз та числове моделювання процесів, які описуються системами сингулярно збурених та квазілінійних рівнянь дифузії-адвекції-реакції в нестисливих середовищах;
- побудова та аналіз ефективних і надійних апостеріорних оцінювачів похибок апроксимацій методу скінченних елементів (МСЕ) та конструювання h - та hp -адаптивних схем на їхній основі;
- конструювання алгоритмів та засобів проведення комп'ютерного моделювання та кваліфікованих обчислювальних експериментів.

Математичні моделі згаданих процесів описуються початково-крайовими та варіаційними задачами, коректність формулювань яких досліджується з використанням законів збереження та методів функціонального аналізу. Дискретизація згаданих моделей здійснюється проекційно-сітковими схемами, для яких будуються апріорні та апостеріорні оцінки стійкості та збіжності.

З часу заснування кафедри тематика наукових досліджень доповнюється новими напрямками, які стосуються розробки геоінформаційних систем, створення інформаційно-аналітичних систем підтримки прийняття управлінських рішень, розподілених інформаційно-пошукових систем. Зокрема створено автоматизовані інформаційні системи ведення державного земельного, містобудівного кадастрів та моніторингу земельних ресурсів. Результати цих розробок запроваджено в практику Львівського обласного та міського управлінь земельних ресурсів

і Львівського регіонального центру моніторингу земельних ресурсів. Розробки даного напрямку доповнилися програмами: збору інформації засобами мобільного зв'язку, керування технологічними процесами у готельній справі, апроксимації рельєфу та створення цифрової моделі території Львівщини.

Ще одним напрямком наукових розробок кафедри є застосування Веб-технологій для побудови інформаційно-пошукових систем на базі мереж Інтернет-Інтранет, розробка програмного забезпечення опрацювання аудіо-, відео-, графічної, текстової інформації, презентаційних та довідкових компакт-дисків, проектування систем управління Веб-сайтами університету та факультету.

За цей час співробітниками кафедри виконано 14 держбюджетних фундаментальних та прикладних тем та 2 госпдоговірні теми.

Наукові здобутки членів кафедри, починаючи з 1995 року, відображені у 211 наукових статтях, на десятках міжнародних та всеукраїнських конференціях та симпозиумах виголошено 400 доповідей. У 2014 році авторами Трушевським В.М., Шинкаренко Г.А., Щербина Н.М. опублікована монографія "Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі: теоретичні аспекти та застосування".

На кафедрі підготували і захистили дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата наук співробітники та випускники кафедри І. Бернакевич, Н. Іванова, В. Трушевський, Ю. Козаревська, О. Левченко, Ю. Сінчук, Ф. Чабан, І. Козій. Випускник кафедри Я. Кондратюк отримав ступінь PhD, захистивши дисертацію в університеті Утрехта (Нідерланди).

Основні наукові результати знаходять своє відображення у навчальному процесі, тематиці курсових, дипломних, магістерських, а також дисертаційних робіт.

Активну участь у наукових дослідженнях беруть студенти кафедри. Їхні наукові здобутки відображені більш як у 100 публікаціях. Студенти кафедри О. Ліпіна, Є. Абрамов, О. Остапов та Т. Хапко були лауреатами Всеукраїнських конкурсів студентських наукових робіт в галузі природничих наук, В. Войтович, О. Вихопень та А. Шинкаренко отримали Премію НАН України за кращу наукову роботу молодих учених в галузі математики.

Серед випускників кафедри багато успішних керівників, кваліфікованих фахівців, службовців, підприємців, які працюють не лише в Україні а й за її межами у відомих світових компаніях, зокрема Google Inc., Samsung Group, British American Tobacco Plc. та інших.

UDC 539.3

*D.V. Breslavsky, V.O. Mietielov, O.K. Morachkovsky,
S.O. Pashchenko, O.A. Tatarinova*

(National Technical University 'Kharkiv Polytechnic Institute')

ASYMPTOTIC METHODS AND FINITE ELEMENT METHOD IN CYCLIC CREEP-DAMAGE PROBLEMS

The paper presents the description of methods, algorithms and software were developed for numerical simulation of two- and three-dimensional creep-damage problems. Special attention is stressed on the problems of solid's behavior at conditions of cyclic varying of stress and temperature fields which is widely spread in modern aerospace and power industry.

The full mathematical problem statement of solid's creep in the case of joint action of static and cyclically varying forces and temperatures is presented [1]. We regard the solid initially isotropic body with volume V which is fixed in a surface part S_1 . The body is loaded by volume forces f_i , the traction p_i acts on the surface part S_2 . The case of constant in time volume forces is regarded: $f = f(x_i)$, $x_i \in V$, $i = 1, 2, 3$. Traction has constant value $p_i^{(0)} = p_i^{(0)}(x_i)$ and varies in a time through the cycle $\Phi_i(t)$: $p_i = p_i^{(0)} + \Phi_i(t)$, $x_i \in S_2$, $\Phi_i(t) = p_i^{\max} \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \sin(\Omega_k t + \beta_k) + p_i^a \sin(\Omega t)$, where $p_i^{\max}$, p_i^a are the amplitudes of appropriate components of traction; $Z_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$; $\Omega_k = 2\pi k / T$; $\Omega = 2\pi / T_2$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} + c_{ij} + \varepsilon_{ij}^T, \quad \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}}{2}, \quad x_i \in V; \quad (1) \\ \sigma_{ij} &= D_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - p_{kl} - c_{kl} - \varepsilon_{kl}^T); \quad \sigma_{ij} n_j = p_i^{(0)} + \Phi_i(t), \quad x_i \in S_2; \quad u_i = \bar{u}_i, \quad x_i \in S_1; \\ u_i(x_i, 0) &= c_{ij}(x_i, 0) = 0 \end{aligned}$$

where n_j are the components of the unit vector which is normal to body's surface, $j = 1, 2, 3$; $\{D\}$ is a tensor of elastic properties of the material; u_i are known values of the displacements on the surface S_1 , which are constant in a time; ρ is the material density. Total strain consists of elastic e_{ij} , temperature ε_{ij}^T , creep c_{ij} and instantaneous plastic p_{ij} components. The last ones are determined in necessary cases by solution of separate elastic-plastic problem.

The non-stationary heat conduction problem is stated additionally in order to determine the temperature distribution in each time moment [1].

$$a_T^2 \Delta \bar{T} + Q_T = \dot{\bar{T}}, \quad a_T^2 = k_T / (c_T \rho), \quad Q_T = F / (c_T \rho) \quad (2)$$

where Δ is Laplace's operator; c_t , k_t , are the coefficients of specific heat and heat conduction; F is the density of thermal sources.

The direct integration of the system of nonlinear differential equations (1) meets a number of numerical problems. From the other hand the state equations of cyclic behavior of materials at different programs of stress and temperature varying demonstrate the essential acceleration of creep strain and damage accumulation rates, which demands separate description in state equations. These reasons demand the use of special procedure for the solution of stated problem.

The method of asymptotic expansions jointly with the method of averaging over of the periods of stress or temperature varying is used for the transformation of original system of equations. These procedures led to two systems of equations, one of which describes the motion of a system in the slow time scale as well as the second simulates the fast [1-3]. The constitutive creep-damage equations were derived by use of similar asymptotic and averaging procedures [1-2] are added to the first system. Only this first system has to be solved for any time moment, as well as the second supplies the amplitude values for constitutive equations.

This solution is organized by use of the Finite Element Method (FEM) for boundary problems with addition of time-step integration methods like predictor-corrector for initial value ones. The above approach was realized for three principal problems: two- and three dimensional stress-strain state and thin closed and unclosed shells of revolution at arbitrary loading. Developed software include three finite elements: three-nodal triangle for problems like plane stress state, eight-nodal brick for three-dimensional modeling and four-nodal element of thin shell of revolution with 7 degrees of in each node. Three application packages were developed for solution of above mentioned creep-damage problems. The software include the graphical pre- and postprocessors and mathematical processors. Examples of numerical modeling of creep-damage processes at cyclic loading and heating can be found in [1-3].

1. *Breslavsky D.V.* Creep and damage in shells of revolution under cyclic loading and heating / D.V. Breslavsky, O. Morachkovsky, O. Tatarinova // *International Journal of Nonlinear Mechanics*. – 2014. – # 66. – P. 87-95.
2. *Breslavsky D.* Cyclic Creep-Damage in Thin-Walled Structures / H. Altenbach, D. Breslavsky, O. Morachkovsky, K. Naumenko // *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. – 2000. – Vol. 35, № 1. – P. 1-11.
3. *Breslavs'kyi D.V.* Cyclic Thermal Creep Model for the Bodies of Revolution / D.V. Breslavs'kyi, Yu.M. Korutko, O.K. Morachkovs'kyi // *Strength of Materials*. – 2011. – Vol. 43, № 2. – P. 134-143.

Maria O. Chetvertak

(National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”)

NEW GNENERALIZATION OF THE CLASSICAL INTEGRAL TRANSFORMS

The mathematics have many methods but method of integral transforms is the greatest effective contemporary method for the solving of problems in mathematics and other fields of the natural sciences.

Now the method of integral transforms received rigorous mathematical substantiation. The present paper is devoted to new generalization of some classical integral transforms.

The new generalized integral transforms are introducing by help of the generalized confluent hypergeometric function ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ [3]:

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{B(a,c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a;\tau) \\ (c;\beta) \end{matrix} \middle| zt^\tau \right] dt,$$

where $\{\tau, \beta\} \subset R, \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0, \tau > 0, \tau - \beta < 1, B(a, c)$ is the classic beta-function, and ${}_1\Psi_1[\dots]$ is a special case of the generalized hypergeometric the Fox-Wright function [1]:

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_i; \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j; \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + n\alpha_i)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + n\beta_j)} \frac{z^n}{n!},$$

here $(a_i, b_j \neq 0, i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q), 1 + \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i \geq 0$.

If $\tau = \beta = 0$ in (1) that we have the classical confluent hypergeometric function ${}_1\Phi_1(a;c;z)$ [3].

And by help of the r-confluent hypergeometric function has the following form:

$${}_r^1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{B(a,c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{xt} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} \left(\delta; \gamma; -\frac{r}{t(1-t)} \right) dt.$$

The definitions of some new generalized integral transforms:

The generalized Laplace' integral transforms:

$$\tilde{L}\{f(x); y\} = \int_0^{\infty} e^{-xy} {}_r^1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(xy)) f(x) dx,$$

$$\tilde{L}_m \{f(x); y\} = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^m y^m} {}_1F_1^{\tau, \beta} \left(a; c; -r(x^m y^m) \right) f(x) dx,$$

$$\tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{f(x); y\} = \int_0^\infty x^{\gamma_2} e^{-(xy)^{\gamma_1}} {}_1F_1^{\tau, \beta} \left(a; c; -r(xy)^{\gamma_1} \right) f(x) dx,$$

The generalized Fourier' integral transform:

$$F \{f(x; \alpha)\} = \tilde{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{i\alpha x} {}_1F_1^{\tau, \beta} \left(a; c; -r(\alpha x) \right) dx,$$

where $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0, (\tau, \beta) \subset R, \tau - \beta < 1, r > 0, {}_1F_1^{\tau, \beta}(\dots)$ is (τ, β) -confluent hypergeometric function of form (1).

The generalized Mellin' integral transform:

$$\tilde{M} \{f(x); s\} = \int_0^\infty x^{s-1} {}_1F_1^{\tau, \beta} \left(a; c; -rx \right) f(x) dx,$$

where $s = d + i\alpha$.

The generalized Glasser integral transforms:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{m,1} \{f(x); y\} &= \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{f(x)}{(x^m + y^m)^{1/m}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a; \tau); \left(\frac{1}{m}; \gamma \right) \\ (c; \beta); \end{matrix} \right] -r \left(\frac{x^m}{x^m + y^m} \right)^\gamma dx, \\ \tilde{G}_{m,2} \{f(x); y\} &= \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{f(x)}{(x^m + y^m)^{1/m}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a; \tau); \left(\frac{1}{m}; \gamma \right) \\ (c; \beta); \end{matrix} \right] -r \left(\frac{y^m}{x^m + y^m} \right)^\gamma dx. \end{aligned}$$

1. *Erdelyi et al.* Higher Transcendental Function, New York: Mc. Crow-Hill, 1953, v.1, 402 p.
2. *Sneddon I.N.* Fourier Transforms, New York: McGraw-Hill, 1951, 650 p.
3. *Virchenko N.O.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application//J.Frac. Calculus and Appl. Anal. – 2006. – 9, №2. – P. 101-108.

A. Chugay, A. Pankratov, T. Romanova

(Institute for Mechanical Engineering Problems,
National Academy of Sciences of Ukraine)

OPTIMIZED OBJECT PACKINGS USING QUASI-PHI-FUNCTIONS

Optimal packing problem is a part of operational research and computational geometry. It has multiple applications in modern biology, mineralogy, medicine, materials science, nanotechnology, robotics, coding, pattern recognition systems, control systems, space apparatus control systems, as well as in the chemical industry, power engineering, mechanical engineering, shipbuilding, aircraft construction, civil engineering, logistics etc. At present, the interest in finding effective solutions for packing problems is growing rapidly. This is due to a large and growing number of applications and an extreme complexity of methods used to handle many of them.

These problems are NP-hard, and, as a result, solution methodologies generally employ heuristics, e.g., [2,5]. Some researchers develop approaches based on mathematical modeling and general optimization procedures, e.g., [1,4].

Our approach is based on mathematical modeling of relations between geometric objects and thus reducing the Optimal Packing Problem to a nonlinear programming problem. We use the phi-function technique [3,8] for an analytic description of relations of objects to be packed in a container taking into account their continuous rotations, translations and distance constraints.

In this paper we further develop the concept of phi-functions, introducing a new class of functions, called quasi-phi-functions [6]. The functions can be described by analytical formulas that are substantially simpler than those used for phi-functions, for pairs of some types of 2D- and 3D-objects (convex polygons, circles, circular segments, cuboids, spheres, cylinders, disks and convex polytopes). They also are simple enough for some types of rotating objects for which phi-functions could not been constructed. In particular, we find convenient quasi-phi-functions for ellipses, and for certain 3D-objects including, so-called, spherocylinders, spherocones. The use of quasi-phi-functions allows us to handle new types of objects, but there is a price to pay: now the optimization has to be performed over a larger set of parameters, including the extra variables used by quasi-functions. To demonstrate high efficiency of our quasi-phi-functions we consider two practical problems of packing a collection of ellipses into a rectangular container of minimal area as well as packing a collection of given 3D-objects (cuboids, spheres, spherocylinders, spherocones) into a cuboid container of minimal height.

We derive here quasi-phi-functions to describe non-overlapping and containment constraints for appropriate pairs of rotating objects and develop effi-

cient optimization algorithms. We propose also fast algorithms to construct feasible starting points based on object homothetic transformations, as well as efficient optimization procedures to search for local extrema in optimal packing problems based on [6]. We apply our quasi-phi-functions and the algorithms to 2D- and 3D-packing problems and demonstrate the high efficiency of our methodology. Figure 1 illustrates: local optimal packing of ellipses into a rectangular container of minimal area (Fig.1 a) and local optimal packing of 3D-objects into a cuboid of minimal height (Fig.1 b).

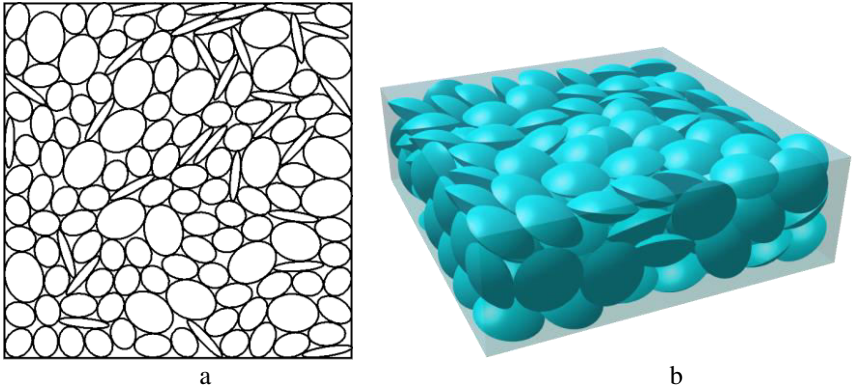


Fig.1. Local optimal packings:
a) ellipses; b) 3D objects

1. *Birgin E.* Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container A nonlinear approach / Birgin E., Martínez J., Ronconi D. // *Eur. J. of Oper. Res.* – 2005. – № 160 (1). – P. 19–33.
2. *Burke E.* Irregular packing using the line and arc no-fit polygon / Burke E., Hellier R., Kendall G., Whitwell G. // *Oper. Res.* – 2010. – №58(4). – P. 948–970.
3. *Chernov N.* Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. // *Comput. Geom. Theory and Appl.* – 2010. – № 43(5). – P. 535–553.
4. *Fasano G.A.* Global Optimization point of view for non-standard packing problems / Fasano G. A. // *J. Glob. Optim.* – 2013. – № 55(2). – P. 279–299.
5. *Sriramya P.* A State-of-the -Art Review of Bin Packing Techniques / Sriramya P., Varthini P.B. // *Eur. J. Scien. Res.* – 2012. – № 86(3). – P. 360–364.
6. *Stoyan Y.* Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses / Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. *J. of Glob. Optim.* DOI 10.1007/s10898-015-0331-2

Ibraim Didmanidze, Gregory Kakhiani

(Batumi Shota Rustaveli State University)

OPTIMIZATION TRAINING ARTIFICIAL NEURAL NETWORK FOR SOME SOLUTIONS

Training effectiveness of the Multi layer neuron networks depends on the quantity of neuron layers within the network, quantity of neurons in the hidden layer and initialization of synaptic connections' weight coefficients.

Neuron network's architecture has a great significance for the effectiveness of training. The dimension of the input and output layers depends on the problem for solution and the structure of the data collection. As we mentioned earlier, three layer neuron network can approximate any function with the preliminary exactness. Besides, the exactness of the approximation depends on the quantity of the neurons in the hidden layer.

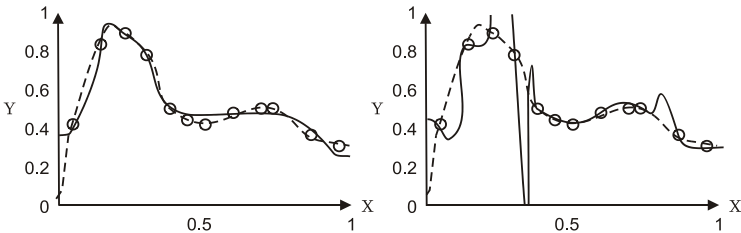


Figure 1. – Training if the neuron network: a) the network has 5 hidden neurons; b) the network has 20 hidden neurons.

The more neurons there are in the hidden layer, greater the exactness. However, the case of larger quantity of neurons in the hidden layer can cause a phenomenon, which is termed as “overtraining”. Figure 1 is given here to illustrate examples of neuron network training with the purpose to approximate the function. Figure 1 a) characterizes the network in the hidden layer 5 and the Figure 1 b) characterizes it in the hidden layer with 20 neuron elements. Meanwhile, the data collections used in the training are homogeneous. The neuron network with 20 hidden neurons approximates the function well only on the data collection for the training, which reflects that extensive quantity of neurons in the hidden layer worsens generalizing qualities of the neuron network. Hence, the quantity of the neurons in the hidden layer should be less than the quantity in the data collection for the training. On the other hand, lesser quantity of the neurons in the hidden layer can cause undesirable local minimum or procrastinate the training process. This calls for compromising.

In order to reach exactness and generalization, we can apply a neuron network with two hidden layers. However, we have to have in mind to allow more time to the training of such network.

As mentioned earlier, one of the shortcomings of the gradient descending method was that is used to “stuck” in the local minimums. To neutralize/eliminate this shortcoming, the so called “heavy ball” method [1], [2]. In this case, modification of the weight coefficients in the synaptic networks can be made in line with the following equality:

$$\Delta w_{ij}(t+1) = -\alpha \gamma_j F'(S_j) y_i + \gamma \Delta w_{ij}(t)$$

where γ – is a constant, referred to as momentum parameter.

The value of momentum parameter can be measured from the [0,1] range [1]. Introduction of the given parameter enables us to escape from the small local minimums.

The following conclusions are based on this basis:

1. A neuron network which has one hidden layer can reflect any input signals on any output signals.

2. Quantity of the neurons in the middle (hidden) layer should be less than in the data collection for the training.

3. Capacity of the neuron network can be increased either by means of quantity increase of neurons in the hidden layer, or by means of increased quantity of the hidden layers. In case the neuron network is effected by the #2 point and it cannot solve the problem, then hidden layers should be increased within the neuron network.

4. Random initialization of the synaptic connections' weight coefficients should be made within a narrow range.

In order to increase the adapt α rapidity of the training, the algorithm [1] of the rapidest downstream. This algorithm stipulates that at each iteration of the neuron network training for each layer we have to select specific training rapidity, which will allow minimization of the average square curve.

$$\alpha(t) = \min E(y_j(t+1),$$

in which $j = \overline{1, m}$, m is a quantity of the neurons in the last layer of the network.

The given equation cannot be solved with the analytic methods to apply to $\alpha(t)$. However it is related with the large volume calculations [1]. Therefore, we can suggest approximating method for finding $\alpha(t)$ which depends on the expansion of activation function of the neuron elements in the Taylor line.

1. Головки В.А. Нейронные сети: обучение, организация и применение / В.А. Головки. Кн.4 – М. : ИПРЖР, 2001. – 256 с.
2. Дидманидзе И. Искусственная нейронная сеть и управление инвестициями фондового рынка / И. Дидманидзе, Г. Кахиани // Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем. ТАAPSD'2013. Ялта. – 2013. – с. 52-53.

R.G. Drebotiy

(Ivan Franko National University of Lviv)

A POSTERIORI ERROR ESTIMATORS FOR HP-ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD

In this work we briefly introduce hp-adaptive algorithm for finite element method for 1D convection-diffusion-advection boundary value problem and present comparison of numerical results, obtained using constructed algorithm in combination with different error estimators. The algorithm is a sequence of iterations, each of which consists of four steps: 1) solving the global system of linear equations; 2) selection of elements for refinement; 3) selection of proper refinement pattern for elements, selected for refinement; 4) global refinement of the mesh. In the paper we provide comparative analysis of numerical results for the second step for different types of error indicators and selection criteria which can be used in this step.

We consider the following boundary value problem for diffusion-advection-reaction equation

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{given diffusion coefficient } \bar{\mu} = \bar{\mu}(x), \text{ convection } \bar{\beta} = \bar{\beta}(x), \\ \text{reaction } \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(x), \text{ sources } \bar{f} = \bar{f}(x) \\ \text{and } \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \bar{g}_0, \bar{g}_L \in \mathbb{R}; \\ \text{find function } u = u(x) \text{ such that} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left(\bar{\mu} \frac{d}{dx} u \right) + \bar{\beta} \frac{d}{dx} u + \bar{\sigma} u = \bar{f} \quad \text{in } G = (0, L), \\ \left(\bar{\mu} \frac{d}{dx} u - \bar{\alpha} u \right) \Big|_{x=0} = \bar{g}_0, \quad \left(-\bar{\mu} \frac{d}{dx} u - \bar{\gamma} u \right) \Big|_{x=L} = \bar{g}_L. \end{array} \right.$$

In order to show specific of the boundary value problem (1) we introduce a scaled variable $t \in [0, 1]$, in such way that $x := Lt$, transforming dependent variables

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu := \bar{\mu} \| \bar{\mu} \|_{\infty, G}^{-1}, \quad \beta := \bar{\beta} \| \bar{\beta} \|_{\infty, G}^{-1}, \quad \sigma := \bar{\sigma} \| \bar{\sigma} \|_{\infty, G}^{-1}, \quad f := L^2 \| \bar{\mu} \|_{\infty, G}^{-1} \bar{f}, \\ \alpha := \bar{\alpha} L \| \bar{\mu} \|_{\infty, G}^{-1}, \quad \gamma := \bar{\gamma} L \| \bar{\mu} \|_{\infty, G}^{-1}, \quad g_0 := L \| \bar{\mu} \|_{\infty, G}^{-1} \bar{g}_0, \quad g_1 := L \| \bar{\mu} \|_{\infty, G}^{-1} \bar{g}_L. \end{array} \right.$$

and after small algebra we rewrite problem (1) in the following form

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{find function } u = u(t) \text{ such that} \\ -(\mu u')' + Pe [\beta u' + Sh \sigma u] = f \quad \text{in } \Omega = (0, 1), \\ (\mu u' - \alpha u)|_{t=0} = g_0, \quad (-\mu u' - \gamma u)|_{t=1} = g_1. \end{array} \right. \quad (2)$$

where $v' := \frac{dv}{dt}$ and dimensionless numbers

$$\text{Pe} := \frac{\|\bar{\beta}\|_{\infty, G} L}{\|\bar{\mu}\|_{\infty, G}}, \quad \text{St} := \frac{\|\bar{\sigma}\|_{\infty, G} L}{\|\bar{\beta}\|_{\infty, G}} \quad (3)$$

are well-known Péclet criteria and Strouhal criteria respectively.

The boundary value problem (2) admits the following variational formulation

$$\begin{cases} \text{find } u \in V := H^1(\Omega) \text{ such that} \\ c_\Omega(u, v) = \langle l_\Omega, v \rangle \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (4)$$

where

$$c_\Omega(u, v) := (\mu u', v') + \text{Pe} \cdot [(\beta u', v) + \text{St} \cdot (\sigma u, v)] + \alpha u v|_{t=0} + \gamma u v|_{t=1} \quad \forall u, v \in V, \quad (5)$$

$$\langle l_\Omega, v \rangle := (f, v) + \alpha g_0 v(0) + \gamma g_1 v(1) \quad \forall v \in V. \quad (6)$$

For variational problem (6) we construct standard Galerkin discretization with piecewise-polynomial basis functions. Polynomial degree on all finite elements is bounded by the same number.

The goal of this work is to construct suitable error estimators for element and refinement selection. We use different ways for obtaining error level on each finite element: explicit estimator – an explicit formula which gives us upper bound of error estimate as one number and implicit estimator which is obtained as function which approximates actual error of finite element discretization. To obtain it we solve auxiliary variational problem.

To select element for refinement we use the following error indicator (extending results from [3]):

$$\eta_K = C[p_K(p_K + 1)]^{-1/2} \left\| \sqrt{\omega_K} R[u_h^K] \right\|_{L^2(K)}, \quad (7)$$

where $p_K = \deg(u_h|_K)$ u_h - current FE approximation, ω_K - quadratic bubble defined on element K , $R[u_h] := f + (\mu u_h')' - \beta \text{Pe } u_h' - \sigma \text{PeSt } u_h$ - equation from (2) residual, C is some known and computable constant.

Described estimator gives us only one number per finite element which we interpret as error level.

To combine h- and p- refinements of elements we need to obtain error estimate for each refinement type. In this work we used element bisection (preserving element degree) and increasing degree by one. For each refinement let us denote corresponding refined element approximation space as V_{hp}^m , $m = 1, 2$.

To obtain error estimates for refinements we solve the next problems for local error:

$$\begin{cases} \text{find } e_h^m \in V_{hp}^m(K) \text{ such that} \\ c_\Omega(e_h^m, v_h) = \int_K R[u_h^k] v_h dx \quad \forall v_h \in V_{hp}^m(K), \end{cases} \quad (8)$$

then error estimates for given two refinements are defined as $r_m = \|e_h^m\|_E$, $m=1,2$.

In addition to error estimator (7), to compute η_K , instead of using explicit formula, we can use implicit indicator in the form of problem (8) but with special assumptions [1]:

- for local error approximation we use 1D space of finite functions;
- those functions are constructed for element $K = [t_{k-1}, t_k]$ in the form:

$$\varphi_K(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) = c_{11}\varphi_{11}(t) + c_{12}\varphi_{12}(t), & \varphi_1(t_{k-1}) = 0, \varphi_1(t_{k-1/2}) = 1, x \in [t_{k-1}, t_{k-1/2}] \\ \varphi_2(t) = c_{21}\varphi_{21}(t) + c_{22}\varphi_{22}(t), & \varphi_2(t_{k-1/2}) = 1, \varphi_2(t_k) = 0, x \in [t_{k-1/2}, t_k] \end{cases}. \quad (9)$$

Where $\{\varphi_{1i}(t)\}, \{\varphi_{2i}(t)\}$ are the sets of fundamental solutions for equation

$$-(\tilde{\mu} u')' + Pe \left[\tilde{\beta} u' + St \tilde{\sigma} u \right] = 0 \quad (10)$$

with constant coefficients (selected as mean values of corresponding functions on corresponding intervals $[t_{k-1}, t_{k-1/2}]$ and $[t_{k-1/2}, t_k]$).

Numerical results.

Let us consider boundary value problem (1) with the following data

$$\mu = 1, \beta = 0, \sigma = 10^5 e^x, f = 10^5, \alpha = \gamma = 10^8, \bar{u}_0 = \bar{u}_L = 0, L = 1.$$

Algorithm parameters are: acceptable relative error TOL = 1%, maximum element degree $p_{\max} = 9$.

Table 1 demonstrates algorithm behavior for when using indicators from (7) and (9).

We can observe from table 1 that indicator based on fundamental solution can be more efficient but its error is not monotonically decreasing as in example with explicit error indicator.

Table 1.

Convergence history for Problem 1 with the “maximum” criteria (7.1): n is an iteration number, N element count, $N_{dof}^{(n)}$ count of degrees of freedom, $\varepsilon_n^\Omega = \eta$ absolute error indicator, $r_n^\Omega = \eta \|u_h\|_E^{-1} \times 100\%$ relative error, $p_n = -(\ln \varepsilon_n^\Omega - \ln \varepsilon_{n-1}^\Omega) \times (\ln N_{dof}^{(n)} - \ln N_{dof}^{(n-1)})^{-1}$ rate of convergence.

Fundamental solution indicator						Explicit indicator					
n	N	$N_{dof}^{(n)}$	ε_n^Ω	r_n^Ω	p_n	n	N	$N_{dof}^{(n)}$	ε_n^Ω	r_n^Ω	p_n
0	7	8	20,58	8,58		0	7	8	2124,36	886,20	
1	7	10	7,51	3,04	4,51	1	7	10	669,04	271,33	5,17
2	9	14	3,00	1,39	2,29	2	9	14	221,91	89,12	3,27
3	10	16	2,92	1,17	1,29	3	11	18	77,71	31,07	4,17
4	12	20	3,42	1,37	-0,71	4	12	21	29,82	11,90	6,21
5	12	21	1,92	0,76	11,84	5	12	23	12,94	5,16	9,17
						6	12	25	6,10	2,68	7,84
						7	12	32	1,77	0,70	5,39
average rate of convergence 2,37						average rate of convergence 5					

1. Сінчук Ю. О. Апостеріорний оцінювач похибки апроксимацій МСЕ для задач конвекції-дифузії / Ю. О. Сінчук, Г. А. Шинкаренко // Вісник Тернопільського держ. техн. ун-ту. 2008. Т. 13, №2. С.169-174.
2. Solin P. Higher-Order Finite Element Methods / P. Solin, K. Segeth, I. Dolezel. – Chapman & Hall, 2003. – 388 p.
3. Dorfler W. Convergence of an adaptive hp finite element strategy in one space dimension. / W. Dorfler, V. Heuveline // Applied Numerical Mathematics.– 2007.– No.57, 1108–1124.
4. Drebotiy R. HP-adaptive finite element method for 1d diffusion-convection-reaction boundary value problems / R.G. Drebotiy, H.A. Shynkarenko // Manufacturing Process. Actual Problems-2014. – Opole: Politechnika Opolska, 2014. – Vol. 1. – P. 11–26.
5. Demkowicz L. Computing with hp-adaptive finite elements. I. One- and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems / L. Demkowicz. – Austin, 2005. – 418 p
6. Solin P. Static Condensation, Partial Orthogonalization of Basis Functions, and ILU Preconditioning in the hp-FEM / P. Solin, T. Vejchodsky // The University of Texas at El Paso, Department of Mathematical Sciences Research Reports Series, Research Report.–2007.– No.4.

УДК 17.958:519.65

I. Dyyak, I. Makar*, Ihor Prokopyshyn**, M. Shahin***, Yu. Yashchuk**

(* Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine,

** Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of
National Academy of Sciences of Ukraine,

*** Delaware State University, USA)

ADAPTIVE HETEROGENEOUS NUMERICAL SCHEMES VIA DOMAIN DECOMPOSITION METHODS

The application of domain decomposition method (DDM) is an effective approach to solving different problems of mathematical physics. We propose h-adaptive heterogeneous schemes of finite element method (FEM) and direct boundary element method (DBEM) for the elasto-plastic problem and contact problems on the base of DDM [1–3].

The nonlinear material behavior has been modeled using von Mises flow theory of plasticity. The finite element method and the Newton-Raphson procedure have been used to solve nonlinear problem. Symmetric Galerkin boundary element method has been utilized in linear elastic subdomains. Coupling of both methods has been performed by iterative schemes of the domain decomposition method. The variational formulation of heterogeneous numerical model has been implemented and its correctness has been proved. Iterative algorithms of the domain decomposition method for elastic-plastic problems were constructed and their convergence has been investigated. Numerical aspects of effective implementation of the symmetric Galerkin boundary element method have been considered. Numerical experiments that have been carried out in present investigation demonstrate the operability and the effectiveness of proposed approach for solving elastic-plastic problems.

We have proposed on continuous level a class of parallel DDM to solve unilateral multibody contact problems of elasticity. They are based on the penalty method for variational inequalities and iterative methods for nonlinear variational equations. We have shown the existence and uniqueness of a solution of the penalty variational equation and have established the convergence conditions of DDM and the penalty method [4].

Significantly reduce computational costs for solving these problems also allow adaptive modifications of FEM, in particular h-adaptive schemes in which we refined of solution grid only in the areas with greater error of solution. The thesis is concerned with the development and efficiency investigations of error estimation methodology in finite element method for elasticity problems, based on comparison of finite and boundary element methods results. We proved that under certain conditions the difference of stresses obtained with finite and boundary element methods estimates the real error of finite element stresses. We constructed an h-adaptive scheme using

this estimation. The scheme does not sustain the conformity of finite element mesh. For solving problems with nonconforming meshes we use the mortar finite element method. Therefore the continuity of the displacements is not preserved and weak continuity is imposed using the Lagrange multipliers. As a part of the h-adaptive scheme we present the methodology of construction of boundary element mesh as a trace of finite element one. The possibility of application of these methodologies is proved with corresponding lemmas and theorems.

A couple of numerical experiments approve the correctness of the estimator. The implementation of this approach in elastic body contact problems is presented. We developed a combined iterative adaptive algorithm for solving this problem. The problem is transformed into an iterative process using DDM. The nonpenetration condition is applied with penalty method. Each iteration is accompanied with one step of adaptation of finite element mesh according to the h-adaptive scheme we presented. The numerical experiments show that this modification greatly decreases the complexity of the discretized problem. The adapted mesh explicitly reveals the singularity near the contact area (Fig.1).

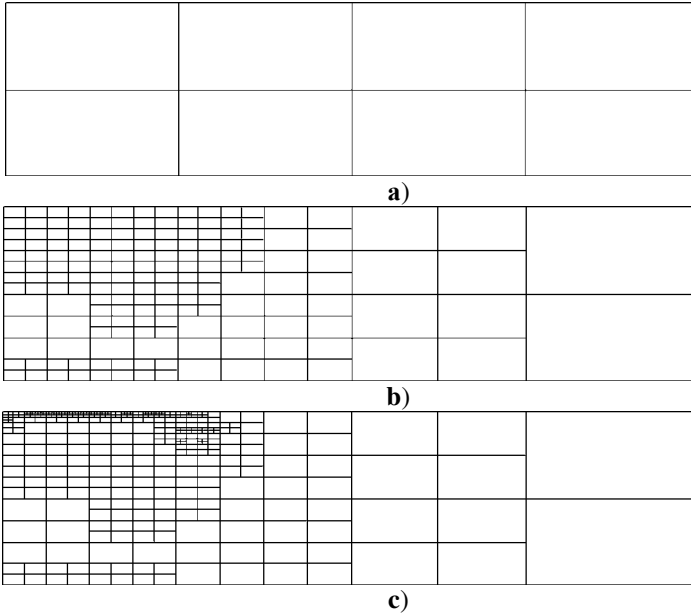


Fig. 1. **a)** – initial mesh; **b)** – the mesh on the third iteration; **c)** – adaptive mesh.

The new h-adaptive scheme allows saving computing resources while solving elasticity problems, reveals singularities in solutions, is suitable for parallel computations and can be adapted to other types of problems of mathematical physics.

1. *Grigorenko A.Ya., Dyyak I.I., Matysyak S.I., Prokopyshyn I.I.* Domain decomposition methods applied to solve frictionless-contact problems for multilayer elastic bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – 46, No. 4. – P. 388–399.
2. *Dyyak I.I., Prokopyshyn I.I.* Convergence of the Neumann parallel scheme of the domain decomposition method for problems of frictionless contact between several elastic bodies // *J. Math. Sci.* – 2010. – 171, No. 4. – P. 516–533.
3. *Prokopyshyn I.I., Dyyak I.I., Martynyak R.M.* Numerical analysis of the problems of contact of three elastic bodies by the domain decomposition methods // *Mater. Sci.* – 2013. – 49, No. 1. – P. 45–58.
4. *Prokopyshyn I.I., Dyyak I.I., Martynyak R.M., Prokopyshyn I.A.* Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* – 2013. – 91. – P. 647–654.

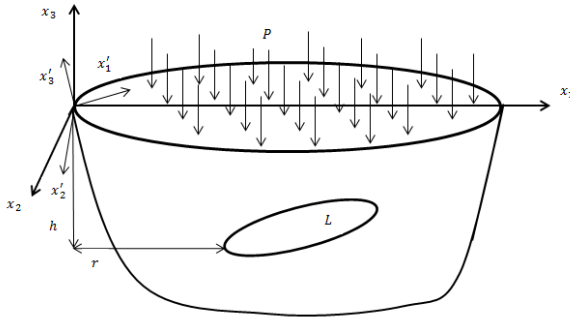
УДК 519.6

M.O. Gnuskina

(O. Honchar Dnipropetrovsk national university)

THREE-DIMENSIONAL DIRECT AND INVERSE PROBLEM OF FINDING THE STRESS STATE

We consider the three-dimensional body with one side limited by surface $x_3 = 0$ (pic.1). To this surface power P is applied parallel to the axis x_3 . There is an area L inside the body. This area represents the crack, which is located inside a metal body.



Pic1. Investigated body

The problem lies in finding the distribution of forces $P(x_1, x_2)$, which would ensure the fulfillment of certain conditions on area L :

$$\sigma'_{23} = 0, \quad \sigma'_{13} = 0, \quad -p_1 \leq \sigma'_{33} \leq -p_2. \quad (1)$$

These conditions provide diffusion welding of cracks inside the metal body.

This problem belongs to the class of inversed problems. That is why the problem of the distribution of stress tensor components in the area L at a given power distribution $P(x_1, x_2)$ on the body surface $x_3 = 0$ will be investigated at first. This problem is a direct one and is called Bussineska problem.

Because the impact force $P(x_1, x_2)$ in the point is great, we assume that this force is applied to the small circle of r_0 radius with the center at the origin of the coordinate system.

Then in any point K , inside the body, there will be the following components of pressure:

$$\sigma_{11} = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{x_3}{r^3} \left(1 - 2\nu - 3 \frac{x_1^2}{r^2} \right) - (1 - 2\nu) \left(\frac{x_2^2 + x_3^2}{r^3(r + x_3)} - \frac{x_1^2}{r^2(r + x_3)^2} \right) \right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{x_3}{r^3} \left(1 - 2\nu - 3 \frac{x_2^2}{r^2} \right) - (1 - 2\nu) \left(\frac{x_2^2 + x_3^2}{r^3(r + x_3)} - \frac{x_2^2}{r^2(r + x_3)^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= -\frac{3P}{2\pi} * \frac{x_3^3}{r^5} \\ \sigma_{12} &= \frac{P}{2\pi} \left[(1 - 2\nu) \frac{x_1 x_2 (2r + x_3)}{r^3 (r + x_3)^2} - 3 \frac{x_1 x_2 x_3}{r^3} \right] \\ \sigma_{23} &= -\frac{3P}{2\pi} * \frac{x_2 x_3^2}{r^5}, \quad \sigma_{31} = -\frac{3P}{2\pi} * \frac{x_1 x_3^3}{r^5}\end{aligned}$$

where ν is a Lamé parameters.

According to the principle of superposition, the result of the force $P(x_1, x_2)$ on the surface $x_3 = 0$ at the points of area L are the following tensions:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^N (S_k \sigma_{ijk})$$

where N is a total number of action points of function $P(x_1, x_2)$ on the surface of the body, S_k is an area of a circle, to the center of which the force is applied, $i, j = \overline{1, 3}$.

To move to a new coordinate system $x'_1 x'_2 x'_3$ next formulas were used:

$$\begin{aligned}\sigma'_{x'_1 x'_1} &= \sigma_{x_1 x_1} l_1^2 + \sigma_{x_2 x_2} m_1^2 + \sigma_{x_3 x_3} n_1^2 + 2\sigma_{x_1 x_2} l_1 m_1 + 2\sigma_{x_3 x_2} n_1 m_1 \\ &\quad + 2\sigma_{x_1 x_3} l_1 n_1 \\ \sigma'_{x'_2 x'_2} &= \sigma_{x_1 x_1} l_2^2 + \sigma_{x_2 x_2} m_2^2 + \sigma_{x_3 x_3} n_2^2 + 2\sigma_{x_1 x_2} l_2 m_2 + 2\sigma_{x_3 x_2} n_2 m_2 \\ &\quad + 2\sigma_{x_1 x_3} l_2 n_2 \\ \sigma'_{x'_3 x'_3} &= \sigma_{x_1 x_1} l_3^2 + \sigma_{x_2 x_2} m_3^2 + \sigma_{x_3 x_3} n_3^2 + 2\sigma_{x_1 x_2} l_3 m_3 + 2\sigma_{x_3 x_2} n_3 m_3 \\ &\quad + 2\sigma_{x_1 x_3} l_3 n_3 \\ \sigma'_{x'_1 x'_2} &= \sigma_{x_1 x_1} l_1 l_2 + \sigma_{x_2 x_2} m_1 m_2 + \sigma_{x_3 x_3} n_1 n_2 + \sigma_{x_1 x_2} (l_1 m_2 + l_2 m_1) \\ &\quad + \sigma_{x_3 x_2} (n_1 m_2 + n_2 m_1) + \sigma_{x_1 x_3} (l_1 n_2 + l_2 n_1) \\ \sigma'_{x'_1 x'_3} &= \sigma_{x_1 x_1} l_1 l_3 + \sigma_{x_2 x_2} m_1 m_3 + \sigma_{x_3 x_3} n_1 n_3 + \sigma_{x_1 x_2} (l_3 m_1 + l_1 m_3) \\ &\quad + \sigma_{x_3 x_2} (n_1 m_3 + n_3 m_1) + \sigma_{x_1 x_3} (l_1 n_3 + l_3 n_1) \\ \sigma'_{x'_2 x'_3} &= \sigma_{x_1 x_1} l_3 l_2 + \sigma_{x_2 x_2} m_3 m_2 + \sigma_{x_3 x_3} n_3 n_2 + \sigma_{x_1 x_2} (l_2 m_3 + l_3 m_2) \\ &\quad + \sigma_{x_3 x_2} (n_3 m_2 + n_2 m_3) + \sigma_{x_1 x_3} (l_3 n_2 + l_2 n_3)\end{aligned}$$

where l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$) are the cosines of angles, defined by the following matrix:

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$$

The inversed problem, the essence of which is to find external stresses under given conditions (1), is formed as a variation problem:

$$J(P) = a_1 \int_L \sigma'_{13}{}^2 dL + a_2 \int_L \sigma'_{23}{}^2 dL + b_1 \int_L \{\max[0, -p_1 - \sigma'_{33}]\}^2 dL \\ + b_2 \int_L \{\max[0, p_2 + \sigma'_{33}]\}^2 dL, \quad J(P) \rightarrow \min$$

This variation problem is incorrect according to the 3 Hadamard condition, i.e. the condition of continuous dependence of the solution of the problem on the initial conditions. That is why the stabilizer is introduced:

$$\Omega(P) = \alpha \int_0^{2a_1} \int_0^{2b_1} (P^2 + \text{grad}P \text{grad}P) dx_1 dx_2$$

Then the variation problem takes the following form:

$$J(P) = a_1 \int_L \sigma'_{13}{}^2 dL + a_2 \int_L \sigma'_{23}{}^2 dL + b_1 \int_L \{\max[0, -p_1 - \sigma'_{33}]\}^2 dL \\ + b_2 \int_L \{\max[0, p_2 + \sigma'_{33}]\}^2 dL \\ + \alpha \int_0^{2a_1} \int_0^{2b_1} (P^2 + \text{grad}P \text{grad}P) dx_1 dx_2, \\ J(P) \rightarrow \min \quad (2)$$

Finding the stress distribution $P(x_1, x_2)$ on the surface of the body is reduced to discretisation of the variation problem (2) and finding the solution of the problem of conditional optimization. In this problem the method of local variations is used.

The method of local variations is based on the use of a small number h , (which is called the pitch variation) for constructing approximations. Suppose the n -th approximation and the first component of the $(n + 1)$ the approximation, i.e. $P_0^{n+1}, \dots, P_{i-1}^{n+1}, 1 \leq i \leq N$ are known. The value of P_i^{n+1} will be chosen from one of the three values: $P_i^n, P_i^n + h, P_i^n - h$. On each iteration of the method at each point the following values are found:

$$\Phi_i = J_{i-1}(P_{i-1}^{n+1}, P_i^n) + J_i(P_i^n, P_{i+1}^n), \\ \Phi_i^+ = J_{i-1}(P_{i-1}^{n+1}, P_i^n + h) + J_i(P_i^n + h, P_{i+1}^n), \\ \Phi_i^- = J_{i-1}(P_{i-1}^{n+1}, P_i^n - h) + J_i(P_i^n - h, P_{i+1}^n).$$

If the value $P_i^n + h$ (or $P_i^n - h$) < 0 , then it is unnecessary to find values of Φ_i^+ (or Φ_i^-). The following value of P_i^{n+1} is found in the following way:

$$P_i^{n+1} = \begin{cases} P_i^n & \text{при } \Phi_i \leq \Phi_i^+, \Phi_i \leq \Phi_i^-, \\ P_i^n + h & \text{при } \Phi_i^+ < \Phi_i, \Phi_i^+ \leq \Phi_i^-, \\ P_i^n - h & \text{при } \Phi_i^- < \Phi_i, \Phi_i^- < \Phi_i^+. \end{cases}$$

When, on some iteration, we get $q_i^{n+1} = q_i^n, i = \overline{0, N}$, then the desired approximated solution is reached.

1. Демидов С.П. Теория упругости. М: Высшая школа, 1979. – 432с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. – 872с.
3. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 364с.

V. M. Patsuk

(Institute for Mechanical Engineering Problems, National Ukrainian Academy of Sciences, Dm. Pozharsky str., 2/10, Kharkiv, Ukraine, patsuk@ipmach.kharkov.ua)

A METHOD OF COVERING A REGION FORMED BY A CONTOUR CONTAINING LINEAR SEGMENTS AND CIRCULAR ARCS BY ELEMENTARY REGIONS

Let us have a region S with a contour formed by linear segments and circular arcs. The choice of such class is motivated by the following reasons.

A contour may be obtained by some digitizing procedure. There exist methods of approximating such contour so that parts of the resulting contour are either linear segments or circular arcs.

We want to represent our region as a union of elementary regions from the set described below.

This set includes convex polygons, discs of some radius $r > 0$ (fig. 1), circular segments spanned by angles less than π (fig. 2), caps formed by a concave circular arc segment and the tangent line at its ends (fig. 3) and horns formed by two circular arc segments having a common end with coinciding tangent lines in it and a tangent segment at the other end of the circular arc with the smaller radius (fig. 4).

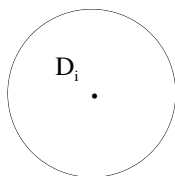


Fig. 1. A disc.

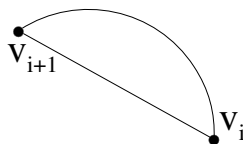


Fig. 2. A circular segment.

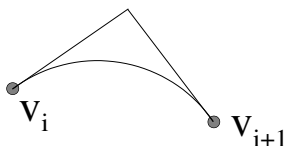


Fig. 3. A cap.

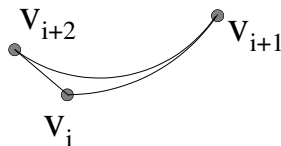


Fig. 4. A horn.

The choice of such set of elementary objects is motivated by the following reasons.

There is a large amount of packing, cutting, covering and other geometrical optimization problems having many applications in industry, ecology, transport and other fields. The method of Φ -functions [2] is widely used for their solution. Exact expressions are found for the considered class of elementary objects [3] and shown good computational results in implementation. Representing S as a union of elementary objects allows applying all the store of the elaborated methods including the use Φ -functions [1] for modeling the arising problems as linear or non-linear optimization problems and using BPMPD method [1] and the IPOpt interior point optimization algorithms for their solution.

We apply the following method for representing S as a union of elementary objects.

1. Single out whole discs D_i from S if $\text{int } D_i \cap (R^2 \setminus S) = \emptyset$.
2. Single out circular segments from S if their interior has no intersection with the other contour elements. If they has one, break up the corresponding convex circular arc at a specially selected point.
3. In the same manner single out circular caps for concave arcs.
4. In the same manner single out horns.
5. Break up the remaining in general case non-convex polygonal region into convex polygons.

Thus we obtain $S = \cup S_i$, and use S_i , $i = 1, \dots, n$, in formulating optimization problem statement for an appropriate cutting, packing, covering or another problem.

1. Cs. Mészáros, The BPMPD interior point solver for convex quadratic problems, WP 98-8, // Computer and Automation Research Institute, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1998.
2. Yu. G. Stoyan, Φ -function and its basic properties// Доп. НАН України. – 2001. – № 8. -С. 112-117.
3. Yu. Stoyan, A. Pankratov, T. Romanova, and N. Chernov Complete class of Phi-functions for basic planar phi-objects // Doklady Akademii Nauk Ukrainy, 11 (2010), 25-30. (in Russian)

CROSS-LANGUAGE SENTIMENT ANALYSIS ALGORITHM

In our time sentiment analysis is actively developing field of natural language processing. There are many possible applications of its algorithms: from people's opinions analysis to stock market prediction based on twitter mood.

Our work is focused on obtaining continuous rating of reviews. In our problem statement we have learning set of reviews, which are divided in three categories: positive, negative and neutral and our algorithm obtain continuous rating in some scale of the review based on this learning set.

Our algorithm is cross-language and it is one of the most important things about it as we do not use any specific sentimental or syntactical tools.

First problem we need to solve is feature detection. We use n-grams for this purpose. They do not necessarily match discourse structures, but they may reflect some ones. It's easy to collect them from the text and we don't need any other language-specific tools for it.

During our research we have found that the best n-grams to use are unigrams, bigrams and trigrams together. N-grams of larger size do not improve the performance of algorithm and increase its complexity. Even trigrams do not give significant improvement, but we are you using them because of our plans to find discourse structures based on learning set.

Second problem is noise reduction. Using n-grams leads to a significant increase of features number. Many of them has no impact to sentiment detection. Our method is based on function which takes smaller values if the feature is more important. The second method that we use removes all features that rarely appear in learning set. With our approach we were able to filter our feature vocabulary and leave only important features in it.

To estimate review's rating we decided to use vocabularies from classifier for three categories (positive, negative and neutral) to classify reviews on a ten point scale. This classifier generates normalized value that the review is in category. My idea is that the closer review is to the category "positive", the higher should be its rating and vice versa, the closer review is to the category "negative", the lower rating should have the review. In such case there are some questions about category "neutral". First of all, it should be noted that this category is the most subjective and emotionally uncertain. Sentiments in this category are significantly different from quite positive reviews (e.g., badly received movies that weren't so bad for user) and rather negative ones (when movie falls short high expectations). But an extra category provides better

performance of the vocabulary generation and so it improves the final algorithm.

Summarizing all our work, we can say that we have achieved our goal of developing cross-language sentiment analysis algorithm. Our algorithm showed acceptable results and it proved that it is possible to evaluate continuous rating based on binary learning set.

1. *Johan Bollen*. Twitter mood predicts the stock market / Johan Bollen, Huina Mao, Xiao-Jun Zeng // Journal of Computational Science. - 2011. - №1. - pp. 1-8.
2. *Kevin Duh*. Is machine translation ripe for cross-lingual sentiment classification / Kevin Duh, Akionori Fujino, Masaaki Nagata // Proceedings of the 49th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics(ACL). - Stroudsburg: Association for Computational Linguistics, 2011. - pp. 429 - 433.
3. *Andrew Goldberg*. Seeing stars when there aren't many stars: graph-based semi-supervised learning for sentiment categorization / Andrew Goldberg, Zhaoyin Zhu // Proceedings of the First Workshop on Graph Based Methods for Natural Language Processing. - Stroudsburg: Association for Computational Linguistics, 2006. - pp.45-52.
4. *Bing Liu*. Sentiment Analysis and Opinion Mining. / Bing Liu. – Morgan & Claypool Publishers, 2012. - 165 p. - ISBN 9781608458844.
5. *Arjun Mukherjee*. Aspect Extraction through Semi-Supervised Modeling / Arjun Mukherjee, Bing Liu // Proceedings of the 50th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL). - Stroudsburg: Association for Computational Linguistics, 2012. - pp. 339-348.
6. *Bo Pang*. Opinion Mining and Sentiment Analysis. / Bo Pang, Lilian Lee // Foundations and Trends in Information Retrieval. – Hanover: Now Publishers Inc, 2008. – № 1-2. – pp. 1-135.
7. *Bo Pang*. Seeing stars: Exploiting class relationships for sentiment categorization with respect to rating scales / Bo Pang, Lilian Lee // Proceedings of the 43rd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL). – 2005. – pp. 115-124.
8. *Peter Turney*. Thumbs Up or Thumbs Down? Semantic Orientation Applied to Unsupervised Classification of Reviews / Peter Turney // Proceedings of the 40th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL). – Stroudsburg: Association for Computational Linguistics, 2002. - pp.417-424.
9. *Xiaojun Wan*. Co-training for cross-lingual sentiment classification / Xiaojun Wan // Proceedings of the 47th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics(ACL). – Stroudsburg: Association for Computational Linguistics, 2009. – pp. 235-243
10. *Xiaojun Wan*. Using bilingual knowledge and ensemble techniques for unsupervised Chinese sentiment analysis / Xiaojun Wan // Proceedings of Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing. – Stroudsburg: Association for Computational Linguistics, 2008. - pp. 553-661

NUMERICAL SCHEME FOR LORD-SHULMAN THERMOPIEZOELECTRICITY PROBLEM

Nowadays piezoelectric and pyroelectric materials are widely utilized in various modern devices such as sensors, actuators, transducers, etc. The classic linear mathematical model of the thermopiezoelectricity (see [1-2]), which is often used as a base of computer modeling of pyroelectric behavior, has some drawbacks. For example, in this theory it is assumed, that thermal signals are propagated with infinite speed in piezoelectric medium. That assumption is not quite correct and many researchers experienced difficulties, especially when modeling heat propagation in the case of direct pyroeffect phenomenon. To overcome this problem, various modifications of the classic thermopiezoelectricity model were proposed [3]: Lord-Shulman, Green-Lindsay, Chandrasekharaiah-Tzou, Hetnarski-Ignaczak, etc.

In this research we use Lord-Shulman theory of thermopiezoelectricity. It is assumed that the behavior of piezoelectric can be described in terms of elastic displacement vector $\mathbf{u} = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^d$, $d = 1, 2, 3$, electric potential $p = p(x, t)$, temperature increment $\theta = \theta(x, t)$ and heat flux vector $\mathbf{q} = \{q_i(x, t)\}_{i=0}^d$. The governing equations of thermopiezoelectricity include, apart from equations of motion, electrodynamics and heat conduction (see [1]), the modified Fourier law for heat flux (also known as Maxwell-Cattaneo equation):

$$\tau q'_i + q_i = -\lambda_{ij} \theta_{,j}. \quad (1)$$

Here the parameter τ is material-dependent coefficient and is often called “relaxation time”, λ_{ij} is a tensor of heat conductivity coefficients.

The spaces of admissible elastic displacement vectors, electric potentials, temperature increments and heat flux vectors are introduced:

$$\begin{aligned} V &= \left\{ v \in [H^1(\Omega)]^d \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_u \right\}, \\ X &= \left\{ \xi \in H^1(\Omega) \mid \xi = 0 \text{ on } \Gamma_p, \xi = \text{const on } \Gamma_e \right\}, \\ Y &= \left\{ \eta \in H^1(\Omega) \mid \eta = 0 \text{ on } \Gamma_\theta \right\}, \\ Z &= \left\{ \zeta \in [L^2(\Omega)]^d \mid \zeta = \text{const on } \Gamma_q \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Also the following notations are used:

$$\Phi = V \times X \times Y \times Z, \Phi_1 = V \times X \times Y, G = L^2(\Omega), H = G^d. \quad (3)$$

Here symbol $H^m(\Omega)$ is a notation for standard Sobolev spaces. After applying virtual work principle to the equations of the initial boundary value Lord-

Shulman problem of thermopiezoelectricity the following variational problem is obtained:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{given } \psi_0 = (u_0, p_0, \theta_0, q_0) \in \Phi, v_0 \in H \text{ and } (l, r, \mu) \in L^2(0, T; \Phi'); \\ \text{find } \psi = (u, p, \theta, q) \in L^2(0, T; \Phi) \text{ such that} \\ m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) - e(p(t), v) - \gamma(\theta(t), v) = \langle l(t), v \rangle, \\ \chi(p'(t), \xi) + e(\xi, u'(t)) + z(p(t), \xi) + \pi(\theta'(t), \xi) = \langle r(t), \xi \rangle, \\ s(\theta'(t), \eta) + \pi(\eta, p'(t)) + \gamma(\eta, u'(t)) - g(q(t), \eta) = \langle \mu(t), \eta \rangle, \\ \tau b(q'(t), \zeta) + b(q(t), \zeta) + g(\zeta, \theta(t)) = 0 \quad \forall t \in (0, T], \\ m(u'(0) - v_0, v) = 0, \quad c(u(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V, \\ \chi(p(0) - p_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in X, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in Y, \\ b(q(0) - q_0, \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in Z. \end{array} \right. \quad (4)$$

By means of Galekin semidiscretization by spatial variable and discretization in time, the following one-step recurrent scheme is constructed:

$$\text{given } \Delta t > 0, \gamma, \beta \in [0, 1], \mathbf{U}^j, \mathbf{V}^j \in R^N, \mathbf{P}^j, \boldsymbol{\theta}^j, \mathbf{Q}^j \in R^K.$$

$$\text{Find } \ddot{\mathbf{U}}^{j+1/2}, \dot{\mathbf{P}}^{j+1/2}, \dot{\boldsymbol{\theta}}^{j+1/2}, \dot{\mathbf{Q}}^{j+1/2} \text{ such that}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \Delta t \gamma \mathbf{A} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta \mathbf{C} & -\Delta t \gamma \mathbf{E}^T & -\Delta t \gamma \mathbf{Y}^T & 0 \\ \Delta t \gamma \mathbf{E} & \mathbf{X} + \Delta t \gamma \mathbf{Z} & \boldsymbol{\Pi}^T & 0 \\ \Delta t \gamma \mathbf{Y} & \boldsymbol{\Pi} & \mathbf{S} & -\Delta t \gamma \mathbf{G}^T \\ 0 & 0 & -\Delta t \gamma \mathbf{G} & \tau \mathbf{B} + \Delta t \gamma \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}^{j+1/2} \\ \dot{\mathbf{P}}^{j+1/2} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^{j+1/2} \\ \dot{\mathbf{Q}}^{j+1/2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{j+1/2} - \{\mathbf{A} + \Delta t \gamma \mathbf{C}\} \mathbf{V}^j - \mathbf{C} \mathbf{U}^j + \mathbf{E}^T \mathbf{P}^j + \mathbf{Y}^T \boldsymbol{\theta}^j \\ \mathbf{R}_{j+1/2} - \mathbf{E} \mathbf{V}^j - \mathbf{Z} \mathbf{P}^j \\ \mathbf{F}_{j+1/2} + \mathbf{G} \mathbf{Q}^j - \mathbf{Y} \mathbf{V}^j \\ -\mathbf{G} \boldsymbol{\theta}^j - \mathbf{B} \mathbf{Q}^j \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{U}^{j+1} = \mathbf{U}^j + \Delta t \mathbf{V}^j + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}^{j+1/2}, \quad \mathbf{V}^{j+1} = \mathbf{V}^j + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^{j+1/2},$$

$$\mathbf{P}^{j+1} = \mathbf{P}^j + \Delta t \dot{\mathbf{P}}^{j+1/2}, \quad \boldsymbol{\theta}^{j+1} = \boldsymbol{\theta}^j + \Delta t \dot{\boldsymbol{\theta}}^{j+1/2}, \quad \mathbf{Q}^{j+1} = \mathbf{Q}^j + \Delta t \dot{\mathbf{Q}}^{j+1/2}, \quad j = 0, \dots, N.$$

Here $\mathbf{U}^j, \mathbf{V}^j, \mathbf{P}^j, \boldsymbol{\theta}^j, \mathbf{Q}^j$ are the nodal values of elastic displacement, its velocity, electric potential, temperature increment and heat flux respectively at the time moment $t_j = j\Delta t$. $\ddot{\mathbf{U}}^{j+1/2}, \dot{\mathbf{P}}^{j+1/2}, \dot{\boldsymbol{\theta}}^{j+1/2}, \dot{\mathbf{Q}}^{j+1/2}$ are the nodal values of elastic displacement acceleration and velocities of electric potential, temperature increment and heat flux on the time interval $[t_j, t_{j+1}]$.

We reproduced the experiment described by Sumi and Ashida in [4]. A piezoelectric bar with length $L=10^{-8}\text{m}$ made of PZT-4 ceramics is considered. The boundary conditions for temperature increment θ are as follows:

$$\theta(0,t) = \theta_c \begin{cases} \frac{t}{t_p}, 0 \leq t \leq t_p \\ 1, t_p \leq t \leq T \end{cases}, \theta_c = 293\text{K}, \theta(L,t) = 0, 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

The boundary conditions for mechanical and electric fields are of Neumann type, that is:

$$\begin{aligned} \sigma = \hat{\sigma} = 0 \text{ on } \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_\sigma &= \{x=0\} \cup \{x=L\}, \\ (D' + J) &= 0 \text{ on } \Gamma_d \times [0, T], \Gamma_d = \{x=0\} \cup \{x=L\}. \end{aligned} \quad (7)$$

The total time period is $T=11.2 \times 10^{-12}\text{s}$ and the time period during which the temperature on the left edge of the bar is rising is $t_p = 10^{-12}\text{s}$. The exact value of relaxation time τ is missing in the literature, only the estimations of this parameter are available, so the numerical experiments were done for values of $\tau = 10^{-11}, 10^{-12}$ and 10^{-14} (just like in [4]). For semi-discretization by spatial variable we divide the interval $[0, L]$ into $N=512$ finite elements with piecewise quadratic solution approximations on them. For time discretization we divide uniformly the time interval $[0, T]$ into $N_T=1200$ subintervals. The parameters of the one-step recurrent scheme are taken $\gamma=0.5$ and $\beta=0.6$.

On the Fig. 1 the behavior of temperature increment θ at positions $x=0$, $x=0.1L$ and $x=0.3L$ for the PZT-4 bar for values of relaxation time $\tau = 10^{-11}, 10^{-12}$ and 10^{-14} respectively is depicted. The graphics indicate the significant influence of the relaxation time τ on the behavior of piezoelectric specimen. Sumi and Ashida in [4] use method of characteristics and their results for temperature increment are in accordance with ours, both qualitatively and quantitatively.

Figure 2 shows the time variations of stress σ at position $x=0.3L$ for the PZT-4 bar for values of relaxation time $\tau = 10^{-11}, 10^{-12}$ and 10^{-14} correspondingly. Here we can also see the effect of the relaxation time τ . These results also conform the ones, mentioned in [4].

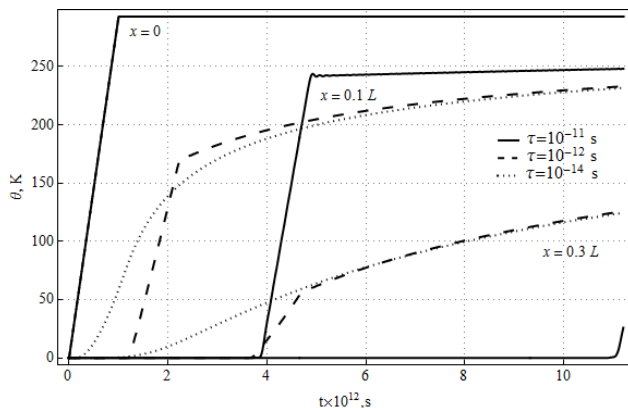


Figure 1. The temperature increment θ behavior depending on τ

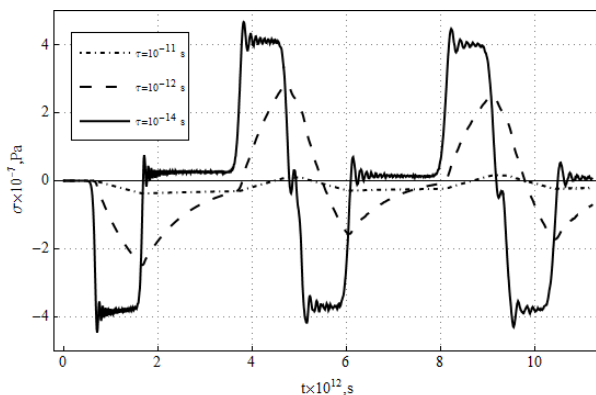


Figure 2. The mechanical stress σ behavior depending on τ

1. *Стельмащук В.* Числове моделювання динамічних задач піроелектрики / В.Стельмащук, Г.Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. –Випуск 22, 2014. –с. 92-107.
2. *Шинкаренко Г.А.* Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пьезоэлектричества. I. Постановка задач и анализ установившихся вынужденных колебаний / Г.А.Шинкаренко // Дифференц. уравнения. – Т.29, №.7, 1993. – С. 1252-1260.
3. *Hetnarski R.B.* Generalized Thermoelasticity / R. B. Hetnarski and J. Ignaczak // Journal of Thermal Stresses. – Vol. 22. – 1999. – pp. 451-476.
4. *Sumi N.* Solution for Thermal and Mechanical Waves in a Piezoelectric Plate by the Method of Characteristics/ N. Sumi and F. Ashida // Journal of Thermal Stresses. – Vol. 26. – 2003. – pp. 1113-1123.

UDC 004.042 + 519.713.2

G. Zholtkevych., V. Dorozhinsky

(V.N. Karazin Kharkiv National University)

A REGULAR COMPLEX EVENT PROCESSING

A present-day development trend of information and communication technology shows a stable increase importance to monitor and analyze continuous information streams. These processes require execution “on-the-fly”. As a result of this they should have the ability to respond in a real time mode. A continuous information stream can be considered as a sequence of elementary events such that each of them carries some information fragment. A finite segment of an event stream is a complex event if this segment has semantic meaning in the context of our interest. There are two main concepts of event processing:

1. Simple Event Processing
2. Complex Event Processing

Complex Event Processing (CEP) is a method of tracking and analyzing streams of data about things that happen (they are called events) and about effects caused by them. The goal of complex event processing is to identify meaningful events (such as opportunities or threats) and respond to them as quickly as possible. In this work Complex Event Processing systems are considered and a mathematical model for them is studied. Samples of such a model are called a CEP-machines.

Definition 1 (CEP-machine) An abstract machine for complex event processing (below CEP-machine) is a quadruple $M = (\Sigma, A, H, \delta)$ where Σ and A are finite alphabets of events and responses respectively, H is a finite set of handlers such that $\forall h \in H, h: \Sigma^+ \xrightarrow{\text{partial}} A$ if its domain $D(h)$ is a prefix-free set (Σ^+ is a semigroup of all non-empty words over an alphabet Σ), and $\delta: A \rightarrow H$ is a total map, which is called a transition map.

The real engineering practice requires methods to provide improving of development processes, in particular, for synthesis of CEP-systems. The key notion for this synthesis problem is the notion of “a CEP-machine behaviour”.

Definition 2 (An initial CEP-machine). A quintuple $M = (\Sigma, A, H, \delta, h_*)$, where $h_* \in H$, is called an initial CEP-machine if the quadruple (Σ, A, H, δ) is a CEP-machine.

Definition 3 (a regular handler). A handler $h: \Sigma^* \xrightarrow{\text{partial}} A$ is called regular if its domain Dh is a regular set.

Example 1. Let us consider a finite automaton $(S, \Sigma, \gamma : S \times \Sigma \rightarrow S)$ and select some initial state s_* and the set of accepting states $S_{acc} \subset S$. Our selection should satisfy the following conditions:

1. $s_* \notin S_{acc}$
2. $(\bigcup_{a \in \Sigma} \gamma(S_{acc}, a)) \cap S_{acc} = \emptyset$
3. each element of S_{acc} is unreachable from $\bigcup_{a \in \Sigma} \gamma(S_{acc}, a)$

Now let us give $\beta : S_{acc} \rightarrow A$ and define $h(u) = \alpha \in A$ if $\gamma^*(s_*, u) \in S_{acc}$ and $\beta(\gamma^*(s_*, u)) = \alpha$.

We claim that h is a handler.

Proof. Truly, let us consider a set of words $L = \{w \mid \gamma^*(s_*, w) \in S_{acc}\}$. One can easily see that the set L is a prefix-free set. Indeed, let some words $u, w = uv \in L$ then word w can be accepted by the automaton only if $v = \varepsilon$. Thus $\forall w \in L, \beta(\gamma^*(s_*, w)) \in A$ and $Dh \subseteq L$. Therefore Dh is a prefix-free set and hence h is a handler. $\square$

Definition 4 (A realization). Let $h : \Sigma^+ \xrightarrow{\text{partial}} A$ be a handler such that exists a finite automaton $(S, \Sigma, \gamma : S \times \Sigma \rightarrow S), s_*, S_{acc}, \beta$ as in Example 1, and the equation $h(\cdot) = \beta(\gamma^*(s_*, \cdot))$ is satisfied then $((S, \Sigma, \gamma), s_*, S_{acc}, \beta)$ is called a realization of h .

The principal result is the following.

Theorem 1. A handler $h : \Sigma^+ \xrightarrow{\text{partial}} A$ is regular if and only if there exists a realization for it.

Proof. First let us show that if handler is regular then there is exist its realization. Indeed, if some handler $h \in H$ is regular then its domain Dh is a regular set. Thus there exists an automaton $(S, \Sigma, \gamma : S \times \Sigma \rightarrow S)$ such that $\forall w \in Dh, \gamma^*(s_*, w) \in S_{acc}$ and one can define mapping $\beta : S_{acc} \rightarrow A$ such that $\beta(\gamma^*(s_*, w)) = h(w) = \alpha \in A$. And thus there exists the realization of the regular handler h such that $((S, \Sigma, \gamma), s_*, S_{acc}, \beta)$. Next let us show that if for some handler h there is exist a realization $((S, \Sigma, \gamma), s_*, S_{acc}, \beta)$ then the handler h is regular. Really, if $\forall w \in Dh$ the equation $\beta(\gamma^*(s_*, w)) = h(w)$ is fulfilled then Dh is a regular set and thus h is a regular handler. $\square$

Definition 5 (A regular CEP-machine). A CEP-machine $(\Sigma, A, H, h_*, \delta)_R$ will be called regular if all its handlers are regular.

Theorem 2 (Regular CEP-machine transformation). A regular CEP-machine $M = (\Sigma, A, H, h_*, \delta)_R$ can be transformed to the finite automaton that is a globalization of its dual pre-automaton $\hat{M} = (X_H, \Sigma, \mu: X_H \times \Sigma^* \xrightarrow{\text{partial}} X_H)$.

In the work a mathematical model of complex event processing was considered. A special class of CEP-machines was introduced that is able to recognize complex events based on regular languages.

1. *Eckert M., Bry F., Brodt, S., Poppe O. and Hausmann S.* A CEP Babelfish: Languages for Complex Event Processing and Querying Surveyed, S.Helmer et al.: Reasoning in Event-Based Distributed Systems, SCI347, pp.47-70. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011
2. *Mikhailova I., Novikov B., Zholtkevych G.* Protoautomata as Models of Systems with Data Accumulation. In ICTERI, volume 1000 of CEUR Workshop Proceedings, page 582-589.CEUR-WS.org, (2013)
3. *Novikov B., Perepelytsya I., Zholtkevych G.* Pre-automata as mathematical models of event flows recognisers. In: V. Ermolayev et al.(eds.) Proc. 7-th Int. Conf. ICTERI 2011, 41-50 (2011)
4. *Perepelytsya, I., Zholtkevych, G.:* On some class of mathematical models for static analysis of critical –mission asynchronous systems. Syst. Ozb. ta viysk. Tehn. Vol. 27,3, 60-63 (2011)
5. *Perepelytsya I., Zholtkevych G:* Hierarchic Decomposition of Pre-machines as Models of Software System Components. Syst. Upravl. Navig. I zviazku. Vol. 20, 4, 233-238 (2011)
6. *Zholtkevych G., Novikov B., Dorozhinsky V.:* Pre-Automata and Complex Event Processing. Springer International Publishing Switzerland V. Ermolayev et al. (Eds.): ICTERI 2014, CCIS 469, pp. 100 - 116, (2014).

УДК 519.6

А.В. Артюх, М.В. Сидоров

(Харківський національний університет радіоелектроніки)

**МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИХ
НЕСТАЦІОНАРНИХ В'ЯЗКИХ ТЕЧІЙ**

Нехай Ω – плоска однозв'язна обмежена область з межею $\partial\Omega$. Нестационарну течію в'язкої нестисливої рідини в області Ω описуватимемо за допомогою функцію течії $\psi = \psi(x, y, t)$, яка пов'язана з вектором швидкості рідини $\vec{v} = (v_x, v_y)$ формулами $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$.

Після виключення з системи рівнянь Нав'є-Стокса тиску (вважаємо, що всі масові сили потенціальні) для функції течії отримаємо нелінійне рівняння:

$$-\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi = J(\Delta\psi, \psi) \text{ в } \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

де ν – кінематична в'язкість, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$,

$$J(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Виходячи з задання $\vec{v}|_{\partial\Omega}$ та $\vec{v}|_{t=0}$, рівняння (1) доповнюється крайовими та початковими умовами вигляду

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s, t), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (3)$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$, $\frac{\partial f_0}{\partial s}$, g_0 – деякі розподіли нормальної та дотичної складових швидкостей течії відповідно.

Для розв'язання початково-крайової задачі (1) – (3) використаємо методи послідовних наближень, R-функцій та Гальоркіна [1, 2, 3].

Нехай $u_0(x, y, t)$ – розв'язок задачі:

$$\frac{\partial(-\Delta u_0)}{\partial t} + \nu\Delta^2 u_0 = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$u_0|_{\partial\Omega} = f_0(s, t), \quad \frac{\partial u_0}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u_0|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (6)$$

В задачі (1) – (3) зробимо заміну $\psi = u_0 + u$, де u – нова невідома функція. Тоді для функції u отримаємо задачу з однорідними крайовими та початковими умовами:

$$\frac{\partial(-\Delta u)}{\partial t} + \nu \Delta^2 u = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (9)$$

Розглянемо оператори A , B та J , що діють в $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ відповідно за правилами $Au = \Delta^2 u$, $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$; $Bu = -\Delta u$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$; $Ju = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u)$, $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, при чому $u|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0$. Можна довести, що оператори A та B симетричні та додатно-означені, а оператор J – нелінійний. Тоді запишемо (7) – (9) в операторній формі

$$\frac{d}{dt} Bu + \nu Au = Ju, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (11)$$

Визначення. Функція $u(t)$ називається узагальненим (слабким) розв'язком задачі (10), (11), якщо:

а) $u(t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$;

б) для будь-якого елемента $v(t) \in W_T$ має місце рівність

$$-\int_0^T \left[u, \frac{\partial v}{\partial t} \right]_B dt + \nu \int_0^T [u, v]_A dt = [u_0, v(0)]_B + \int_0^T (J(u_0 + u, v), \Delta(u_0 + u))_{L_2(\Omega)} dt,$$

де $W_T = \{u \mid u \in L_2(0, T; H_A), u' \in L_2(0, T; L_2(\Omega)), u(T) = 0\}$.

Для знаходження узагальненого розв'язку задачі (10), (11) побудуємо ітераційний процес послідовних наближень за нелінійністю. Нехай початкове наближення $u^{(0)}$ задано. Тоді при відомому значенні $u^{(k)}$ на k -й ітерації наступне $(k+1)$ -е наближення знаходимо як розв'язок лінійної задачі

$$\frac{\partial(-\Delta u^{(k+1)})}{\partial t} + \nu \Delta^2 u^{(k+1)} = J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) \quad \text{в } \Omega, \quad t > 0, \quad (12)$$

$$u^{(k+1)} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (13)$$

$$u^{(k+1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

У відповідності до методу Гальоркіна розв'язок задачі (12) – (14) шукаємо у вигляді

$$u_n^{(k+1)}(t) = \sum_{i=1}^n c_i^{(k+1)}(t) \varphi_i,$$

де $c_i^{(k+1)}(t)$, $i = 1, \dots, n$, – невідомі функції, $\{\varphi_i\}$ – координатна послідовність. Невідомі функції $c_i^{(k+1)}(t)$ знаходимо з умови ортогональності нев'язки першим n координатним функціям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Це приводить до системи звичайних диференціальних рівнянь з нульовими початковими умовами:

$$BC'^{(k+1)}(t) + vAC^{(k+1)}(t) = L^{(k)}(t), \quad t \in (0; T], \quad (15)$$

$$C^{(k+1)}(0) = 0, \quad (16)$$

де $C^{(k+1)}(t) = \{c_i^{(k+1)}(t)\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $b_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_B$, $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_A$, $L^{(k)}(t) = \{l_j^{(k)}(t)\}$, $l_j^{(k)}(t) = (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), \varphi_j)_{L_2(\Omega)}$.

Варто зазначити, що матриці B та A – матриці з відмінними від нуля визначниками (як матриця Грама лінійно незалежної системи функцій відносно скалярних добутків $[\cdot, \cdot]_B$, $[\cdot, \cdot]_A$), вони симетричні та додатно-означені.

Твердження. Наведених властивостей достатньо, щоб розв'язок задачі Коші (15), (16) існував та був єдиним.

В роботі отримана оцінка для $u^{(k+1)}$:

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau \leq \\ & \leq \frac{8c_0^2}{v\chi} c_1 c_2 c_3 M_0^4 T + \frac{8c_0^2}{v\chi} c_1 c_2 c_3 c_4^4 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|u^{(k)}\|_A^2 d\tau \right)^2, \end{aligned} \quad (17)$$

де $\chi = \min \left\{ \frac{1}{c_1}, v \right\}$, $t \in (0; T]$. З нерівності (17) слідує обмеженість

розв'язку задачі в нормі простору $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; H_A)$, яка визн-

чена співвідношенням $\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} + \left(\int_0^T \|u\|_A^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ за умови, що

$$\frac{1}{\chi\nu} \leq \frac{M}{8c_0^2c_1c_2c_3(M_0^4T + c_4^4M^2)}. \quad (18)$$

Також отримана оцінка для різниці $\delta u^{(k+1)} = u^{(k+1)} - u^{(k)}$:

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\delta u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau \leq \\ & \leq \frac{8c_1^2c_2^2}{\nu\chi} (M_0^2 + c_3^2M^2) \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\delta u^{(k)}\|_A^2 dt \right), \end{aligned} \quad (19)$$

де $\chi = \min \left\{ \frac{1}{c_3}, \nu \right\}$, $t \in (0; T]$. З нерівності (19) слідує збіжність $\delta u^{(k+1)}$ до

нуля в нормі простору $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; H_A)$ за умови

$$\frac{8c_1^2c_2^2}{\nu\chi} (M_0^2 + c_3^2M^2) \leq \alpha < 1. \quad (20)$$

Отже, доведено теорему.

Теорема. Нехай задана функція $u_0 \in L_2(\Omega)$. Тоді послідовні наближення, що формулюються за схемою (15), (16), збігаються при малих числах Рейнольдса до єдиного узагальненого розв'язку задачі (1) – (3), при чому $u \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; H_A)$. Умова малості числа Рейнольдса формулюється у вигляді (19), (20).

Проведено обчислювальний експеримент для модельної задачі розрахунку течії в прямокутній області. Для побудови координатної послідовності $\{\varphi_i\}$, використано метод R-функцій:

$$\varphi_i = \omega^2 \tau_i,$$

де $\{\tau_i\}$ – будь-яка повна в $L_2(\Omega)$ система координатних функцій, $\omega(x, y)$ – функція, що описує область Ω згідно з методом R-функцій [2], причому функція $\omega(x, y)$ задовольняє умови:

$$1) \omega(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega; 2) \omega(x, y) > 0 \text{ у } \Omega; 3) \frac{\partial\omega}{\partial n} = -1 \text{ на } \partial\Omega.$$

1. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
2. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
3. Савула Я. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Савула. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 224 с.

УДК 519.8:378.1

В.Є. Бахрушин

(Класичний приватний університет)

ПРОБЛЕМА ЧУТЛИВОСТІ УНІВЕРСИТЕТСЬКИХ РЕЙТИНГІВ, ОДЕРЖУВАНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ЛІНІЙНОЇ ЗГОРТКИ

В задачах багатокритеріального прийняття рішень існує необхідність вибору принципу оптимальності і отримання на його основі певної інтегральної оцінки досліджуваних об'єктів. Найчастіше такі оцінки одержують методом лінійної згортки окремих критеріїв (індикаторів) [1]:

$$I = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \dots + \alpha_n I_n, \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1,$$

де I_k окремі індикатори, α_k – відповідні вагові коефіцієнти.

До головних проблем застосування таких оцінок належать суттєвий вплив вибору окремих індикаторів, який часто не є очевидним, та вагових коефіцієнтів на одержувані результати, а також чутливість результатів до статистичних похибок вихідних даних.

У цій роботі методами імітаційного моделювання було оцінено вплив статистичних похибок на одержувані методом лінійної згортки показники, що використовуються у вищій освіті.

На рис. 1, 2 показано вплив статистичної похибки на рейтинги вищих навчальних закладів. Як значення окремих індикаторів рейтингу використовували сильно асиметричні вектори випадкових чисел з інтервалу від 0 до 100, розподіл яких був наближеним до розподілу індикаторів рейтингу ТОП-200 університетів України [2]. Інтегральний показник також будували за методикою цього рейтингу [3]. Статистичну похибку імітували як випадкову послідовність, яка підпорядковується нормальному розподілу із середнім значенням 0 та стандартною похибкою σ в межах від 0,1 до 4, використовуючи бібліотечні функції мови R. Така похибка зумовлена неточністю інформації про первинні показники, що використовуються при розрахунку рейтингів, а також коливанням їх значень протягом року. Згідно з [2] її середнє значення може сягати декількох одиниць.

Отримані дані свідчать про те, що для реальних рейтингів українських університетів більш-менш надійними є дані стосовно перших 15 – 30 позицій. Підсумкові показники інших університетів визначаються з великою статистичною похибкою.

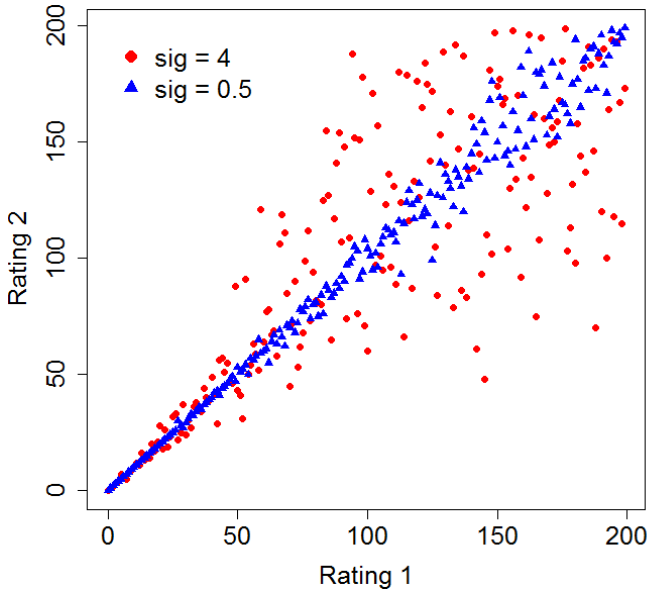


Рисунок 1. – Вплив статистичної похибки на місце у рейтингу (Rating 1 та Rating 2 відповідають однаковим значенням показників ВНЗ).

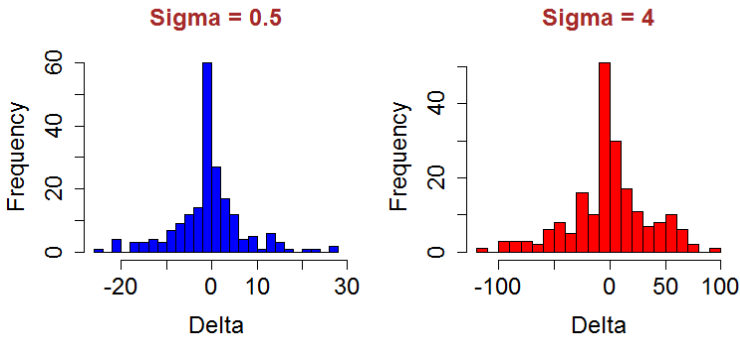


Рисунок 2. – Розподіл різниць рейтингових позицій, зумовлених впливом статистичної похибки.

1. *Jahn J.* Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions / J.Jahn. – Berlin: Springer-Verlag, 2004. – 481 p.
2. *Бахрушин В.* Статистичний аналіз рейтингів українських університетів / В.Бахрушин // Освіта і управління. – 2011. – № 2-3. – С. 30-37.
3. <http://www.euroosvita.net/index.php/?category=28&id=348>.

В.Є. Бахрушин, І.О. Дудко

(Класичний приватний Університет)

ВАРІАНТИ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧІ ПЕРЕВІРКИ ЗГОДИ НАЯВНИХ ЕМПІРИЧНИХ ДАНИХ З ТЕОРЕТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ РОЗПОДІЛУ

Перевірка відповідності теоретичної моделі розподілу наявним емпіричним даним є однією з типових задач прикладної статистики. Для її розв'язання запропоновано велику кількість статистичних критеріїв, зокрема, критерії Андерсона-Дарлінга, Жанга, Колмогорова-Смирнова, Крамера-фон-Мізеса, Купера, Пірсона, Уотсона та інші [4, 5]. Але можливість їх застосування залежить від конкретного формулювання нульової гіпотези.

Найчастіше її формулюють, як згоду емпіричних даних з теоретичною моделлю $F(x; \Theta_0)$, де $\Theta_0 \in \Theta$ – заданий вектор параметрів моделі, тобто $H_0 : F_n(x) = F(x, \theta_0)$. Така постановка задачі можлива, наприклад, при перевірці якості роботи генераторів випадкових чисел. Для її розв'язання можна використовувати відомий критерій Колмогорова – Смирнова. Незалежно від моделі, що перевіряється, статистика цього критерію розраховується [4] за формулою:

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x, \theta_0)|,$$

де $F_n(x)$ – емпірична функція розподілу, n – обсяг вибірки.

Розрахункове значення критерію визначається як:

$$\lambda = \sqrt{n} D_n(\theta_0). \quad (1)$$

Формулу (1) застосовують, якщо значення параметрів $\theta = \theta_0$ теоретичної функції розподілу відомі незалежно від вибірки. Але на практиці часто трапляється, що параметри моделі невідомі, і необхідно використовувати вектор їх вибірових оцінок θ^* . У цьому випадку необхідно оцінити згоду наявних даних з моделлю $F_n(x) = F(x, \theta^*)$, параметри якої визначено за вибіровими оцінками.

Відомий критерій Ліллієфорса [1] передбачає, що як модель використовують функцію нормального розподілу, параметрами якої є вибірові середнє арифметичне та стандартне відхилення. Критичні значення для нього є суттєво меншими за критичні значення критерію Колмогорова – Смирнова [1, 2].

Сьогодні є можливість оцінювати параметри моделі в інший спосіб – шляхом мінімізації обраного показника оптимальності. Як такий показник можна взяти розрахункове значення статистичних критеріїв згоди, зокрема, критерію типу Колмогорова – Смирнова. В такому випадку ми одержуємо ще одну постановку задачі – перевірити згоду емпіричних даних з хоча б якоюсь теоретичною функцією розподілу заданого типу. Можна очікувати, що критичні значення у цьому випадку будуть ще меншими. Але існує проблема їх оцінювання.

Для її вирішення можна використовувати таку само методику, як і в роботах [1, 2], яка ґрунтується на використанні методу Монте-Карло. У роботі [3] нами було розв'язано таку задачу для деяких видів розподілу. Виявилося, що для нормального, Лапласа, логнормального та гамма розподілу критичні значення критерію збігаються в межах допустимої похибки. Так, наприклад, для довірчого рівня $p = 0,95$ для нормального розподілу значення $\lambda^* = 0,632$, а для логнормального $\lambda^* = 0,633$. Можливою причиною цього є близькість зазначених сімейств розподілів, що впливає на результати. Аналогічна ситуація відбувається з експоненціальним та Вейбулла розподілами. Проте критичні значення для них є дещо вищими.

Процедура ідентифікації моделі розподілу для двох останніх випадків складається з трьох основних етапів [4]:

- 1) формулювання гіпотези про теоретичну функцію (модель) розподілу, що перевіряється;
- 2) оцінювання параметрів обраної моделі;
- 3) перевірка адекватності моделі за допомогою обраного статистичного критерію.

1. *Lilliefors H.* On the Kolmogorov–Smirnov test for normality with mean and variance unknown // *Journal of the ASA.* – 1967. – № 62 (318). – P. 399–402.
2. *Molin P., Abdi H.* New Tables and numerical approximations for the
3. *Kolmogorov-Smirnov /Lilliefors/VanSoest test of normality* // *Technical report.* – University of Bourgogne. –1998. – 12 p.
4. *Бахрушин В.Є.* Визначення критичних значень критерію типу Колмогорова-Смирнова для деяких типів розподілу методом Монте-Карло / В.Є. Бахрушин, І.О. Дудко // *Системні технології.* – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2014. – С. 53-59.
5. *Бахрушин В.Є.* Методи аналізу даних / В.Є. Бахрушин. – Запоріжжя: КПУ, 2011. – 268 с.
6. *Лемешко Б.О.* О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга / Б.О. Лемешко, А.А. Горбунова // *Измерительная техника.* 2013. – № 5 – С. 3 – 9.

УДК 519.6:517.958

І.Є.Бернакевич, П.П.Вагін*, І.Я.Козій*, В.М.Харченко***

(*Львівський національний університет імені Івана Франка

**ДКБ «Південне» імені М.К. Янгеля)

КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ

В інженерній практиці дослідження динамічної поведінки та визначення власних частот є необхідною умовою успішного проектування оболонкових конструкцій. Більшість наукових досліджень ґрунтується на класичній гіпотезі Кірхгофа-Лява та гіпотезі Тимошенка-Міндліна [3, 4,].

Записано ключові рівняння теорії тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення, для визначення напружено-деформованого стану з використанням співвідношень лінійної теорії тонких оболонок [1] у матричному вигляді:

$e = C_u u$, – деформаційні співвідношення, які пов'язують компоненти тензора лінійної деформації з переміщеннями,

$\sigma = B e$, – співвідношення пружності, які пов'язують деформації з внутрішніми зусиллями та моментами,

$$C_\sigma \sigma + P - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \text{ – рівняння динамічної рівноваги} \quad (1)$$

$G_\sigma \sigma|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_g$ – статичні крайові умови,

$G_u u|_{\Gamma_u} = u_g$, $\Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_\sigma$ – крайові умови у зміщеннях на частині Γ_u ,

$u(\alpha, 0) = u^0(\alpha)$, $\dot{u}(\alpha, 0) = u^1(\alpha)$ – початкові умови.

Тут використані позначення з [2].

Нехай на контурі оболонки задані однорідні граничні умови

$$G_u u|_{\Gamma_u} = 0, \quad G_\sigma \sigma|_{\Gamma_\sigma} = 0. \quad (2)$$

Розв'язок рівняння руху (1) шукаємо в наступному вигляді

$$u(\alpha, t) = \tilde{u}(\alpha) e^{i\omega t}, \quad (3)$$

де $i^2 = -1$, ω – кругова частота власних коливань.

Підставляючи (3) у рівняння динамічної рівноваги (1) і граничні умови (2), використовуючи метод скінченних елементів, отримаємо таку систему рівнянь

$$-M\tilde{u}\omega^2 e^{i\omega t} + K\tilde{u}e^{i\omega t} = 0 \quad (4)$$

та граничні умови

$$G_u \tilde{u}|_{\Gamma_u} = 0, \quad G_\sigma \tilde{\sigma}|_{\Gamma_\sigma} = 0.$$

Тут K – матриця січної жорсткості, M – матриця мас [1].

Власні частоти знаходимо з умови рівності нулю визначника системи рівнянь (4)

$$(K - \omega^2 M)u = P,$$

тобто

$$\det[K - \omega^2 M] = 0.$$

Досліджено задачу про вільні коливання кругової циліндричної оболонки радіуса $R = 10$ м, довжини $l = 10$ м і товщини $h = 0,05$ м. Обчислення проведено для таких фізичних характеристик матеріалу оболонки: модуль Юнга $E = 1$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, густина $\rho = 1$ кг/м³.

У таблиці наведено порівняння результатів чисельного розрахунку значень $\omega \cdot 10^3$ для цієї задачі, розглянутих у праці [3] (у межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка-Міндліна), з отриманими результатами, для випадку послідовного згущення сітки скінченних елементів. Аналітичний розв'язок цієї задачі за теорією Кірхгофа-Лява наведено у праці [4]: $\omega \cdot 10^3 = 0,3034370$.

Таблиця. Порівняння чисельних результатів.

Розбиття	$\omega \cdot 10^3$ (п'ятимодальний варіант [3])	$\omega \cdot 10^3$ (шестимодальний варіант)
3×3	0,3305068	0,3583986
4×4	0,3024595	0,3401321
5×5	0,2974929	0,3288990
6×6	0,2958501	0,3202398

З результатів видно, що врахування стиснення зменшує жорсткість оболонки, тому вона швидше може піддатися явищу резонансу, а відповідно й руйнуванню.

1. *Бернакевич І. Є.* Нелінійне деформування тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення / І.Є.Бернакевич, П.П.Вагін, І.Я.Шот // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2013. – Вип.11. – С. 174-182.
2. *Вагін П. П.* Про вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення / П.П.Вагін, І.Я.Шот // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип.10. – С. 177-184.
3. *Савула Я. Г.* Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями / Я.Г.Савула, Н.П.Флейшман. – Львов: Вища школа, 1989. – 172 с.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Свободные колебания тонких упругих оболочек / А.Л.Гольденвейзер., Б.Г.Лидский, П.Е.Товстик. – Москва: 1979. – 384 с.

Я.Й. Бігун

(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
факультет математики та інформатики)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ЕКОЛОГІЧНОГО ФАКТОРУ НА ІМУННУ ВІДПОВІДЬ ОРГАНІЗМУ ЛЮДИНИ

Для дослідження основних кількісних закономірностей перебігу інфекційних процесів Г.І. Марчуком у 1975 році запропонована базова математична модель інфекційного захворювання [1]. Основною задачею цієї моделі був опис захворювання як фізичного процесу взаємодії клітин і молекул імунної системи, органу мішені і патогена. Розвинуто цю модель в працях У. Фориш та її учнів [2]. У клінічній практиці спостерігається вплив на перебіг деяких інфекційних захворювань, зокрема бронхіально-легеневої системи, негативних наслідків забруднення довкілля. Нехай $E(t)$ – узагальнений показник такого забруднення. У лінійному випадку

$$E(t) = \alpha_1 E_1(t) + \dots + \alpha_n E_n(t),$$

де $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, $E_i(t)$ – кількісна оцінка i -го фактору забруднення, наприклад повітря, води, радіаційного фону тощо. Через E^* позначимо середнє значення, при якому порушень у функціонуванні імунної системи не спостерігається, а при $E(t) > E^*$ імунна відповідь знижується. Середній час відновлення екологічної рівноваги при невеликих початкових збуреннях позначимо через Δ . Фактор $E(t)$ пропонується описати диференціальним рівнянням Хатчінсона [3] вигляду

$$\frac{dE(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{E(t) - \Delta}{E^*} \right) E(t), \quad t > 0. \quad (1)$$

Кількість патогенів $V(t)$, антитіл $F(t)$, плазматичних клітин $C(t)$ і долі ураженої маси органу-мішені $m(t)$, $0 \leq m(t) \leq 1$, описується системою диференціальних рівнянь із запізненням вигляду

$$\frac{dV}{dt} = \beta \left(1 - \delta \left(\frac{V}{K} \right)^p \right) V - \gamma F V, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha \xi(m) V_\tau F_\tau - \mu_c (C - C^*) - \mu_e (C - C^*) - \mu_e (E - E^*), \quad (3)$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \eta \gamma V F - \mu_f (E - E^*), \quad (4)$$

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m + \mu_f (E - E^*), \quad (5)$$

де $t \in (0, \infty)$, коефіцієнти системи – невід’ємні числа, $V_\tau(t) = V(t - \tau)$, $\tau > 0$ – час формування клону плазмоклітин. Якщо $E = E^*$ і $\delta = 0$, то одержимо модель імунної відповіді Г.І. Марчука [1].

У роботі досліджено умови існування положень рівноваги моделі (1)-(5) та їх стійкість. Зокрема, локальна асимптотична стійкість стану здорового організму при нормальній екології

$$E = E^*, \quad V = m = 0, \quad F := F^* = \rho C^* / \mu_f, \quad C = C^*$$

досягається при виконанні умов

$$\beta < \gamma F^*, \quad 2r\Delta < \pi. \quad (6)$$

Якщо $p = 1$ і $\delta > 0$, то порівняно з класичною [1] в досліджуваній моделі може появитись положення рівноваги з невеликою концентрацією антигена $V_1 > 0$ у субклінічному випадку, коли виконується перша з умов (6). Цей ефект можна пояснити зменшенням швидкості розмноження антигена, оскільки коефіцієнт $\delta > 0$.

Якщо ж $\beta - \gamma F^* > 0$, тобто захворювання гостре або хронічне, то може існувати два додатних положення рівноваги, одне з яких локально стійке, інше – нестійке. Знайдені коефіцієнтні існування положень рівноваги та досліджено їх стійкість.

У загальному випадку, коли $p \in N$, спостерігається подібна ситуація. А саме, може існувати два положення рівноваги при $\beta - \gamma F^* > 0$ і одне у протилежному випадку. Проведено числові експерименти з аналізу динаміки моделі (1)-(5) для $p = 1, 2$.

1. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. – М.: Наука, 1991. – 304 с.
2. Forys U., Poleszczuk J. A delay-differential equation model of HIV related cancer-immune system dynamics // Math. Biosci. Engineering. – 2011, **8** (i2). – P. 627-641.
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 421 с.

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МІНОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ АБСОЛЮТНОГО ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ ФУНКЦІЙ НА ЗАДАНОМУ ПРОМІЖКУ

В [1, 3] побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, який використано: для апроксимації функцій; побудови чисельних методів обчислення визначених інтегралів та розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем, точних на певних класах функцій (якщо не враховувати операції заокруглення); оптимізації як гладких, так і негладких вгнутих функцій однієї та багатьох дійсних змінних.

В [2, 4] вперше побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона функцій однієї та двох дійсних змінних, заданих таблично, який використано для апроксимації функцій та розробки чисельних методів оптимізації як гладких, так і негладких опуклих функцій однієї та двох дійсних змінних.

У доповіді розглядається довільна (як гладка, так і негладка) функція однієї дійсної змінної $f(x)$, визначена на деякому проміжку. Приводиться алгоритм відшукування абсолютного мінімуму цієї функції, використовуючи побудований в [2] апарат некласичних мінорант Ньютона функцій, заданих таблично.

Розглянемо довільну як гладку, так і негладку функцію $y = f(x)$, задану на проміжку $[a, b]$. Вважатимемо, що $f(x) > 0$ для всіх $x \in [a, b]$. Якщо функція $y = f(x)$ приймає від'ємні значення на проміжку $[a, b]$, то замість неї можна розглядати функцію $y = f(x) + C$, де стала C підібрана так, що $f(x) + C > 0$ для всіх $x \in [a, b]$.

Виберемо на проміжку $[a, b]$ систему рівновіддалених точок :

$$x_i = a + ih; \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad h = \frac{b - a}{n}.$$

Позначимо $f(x_i) = a_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Алгоритм методу. Алгоритм складається з низки кроків. На першому кроці покладаємо $i_1 = 0$ і визначаємо

$$r = \max_{i_1 < v \leq n} \left(\frac{a_{i_1}}{a_v} \right)^{\frac{1}{v - i_1}}. \quad (1)$$

Якщо $r \leq 1$, то за точку абсолютного мінімуму функції $f(x)$ беремо x_{i_1} і на цьому робота алгоритму завершується. Якщо $r > 1$, то визначаємо мінімальне значення індекса v , для якого в (1) досягається максимум, позначаємо його через i_2 і переходимо до другого кроку.

На другому кроці визначаємо

$$r = \max_{i_2 < v \leq n} \left(\frac{a_{i_2}}{a_v} \right)^{\frac{1}{v-i_2}}. \quad (2)$$

Якщо $r \leq 1$, то за точку абсолютного мінімуму функції $f(x)$ беремо x_{i_2} і на цьому робота алгоритму завершується. Якщо $r > 1$, то визначаємо мінімальне значення індекса v , для якого в (2) досягається максимум, позначаємо його через i_3 і переходимо до третього кроку.

І так далі.

На k -му кроці, якщо робота алгоритму не завершилася на $(k-1)$ -му кроці, визначаємо

$$r = \max_{i_k < v \leq n} \left(\frac{a_{i_k}}{a_v} \right)^{\frac{1}{v-i_k}}. \quad (3)$$

Якщо $r \leq 1$, то за точку абсолютного мінімуму функції $f(x)$ беремо x_{i_k} і на цьому робота алгоритму завершується. Якщо $r > 1$, то визначаємо мінімальне значення індекса v , для якого в (3) досягається максимум, позначаємо його через i_{k+1} і переходимо до $(k+1)$ -го кроку.

Робота алгоритму завершується у двох випадках:

- 1) на деякому кроці знайдено $r \leq 1$;
 - 2) на деякому кроці мінімальне значення індекса v , для якого досягається максимум, дорівнює n ; в цьому випадку за точку абсолютного екстремуму приймаємо x_n .
1. Глебена М.І. Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційних процесів: автор. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / М.І. Глебена. – Івано-Франківськ, 2012. – 23 с.
 2. Глебена М.І. Апарат неklasичних мінорант Ньютона та його використання / М.І. Глебена, Г.Г. Цегелик // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. та інформ.. – 2013. – Вип. 24. -N1. – С.16-21.
 3. Цегелик Г.Г. Апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 190с.
 4. Bihun R.R., Tsehelyk G.G. Device of non-classical Newton's minorant of functions of two real table-like variables and its application in numerical analysis // International Journal of Information and Communication Technology Research. – 2014. – Volume 4, No.7. – С. 284-287.

УДК 517.958:532.72

Ю.І. Білушак, В.Є. Гончарук**, А.Є. Давидок*, О.Ю. Чернуха**

(* Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С. Підстригача НАН України,

** Національний університет «Львівська політехніка»)

**ПАКЕТ ПРОГРАМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ
ДИФУЗІЇ У ВИПАДКОВИХ СТРУКТУРАХ**

Під час дослідження процесів масоперенесення в пористих середовищах, складних геологічних структурах, композитних матеріалах, наноструктурах, тощо, важливою характеристикою процесу, разом з концентрацією мігруючої речовини та хімічним потенціалом, є дифузійний потік [3]. Крім того, у процесі моделювання потоків маси у багатозафазних неоднорідних тілах потрібно враховувати вплив просторово випадково розташованих включень. Проте застосування процедури усереднення для визначення дифузійного потоку домішки може викликати значні труднощі, оскільки невідомими є функції кореляції градієнта стохастичного поля концентрації та випадкового коефіцієнта дифузії.

Розвинуто підхід до математичного опису процесів масоперенесення у випадково неоднорідних структурах, розміри неоднорідностей в яких можуть бути сумірними з розмірами тіла. В рамках підходу на основі рівняння балансу маси одержано рівняння дифузії для функції потоку, а крайові задачі запропоновано формулювати безпосередньо для потоку.

В одновимірному за просторовою координатою випадку диференціальне рівняння на потік має вигляд

$$\frac{\partial J(z,t)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2 J(z,t)}{\partial z^2}, \quad (1)$$

де $J(z,t)$ - випадковий потік маси, $D(z)$ - випадковий коефіцієнт дифузії.

Приймаємо, що справджуються крайові умови першого роду на функцію потоку $J(z,t)$: у початковий момент часу відсутній дифузійний потік у тілі; на «верхній» поверхні шару $z=0$ потік є сталим, а на «нижній» поверхні смуги $z=z_0$ концентрація дорівнює нулю:

$$J(z,t)|_{t=0} = 0; \quad J(z,t)|_{z=0} = J_* \equiv \text{const}, \quad c(z,t)|_{z=z_0} = 0, \quad (2)$$

при цьому дифузійний потік на «нижній» межі дорівнює деякій функції часу $F(t)$, яка визначається додатково з відповідної крайової задачі для концентрації мігруючої речовини: $J(z,t)|_{z=z_0} = F(t)$.

Крайова задача масоперенесення (1)-(2) зведена до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння

$$J(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J(z', t') dz' dt', \quad (3)$$

де $J_0(z, t)$ – розв’язок однорідної крайової задачі; $G(z, z', t, t')$ – детермінована функція Гріна; $L_s(z, t) = L_0(z, t) - L(z, t)$, $L_0(z, t) \equiv \partial/\partial t - D_0 \partial^2/\partial z^2$.

Розв’язок рівняння (3) знайдений у вигляді ряду Неймана, зручного для процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз [2].

Отримано розрахункові формули для знаходження усереднених за ансамблем конфігурацій фаз дифузійних потоків у випадково неоднорідних шаруватих тілах для різних ймовірнісних розподілів включень у тілі.

Розроблено пакет програм для розрахунку дифузійних потоків у двофазних тілах випадкової шаруватої структури «FlowRan», призначений для кількісного і якісного аналізу потоків мігруючої речовини у випадково неоднорідних шаруватих тілах з різними конфігураціями фаз; знаходження порівняльних розподілів потоків маси, усереднених за ансамблем конфігурацій фаз, за різних значень параметрів внутрішньої структури та фізичних характеристик; кількісної оцінки парного взаємовпливу включень на усереднений потік маси; дослідження потоків у випадкових шаруватих структурах зі стохастичними розмірами включень і представлення результатів як у графічній формі, так і у вигляді таблиць (Рис.1).

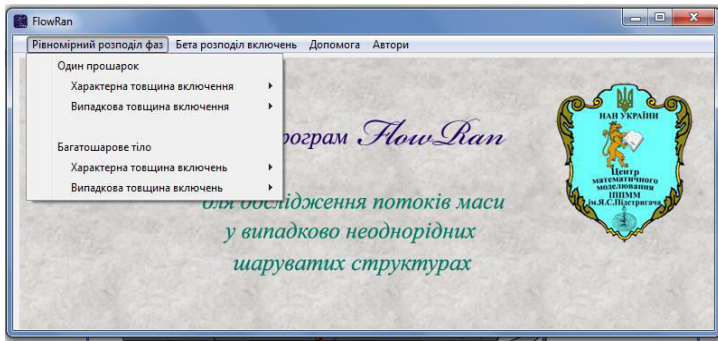


Рисунок 1. - Складові пункту «Рівномірний розподіл фаз» меню головного вікна пакету програм «FlowRan»

Стрічка меню головного вікна пакету складається з таких пунктів: «Рівномірний розподіл фаз», «Бета розподіл включень», «Допомога», «Автори» (Рис.1). Пункт головного меню «Рівномірний розподіл фаз» призначений для вибору однієї з програм розрахунку потоків дифундуючої речовини в шаруватих середовищах з одним випадково розташованим прошарком або стохастично неоднорідному багат шаровому тілі за рівномірного розподілу фаз та складається з таких підпунктів: «Один прошарок»: «Характерна товщина включення», «Випадкова товщина включення».

ня»; «Багатошарове тіло»: «Характерна товщина включень», «Випадкова товщина включень».

Наприклад, для задачі дифузії у багатошаровій смузі з рівномірним розподілом фаз за трикутного розподілу товщини включень при ненульовій початковій концентрації при виборі пункту «Рівномірний розподіл фаз», «Багатошарове тіло. Випадкова товщина включень», підпункту «трикутний розподіл ненульова концентрація» відкриється вікно «Потік у шаруватій смузі з прошарками за трикутного розподілу товщини при ненульовій початковій концентрації. Рівномірний розподіл фаз» (Рис. 2). Це вікно складається з таких полів, які необхідно заповнити користувачеві: «Вхідні дані», «Вибір параметра для порівняння», а також містить поля «Таблиця», «Графіки»; клавіші «Очистити результат», «Таблиця», «Рисунок», «Вибір задачі», «Друк» та «Вихід». У нижньому лівому кутку вікна програми міститься поле, де виводяться повідомлення про помилки.

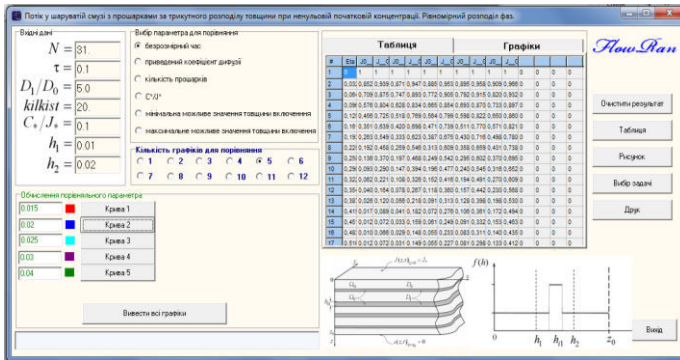


Рисунок 2. - Приклад поля «Таблиця» після проведення обчислень за п'ятьма значеннями безрозмірного часу

Після активізації поля «Таблиця» отримаємо числові значення функцій $J_0(\zeta, \tau)/J_*$, $\langle J(\zeta, \tau) \rangle/J_*$ на різних безрозмірних глибинах ζ (Рис. 2). При натисканні клавіші «Вивести всі графіки» у поле «Графіки» будуть виведені обчислені усереднені потоки маси (суцільні лінії) та відповідні потоки в однорідному тілі (штрихові лінії), як представлено на Рис.3.

В якості тестового прикладу розглянута міграція атомів вуглецю в шаруватому композиті $\alpha Fe - Ni$, де приймаємо в якості базової фази залізо. Значення коефіцієнтів дифузії вуглецю є [1]: у залізі $D_{\alpha Fe} = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, у нікелі $D_{Ni} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Тоді $D_1/D_0 = D_{Ni}/D_{\alpha Fe} = 14,286$.

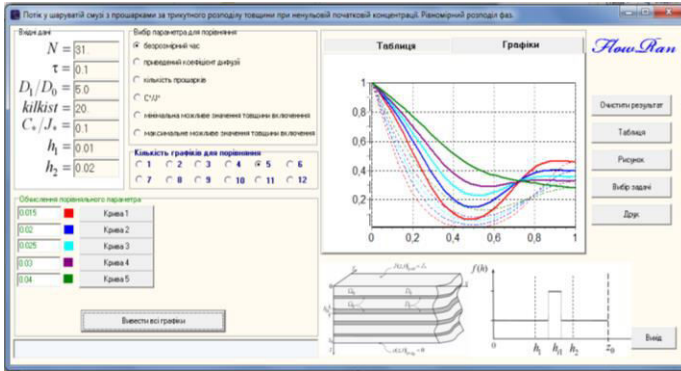


Рисунок 3. - Виведення всіх графіків у поле «Графіки»

Розв'язок задачі знаходження усереднених потоків вуглецю в шаруватій структурі $\alpha\text{Fe}-\text{Ni}$ отриманий за припущення, що фази в тілі розташовані за рівномірним розподілу, а в нульовий момент часу відомий сталий ненульовий розподіл атомів вуглецю C у композиті (Рис.4).

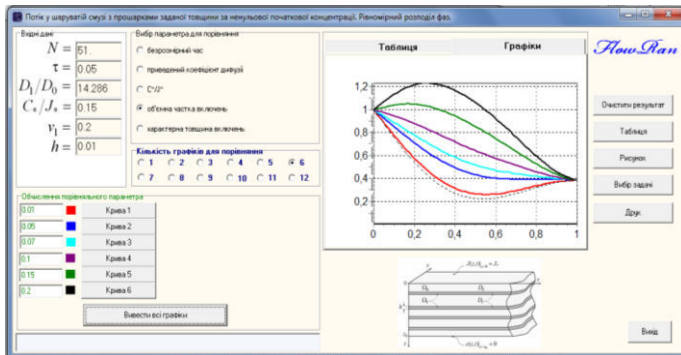


Рисунок 4. - Вигляд вікна програми з усіма побудованими графіками

Пункт головного меню «Бета розподіл включень» призначений для вибору однієї з програм розрахунку потоків мігруючої речовини в багатошарових тілах з областю найбільш ймовірного розташування включень в околі однієї з поверхонь тіла або посередині смуги.

1. Лариков Л. И. Диффузия в металлах и сплавах. Структура и свойства металлов и сплавов. / Л. И. Лариков, В. И. Исайчев. – К.: Наук. думка, 1990. – 374 с.
2. Чапля С. Я. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах / С. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – К.: Наукова думка, 2009. - 302 с.
3. Benitez J. Principles and modern applications of mass transfer operations / J Benitez. – Hoboken, New Jersey: J. Wiley & Sons, 2009. – 549 p.

УДК 519.6:532.546:539.3

В.О. Богаєнко, О.О. Марченко, Т.А. Самойленко

(Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України)

**МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО СТАНУ ВОДОНАСИЧЕНОГО
ГРУНТОВОГО МАСИВУ ЗА НАЯВНОСТІ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ**

В доповіді подані дві нові диференціальні моделі стану ґрунтового масиву за умови наявності неусталеного неізотермічного режиму напірної фільтрації. Перша модель являє собою початково-крайову задачу для параболо-гіперболічної квазілінійної системи, що містить нестационарні рівняння фільтрації та теплопереносу, а також рівняння теорії пружності, які описують напружено-деформований стан ґрунтового масиву. Другою моделлю є початково-крайова задача для системи рівнянь, яка включає рівняння теплопереносу та систему динамічної консолідації водонасичених ґрунтів [1].

У двовимірному випадку система першої з перерахованих моделей має вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div} (K_{\phi}(T, \theta) \operatorname{grad} h) &= 0, \\ c_T \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} (\lambda_T \operatorname{grad} T - c_e v T) &= 0, \\ \rho_{sp} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (Au)(u) - \operatorname{grad} P &= F,\end{aligned}$$

де h – п'єзометричний напір, T – температура, $u = (u_{ck}, v_{ck})^T$, u_{ck} , v_{ck} – горизонтальна і вертикальна складові вектора зміщень скелету ґрунту, $P = \rho_g g(h - y)$ – гідростатичний тиск, $\tilde{\mu}$ – вологоємність, K_{ϕ} – коефіцієнт фільтрації, $K_{\phi}(T, \theta) = \bar{K}_{\phi}(T) \exp\{\varepsilon(\theta)/(0.18\varepsilon_t - 0.048)\}$, $\bar{K}_{\phi}(T) = \bar{K}_{\phi}(10)(0.7 + 0.03T)$, $\varepsilon(\theta) = \varepsilon_0 + \theta(1 - \varepsilon_0)$, $\theta = \partial u_{ck}/\partial x + \partial v_{ck}/\partial y$ – об'ємна деформація, ε_t – коефіцієнт пористості на границі плинності, c_T – об'ємна теплоємність середовища, λ_T – коефіцієнт теплопровідності, c_e – об'ємна теплоємність порової рідини, $v = -K_{\phi} \operatorname{grad} h$, ρ_{sp} – щільність вологонасиченого ґрунту, ρ_g – щільність води, g – прискорення вільного падіння, A – оператор теорії пружності вигляду

$$(Au)(u) = \begin{pmatrix} \partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y \\ \partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y \end{pmatrix}; \quad F = (0, -\rho_{sp} g)^T, \quad (x, y, t) \in \Omega_{\tilde{T}}, \quad \Omega_{\tilde{T}} = \Omega \times (0, \tilde{T}].$$

Система рівнянь другої моделі при умові врахування принципу ефективних напруг Терцагі та тільки пружних деформацій записується у вигляді

$$\rho_u(1-m)\frac{\partial^2 w_{ck}}{\partial t^2} + \rho_g g m^2 \bar{K}_\phi^{-1}(T) \frac{\partial}{\partial t} (w_{ck} - w_g) - (A w_{ck})(w_{ck}) - (1-m) \operatorname{grad} P = F_1,$$

$$\rho_g m \frac{\partial^2 w_g}{\partial t^2} + \rho_g g m^2 \bar{K}_\phi^{-1}(T) \frac{\partial}{\partial t} (-w_{ck} + w_g) - m \operatorname{grad} P = F_2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{M^e}{m} \left((1-m) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} w_{ck} + m \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} w_g \right),$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\lambda_T \operatorname{grad} T - c_g \frac{\partial w_g}{\partial t} T \right) = 0,$$

де $w_{ck} = (u_{ck}, v_{ck})^T$, $w_g = (u_g, v_g)^T$, u_g, v_g – горизонтальна і вертикальна складові вектора зміщень води, ρ_u – щільність мінеральних частинок, $\rho_{gp} = \rho_u(1-m) + \rho_g m$, m – пористість, $\bar{K}_\phi$ – коефіцієнт фільтрації з попередньої моделі, M^e – модуль пружності рідини, $F_1(x, y, t) = (0, (m-1)\rho_u g)^T$, $F_2(x, y, t) = (0, -m\rho_g g)^T$.

Для кожної задачі задані початкові і неоднорідні змішані крайові умови.

При умові наявності додаткових початкових умов для перших похідних за часом для параболічних рівнянь фільтрації та теплопереносу, які входять до систем, кожна з розглядуваних початково-крайових задач може бути записана як задача для операторного рівняння вигляду

$$M \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \bar{M} \frac{\partial z}{\partial t} + (Lz)(z) = \tilde{F}, \quad (x, y, t) \in \Omega_{\tilde{T}},$$

де $z(x, y, t) = (h(x, y, t), T(x, y, t), u(x, y, t))^T$ у випадку першої моделі і $z(x, y, t) = (w_{ck}(x, y, t), w_g(x, y, t), T(x, y, t))^T$ – для другої.

Узагальнений розв'язок $z \in V$ кожної з двох початково-крайових задач шукаємо як розв'язок відповідної задачі:

$$\left(M \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \tilde{v} \right) + \left(\bar{M} \frac{\partial z}{\partial t}, \tilde{v} \right) + ((Lz)(z), \tilde{v}) = (\tilde{F}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in V_0, \quad (x, y, t) \in \Omega_{\tilde{T}},$$

$$(z(x, y, 0), \tilde{v}(x, y)) = (\tilde{Z}^0(x, y), \tilde{v}(x, y)),$$

$$((\partial z / \partial t)(x, y, 0), \tilde{v}(x, y)) = (\tilde{Z}^1(x, y), \tilde{v}(x, y)) \quad \forall \tilde{v} \in V_0,$$

де V, V_0 – множини, які будуються за принципом методу Гальоркіна [2].

На базі методу скінчених елементів сформульовано неперервний за часом наближений узагальнений розв'язок як розв'язок відповідної задачі Коші та повністю дискретний наближений узагальнений розв'язок, що розраховується за схемою Кранка-Ніколсона, матриці якої на кожному часовому кроці і на кожній ітерації – розріджені, блочної структури.

За кожною із запропонованих моделей проведені розрахунки на прикладі задачі про фільтрування води до котловану з водонепроникними вертикальними стінками при умові зменшення рівня води на поверхні ґрунтового масиву та при різних температурних режимах протікання процесу.

Порівняльний аналіз результатів розрахунків (ізоліній напорів, зміщень скелету ґрунту та води, полів температур, рівнів підняття води у котловані та її зниження на верхній межі області фільтрації і т.д.) свідчить про те, що при дуже схожій загальній картині за першою моделлю отримуємо як більш швидкий процес фільтрації порівняно з другою моделлю (на час 400год. з початку розрахунку відносно наповнення водою котловану швидше приблизно на 35% при температурі води на верхній межі 15°C і на 38% – при 25°C), так і більшу деформацію ґрунтового масиву (на час 400год. при температурі 25°C на 24% для абсолютних значень горизонтальних зміщень та приблизно на 3% – для вертикальних). Результатом підвищення зовнішніх температур на 10°C (від 15°C до 25°C) є різниця в рівнях води у котловані на час 400год. для першої моделі на 0.06м, для другої – на 0.01м в бік збільшення; при цьому деформація скелету ґрунту зменшується (у випадку першої моделі зменшення максимальних горизонтальних зміщень на 9.6%, у випадку другої – на 5.3%, вертикальних – відповідно на 0.5% і 0.03%).

Розв'язання обох задач розпаралелювалось на кластерних системах. Розпаралелювались як обчислення значень коефіцієнтів СЛАР, так і процес розв'язання СЛАР. З точки зору швидкості обчислень більш математично складна друга модель очікувано є складнішою і алгоритмічно, тому розрахунок за цією моделлю повільніший. Застосування паралельних алгоритмів, особливо тих, що використовують GPU, для першої моделі є також ефективнішим через вищий коефіцієнт заповненості матриці СЛАР.

1. *Богаєнко В.А.* Аналіз численного моделирования динамики ґрунтового массива при наличии неустановившейся напорной фильтрации / В.А. Богаєнко, О.А. Марченко, Т.А. Самойленко // УСИМ. – 2014. – № 4. – С.34 - 41.
2. *Дейнека В.С.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий – Киев: Наук. думка, 1998. – 614 с.

РОЗРОБКА ВЕБ САЙТУ КОНФЕРЕНЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ РКР

З дуже високим темпом науково-технічного прогресу, інформаційні технології дедалі частіше впроваджуються в наше повсякденне життя. Для будь-якої установи чи компанії мати свій веб-сайт є обов'язковою умовою для досягнення успіхів у своїй сфері діяльності. Якщо йде мова про навчальну установу, то абітурієнтам і студентам зручно шукати необхідну інформацію, а викладачам розмішувати свої навчальні матеріали та статті. Так, на сайті конференції зручно користуватись автоматичною реєстрацією учасників різних конференцій, прийомом і затвердженням тез доповідей, а також архівами проведених конференцій.

РКР(Public Knowledge Project) – ініціатива декількох американських та канадських університетів, які займаються розробкою програмного забезпечення з відкритим кодом. Ця група університетів розробила декілька систем, а саме: Open Journal Systems(система для публікацій журналів), Open Monograph Systems(система для видачі онлайн-книг), Open Conference Systems(система для проведення наукових конференцій), Open Harvester Systems(система ефективного пошуку по інших сайтах).

Для створення сайту конференцій було використано Open Conference Systems(OCS). Основні функціональні можливості роботи сайту:

- створення сайту для проведення конференції
- керувати конференціями, які проводяться більше одного разу
- створення і розсилка різного роду оголошень відносно конференцій
- автоматичний прийом тез доповідей та можливість їх онлайн-редагування
- проведення експертного огляду поданих робіт
- створювати графіку проведення конференцій
- інтеграція обговорення після конференції
- використання системи шаблонів електронної пошти
- підтримка багатомовності сайту з файлами локалізації
- можливість використовувати більш масштабований і безпечний код
- створення архіву конференції у форматі зручному для пошуку
- автоматична реєстрація учасників
- можливість підключення платіжної системи для автоматизованої оплати за реєстрацію.

В системі OCS зареєстровані користувачі можуть мати різні ролі, відповідно до них кожному користувачу надаються різні можливості для роботи на сайті. Користувачі діляться на три групи: адміністратори сайту,

відповідальні за проведення конкретної конференції(директори) та автори, рецензенти, учасники та ін.

Розглянемо детальніше функціональні можливості кожної з групи користувачів зареєстрованих на сайті конференції:

- Адміністратори сайту : налаштування сайту, створення конференції; надавання ролей відповідальних за проведення конференції; підтримка у підготовці та проведенні конференції, архівування проведених конференцій.
- Менеджер конференції : здійснює контроль за встановленням сайту конференції, у тому числі за всіма акаунтами користувачів для цього сайту конференції. МК налаштовує сайт конференції і встановлює будь-який з окремих сайтів конференції (наприклад, Проблеми Сучасної Математики 2006 року, Проблеми Сучасної Математики 2007 року).
- Менеджер реєстрації : відповідальний за реєстрацію користувачів конференції.
- Директор секцій : відповідальний за керування поданням тез та презентацій у відповідні секції (потoki, категорії і т.д.), стежить за процесом огляду та редагування статей, а також підтверджує або відміняє участь доповідей у відповідних конференціях.
- Директори конференцій: організація конференції – визначає проблеми, які будуть висвітлені на конференції, утворює секції;
- підготовка до конференції; запрошує рецензентів до перегляду матеріалів; приймає рішення відносно поданих матеріалів; консультує рецензентів, повідомляє доповідачів, складає графік конференції.
- Автори, рецензенти, учасники :
 - автори реєструються на сайті, щоб завантажити тези доповіді; можуть подавати анотації, презентації
 - рецензенти отримують обліковий запис для перегляду матеріалів на сайті.
 - читачі можуть шукати та читати матеріали в залежності від прав даних директором конференції.

Також OCS підтримує локалізацію сайту на різних мовах, зокрема англійська, французька, італійська, іспанська та ін. На жаль, у списку підтримуваних мов немає української, тому була зроблена локалізація OCS на українську мову.

Варто зазначити, що система має мінімальну ступінь перевірки якого роду дії проводяться на сайті. На деяких кроках підтвердження своїх дій потрібно вводити «код з картинок», щоби засвідчити чи користувач робот чи ні.

Так як OCS є системою з відкритим програмним кодом, досить легко можна досягнути бажаного дизайну сайту. За допомогою цієї системи можна стандартизувати всі конференції факультету або університету.

Тестова версія сайту знаходиться на хостингу за адресою: http://conf_pmi.lnu.edu.ua/

1. Документація OCS - https://pkp.sfu.ca/ocs/ocs_documentation/
2. Open Conference Systems - <https://pkp.sfu.ca/ocs/>

УДК 519.6+330.46

*Б.Л. Боженко *** , Л.М. Kim* , Т.С. Нагірний *****

(* Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України,

** Політехніка Опольська (Польща),

*** Університет Зеленогурський (Польща))

**ДО ПИТАННЯ КЕРУВАННЯ СКЛАДНИМИ
ТЕХНІЧНИМИ СИСТЕМАМИ**

Для раціонального проектування а також керування експлуатацією складних технічних систем потрібно знати їх параметри. Одним з таких параметрів є надійність. Вона у значній мірі визначає якість, ефективність та інші характеристики системи, а інформація про неї дозволяє визначати оптимальні терміни профілактичних оглядів. Одним з підходів, що дозволяють моделювати та досліджувати такі системи є теорія графів. Для відновлювальної системи, яка складається з N елементів, граф станів представлено на Рис.1.

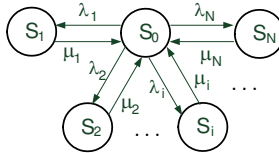


Рисунок 1. Граф станів складної системи.

На цьому рисунку S_0 – стан справної системи, ймовірність якого p_0 , S_i – стан системи, у якій несправним є i -ий елемент, ймовірність стану – p_i ($i = \overline{1, N}$); λ_i, μ_i – інтенсивність переходу системи зі стану S_0 до стану S_i та інтенсивність відновлення i -го елемента. Граф представлено для нормальної роботи системи, коли потоки відмови елементів та відновлення цих елементів є простими. У цьому випадку функціонування системи можна описати за допомогою рівнянь теорії масового обслуговування (рівнянь Колмогорова). Для стаціонарного у часі τ режиму для ймовірностей p_i справджуються співвідношення

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{-1}, \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} p_0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Однак, часто, зокрема коли елемент перебуває у фазі старіння, інтенсивність пошкоджень не узгоджується з експоненційним розподілом. У цій фазі для опису пошкоджуваності широко використовується розподіл Вейбула, функція розподілу ймовірностей якого $F(\tau) = 1 - \exp[-(\tau/\alpha)^\beta]$.

Параметри α, β можна визначити на основі статистичних даних використовуючи методи MLE, LSE, RRY, RRX [1].

При визначанні параметрів надійності методом статистичного моделювання Монте-Карло час виходу з ладу i -го елементу системи $\tau_j^{(i)}$ визначаємо за формулами

$$\tau_j^{(i)} = -\alpha (\ln \xi_j)^{1/\beta},$$

де ξ_j – значення випадкової величини рівномірно розподіленої на $[0, 1]$.

З метою раціонального керування експлуатацією складних систем потрібно знати оптимальні терміни оглядів, як кожного елементу системи так і системи в цілому. Оптимальним терміном огляду є значення $T = \tau_{op}^{(i)}$, у якому функція [2]

$$K(T) = \frac{C_F}{E(T)} \left[1 - R(T) \left(1 - \frac{C_M}{C_F} \right) \right]$$

приймає мінімальне значення. Тут $R(T)$ – функція надійності відповідного елементу системи (складної системи), $E(T) = \int_{t=0}^T R(T) dt$, C_M – витрати на консервацію системи, C_F – витрати спричинені відмовою системи.

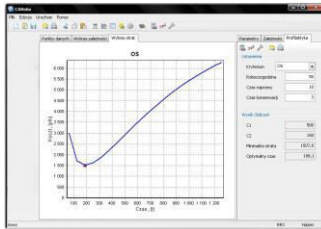


Рисунок 2. Розподіл функції $K(T)$ та оптимальний термін профілактичних оглядів

З точки зору раціонального керування актуальними стають питання визначення порядку монтажу (демонтажу) елементів. Для вибору оптимальних послідовностей можуть бути використані методи теорії графів.

1. Zhang Lifang. Linear regression parameter estimation methods for the Weibull distribution, BUAA – Beijing, China, 2008.
2. Muhlemann A.P., Oakland J.S., Lockyer K.G. Production and Operations Management. – London, Pitman, 1992. – 454 pp.

Ю.В. Бойчук

(Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України)

ІТЕРАЦІЙНИЙ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОНДУКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ В ПЛОСКОМУ ШАРІ

Розроблено ітераційний підхід для розв'язування нелінійних задач кондуктивно-променевого теплообміну в плоскому шарі, що поглинає, емітує та розсіює ІЧ-випромінювання, як в об'ємі, так і на межі розділу із зовнішнім середовищем, а також обмінюється із ним теплом за конвективним механізмом. Із застосуванням скінченно-елементної апроксимації створено алгоритм для чисельної реалізації методу. Проведено чисельне дослідження збіжності розробленого алгоритму.

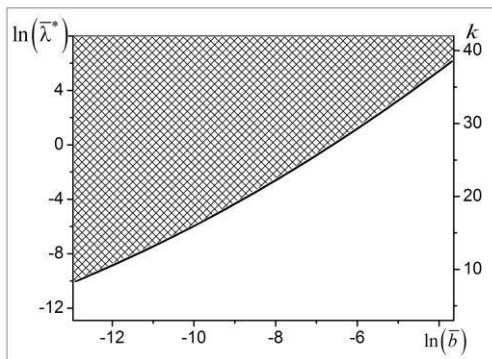
Процес кондуктивно-променевого теплообміну описує істотно нелінійна система інтегро-диференціальних рівнянь, яка містить взаємозв'язані рівняння теплопровідності та перенесення випромінювання. За урахування радіаційних властивостей поверхонь шару ці рівняння слід підпорядковувати взаємозв'язаним нелінійним і нелокальним крайовим умовам.

У доповіді розглядається ітераційний підхід для розв'язування прямої одновимірної задачі стаціонарного кондуктивно-радіаційного теплообміну в плоскому шарі, що випромінює, поглинає і розсіює ІЧ-радіацію в об'ємі і на поверхні та обмінюється теплом із зовнішнім середовищем через поверхню за променевим та радіаційним механізмами. Із застосуванням апроксимації скінченними елементами розроблено алгоритм чисельної реалізації ітераційного методу та проведено кількісні дослідження його збіжності.

Для реалізації ітераційного процесу за нульове наближення було використано умову радіаційної рівноваги та ізотропного розсіювання в об'ємі.

Для оцінки розробленого ітераційного підходу було проведено серію числових експериментів. Із отриманих результатів випливає, що його збіжність залежить, в основному, від співвідношення між безрозмірними коефіцієнтом теплопровідності $\bar{\lambda}$ та товщиною плоского шару $2\bar{b}$ – що більше $\bar{\lambda}$, тим швидше за фіксованого $\bar{b}$ збігається ітераційний процес. Тому для кожного $\bar{b}$ означимо $\bar{\lambda}^*$ таке, що для всіх $\bar{\lambda} \geq \bar{\lambda}^*$ ітераційний процес є збіжний. Залежність $\bar{\lambda}^*(\bar{b})$ в логарифмічній шкалі, яка отримана в результаті проведення числових експериментів, наведена на рисунку.

Заштрихована область на цьому рисунку відповідає області збіжності. На вертикальній шкалі подано кількість ітерацій, необхідних для розв'язування задачі за $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^*$.



Область збіжності ітераційного процесу

Застосування скінченно-елементної апроксимації дозволило істотно підвищити швидкість чисельної реалізації методу. Висока швидкодія розробленого алгоритму забезпечує можливість його використання для створення методів розв'язування обернених задач складного теплообміну в плоских шарах.

Обмеження області збіжності зумовлене тим, що зі зростанням товщини шару в околі його поверхні виникає граничний шар – область різкої зміни температури й інтенсивності випромінювання. Внаслідок цього задача стає сингулярно збуреною. Тому у подальших дослідженнях слід застосувати методи регуляризації до цієї задачі, і в такий спосіб розширити область збіжності ітераційного процесу.

1. Оцисик М. Н. Сложный теплообмен / М.Н Оцисик. – Москва: Мир, 1976. – 605 с.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов / Р Галлагер. Основы. Пер. с англ. – Москва: Мир, 1984. – 428 с.
3. Чекурін В. Ф. Ітераційний метод розв'язування нелінійних задач кондуктивно-променевого теплообміну в плоскому шарі / В.Ф. Чекурін, Ю.В. Бойчук // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2015. – Вип. 21. – С. 241–249.
4. Daryabeigi K. Heat Transfer in High-Temperature Fibrous Insulation / K. Daryabeigi // J. of Thermophysics and Heat Transfer. – 2003, –Vol. 1. 10–20pp.
5. Ozisik M.N. Heat Transfer: A Basic Approach / M.N. Ozisik. Mcgraw-Hill College, 1985. – 576 p.

УДК 519.6

І.В. Борачок, Р.С. Ханко

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ
РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА У ТРИВИМІРНИХ ДВОЗВ'ЯЗНИХ
ОБЛАСТЯХ АЛЬТЕРНУЮЧИМ МЕТОДОМ**

Задача Коші для рівняння Лапласа виникає у кардіології, геофізиці, електро імпедансній томографії. Ця задача є некоректною, бо відсутня стійкість розв'язку за вхідними даними.

У даній роботі ми розглядаємо ітераційний альтернуючий метод розв'язування задачі Коші [1], який є регуляризуючою процедурою для отримання стійкого розв'язку. На кожному кроці ітераційного процесу ми будемо розв'язувати дві коректні мішані задачі прямим методом інтегральних рівнянь. Умова зупинки ітераційного процесу - принцип нев'язки Морозова [2].

Нехай $D_k \subset R^3, k=1,2$ - обмежені однозв'язні області з границями $\Gamma_k, k=1,2, D_1 \subset D_2$ і $D = D_2 / \overline{D_1}$. Потрібно знайти функцію $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, яка є розв'язком рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \text{ в } D \quad (1)$$

і задовольняє граничні умови:

$$u = f \text{ на } \Gamma_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ на } \Gamma_2, \quad (2)$$

де $f, g \in C(\Gamma_2)$ - задані функції. Також необхідно реконструювати значення гармонічної функції і її нормальної похідної на внутрішній границі Γ_1 .

Розглянемо дві мішані задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ на } \Gamma_1, \\ u = f \text{ на } \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ u = w \text{ на } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ на } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (4)$$

Альтернуючий алгоритм для знаходження розв'язку задачі Коші (1)-(2) є наступним:

- Першу апроксимацію розв'язку u_0 задачі Коші (1)-(2) отримуємо як розв'язок задачі Неймана-Діріхле (3) з $h = h_0 = 0$.

- За відомим u_{2k} знаходимо u_{2k+1} - як розв'язок задачі Діріхле-Неймана (4) з $w = u_{2k}|_{\Gamma_1}$.
- Далі знаходимо елемент u_{2k+1} - це розв'язок задачі (3) з $h = \frac{\partial u_{2k+1}}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}$.

Мішані задачі будемо розв'язувати непряним методом інтегральних рівнянь. Подамо розв'язок задачі (3) у вигляді суми потенціалів простого шару:

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D, \quad (2)$$

де $\varphi_k \in C(\Gamma_k)$, $k=1,2$ - невідомі густини, а Φ - фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в R^3 . Для задачі Неймана-Діріхле (3), враховуючи властивості потенціалів, отримуємо систему лінійних ІР:

$$\begin{cases} S_{21}\varphi_1 + S_{22}\varphi_2 = f \text{ на } \Gamma_2 \\ \left(-\frac{1}{2}I + K_{11}\right)\varphi_1 + K_{12}\varphi_2 = h \text{ на } \Gamma_1, \end{cases} \quad (5)$$

де граничні інтегральні оператори мають вигляд:

$$(S_{ij}\varphi)(x) = \int_{\Gamma_j} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad (K_{ij}\varphi)(x) = \int_{\Gamma_j} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_i(x)} ds(y), \quad x \in \Gamma_i.$$

Тоді значення функції на Γ_1 можна визначити так:

$$u = S_{11}\varphi_1 + S_{12}\varphi_2, \text{ на } \Gamma_1.$$

Вважаючи, що поверхні Γ_k можуть бути біективно відображені на одиничну сферу Ω , здійснюється параметризація системи ІР (5) з виділенням наявних особливостей у вигляді вагових функцій.

Параметризовані системи інтегральних рівнянь ми розв'язуємо дискретним проєкційним методом Гальоркіна, невідомі густини ми апроксимуємо лінійною комбінацією сферичних гармонік

$$\varphi_l \approx \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \varphi_{k,m}^l Y_{k,m}^R(\hat{x}), \quad l=1,2, n \in \mathbb{N}, \hat{x} \in \Omega.$$

Для наближеного обчислення поверхневих інтегралів з особливістю і без особливостей в ядрі ми використаємо наступні кубатурні формули:

$$\int_{\Omega} f(x) ds(x) \approx \frac{\pi}{n'+1} \sum_{j=1}^{n'+1} \sum_{k=0}^{2n'+1} \alpha_j f(x_{jk}), \quad \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|} ds(y) \approx \frac{\pi}{n'+1} \sum_{j=1}^{n'+1} \sum_{k=0}^{2n'+1} \beta_j f(T_x^{-1} x_{jk}),$$

де $\alpha_j = \frac{2(1-t_j^2)}{[n'+1P_n(t_j)]^2}$, $\beta_j = \alpha_j \sum_{n=0}^{n'+1} P_n(t_j)$, x_{jk} - множина точок на одиничній сфері, P_n - поліном Лежандра степеня n , t_j - нулі полінома

Лежандра P_N , $T_x: \Omega \rightarrow \Omega: T_x x = (0,0,1)^T$ - ортогональний оператор. Відомо, що дані кубатурні формули мають експоненційний порядок збіжності. Аналогічно розв'язуємо другу мішану задачу (4). Теоретичні результати підтверджуються проведеними чисельними експериментами.

Приклад 1. Нехай внутрішня границя області Γ_1 - еліпсоїд: $\Gamma_1 = \{\xi(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, а зовнішня $\Gamma_2 = \{\xi(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ - сфера. Вигляд області наведено на Рис. 1. Граничні умови мають вигляд:

$$f(x) = \cos x_1 e^{x_2}, x \in \Gamma_2, g(x) = (-\sin x_1, \cos x_1, 0) e^{x_2}, \nu(x) >, x \in \Gamma_2.$$

Результати обчислень задачі Коші (1)-(2): значення похибок розв'язку і нормальної похідної на внутрішній границі Γ_1 , при $n = n' = 8$, в залежності від рівня шуму наведені в таблиці 1. Крім того наведені графіки даних Коші на внутрішній границі (графік функції зображено на Рис. 2, а нормальної похідної - на Рис. 3).

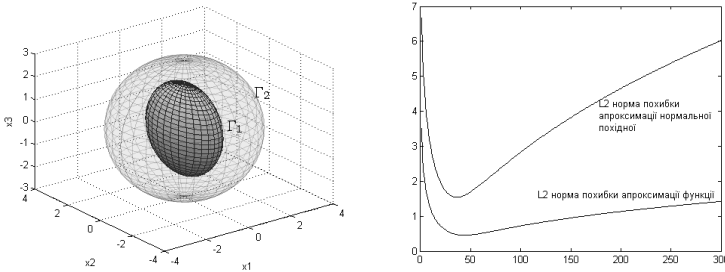


Рис 1. Вигляд області і графіки похибок функції і її нормальної похідної в залежності від кількості ітерацій для 1% збурених даних.

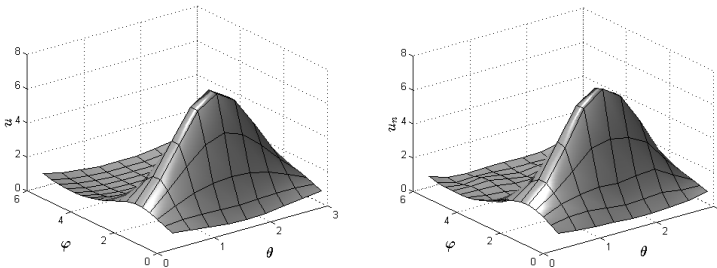


Рис 2. Точне і наближене значення розв'язку на внутрішній границі Γ_1 при 1% збурених даних

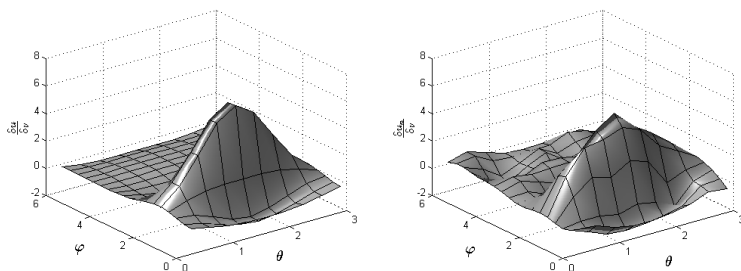


Рис 3. Точне і наближене значення нормальної похідної від розв'язку на внутрішній границі Γ_1 при 1% збурених даних.

Таблиця 1. Абсолютні похибки значень функції і її нормальної похідної в залежності від рівня шуму при $n = n' = 8$

рівень шуму	кількість ітерацій	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$	$\left\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\ _{L_2(\Gamma_1)}$
0%	227	8.45e-001	3.85e-001
1%	58	8.39e-001	3.04e-000
3%	27	1.24e-000	4.03e-000

1. *Chapko R.* On the use of an integral equation approach for the numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in a double connected planar domain / R.Chapko, T.Johansson, Y.Savka// IPSE, 22, 2014, 130-149.
2. *Morozov V.A.* On the solution of functional equations by the method of regularization/ V.A.Morozov// Dokl. Akad. Nauk SSSR 167 (1966), 510-512, English Transl.:Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 414-417.

УДК 517.955:544.034.23

А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк

(Рівненський державний гуманітарний університет)

МОДЕЛЮВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНОСЕННЯ В НАНОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Моделювання процесів тепло-масопереносу в нанопористих середовищах [1, 2] є перспективним напрямком досліджень стосовно прогнозування ефективності роботи очисних пристроїв, що поєднують адсорбційні, хімічні та теплові процеси. Оскільки дифузійні та масообмінні складові відповідних процесів в порівнянні з конвективними є лімітуючими, відповідні модельні задачі, що описують тепло-масоперенесення в нанопористих середовищах, є сингулярно збуреними, тобто містять малі множники при деяких членах.

Розроблено підхід стосовно дослідження сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного тепло-масоперенесення в нанопористих середовищах з урахуванням масообміну та зворотнього впливу характеристик процесу (температури, що зростає в результаті екзотермічної хімічної реакції між забруднюючими речовинами) на характеристики середовища (коефіцієнти дифузії, масообміну). Відповідна модельна задача описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \frac{\partial c_j}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(D_j(T) \frac{\partial c_j}{\partial x} \right) - v(x) \frac{\partial c_j}{\partial x} - \varepsilon \sum_{s=1}^m \tilde{f}_{j,s}(c_j, c_s, T) - \varepsilon S_j^*(T) \left(\frac{\partial q_j}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}, \\ \sigma_2 \frac{\partial q_j}{\partial t} &= \varepsilon D_j^* r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial q_j}{\partial r} \right) - \varepsilon \sum_{s=1}^m \tilde{f}_{j,s}(q_j, q_s, T), \quad j = \overline{1, m}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \varepsilon a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^m f_{j,s}^*(c_j, c_s), \\ c_j(x, t) \Big|_{t=0} &= c_j^0(x), \quad q_j(x, r, t) \Big|_{t=0} = q_j^0(x, r), \quad T(x, t) \Big|_{t=0} = T^0(x), \\ c_j(0, t) &= c_{j*}(t), \quad \frac{\partial c_j(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad T(0, t) = T_*(t), \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \\ q_j(x, r, t) \Big|_{r=R} &= k_j(T) c_j(x, t), \quad \frac{\partial q_j(x, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \\ 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq t < \infty, \end{aligned}$$

де $c_j(x, t)$ – концентрація j -того сорту розчинної речовини у міжчастинковому просторі, $q_j(x, r, t)$ – концентрація j -того сорту

розчинної речовини в мікрочастинці, $T(x,t)$ – температура середовища, R – радіус мікрочастинок, σ , σ^* – коефіцієнти пористості відповідно макро- та мікросередовища, $D_j(T) = \varepsilon d_j(T)$ та $D_j^*(T) = \varepsilon d_j^*(T)$ відповідно характеризують швидкість протікання процесів дифузійного масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок, а функції $S_j^*(T) = \varepsilon S_j(T)$ характеризують вплив внутрішньочастинкового дифузійного перенесення на міжчастинковий, ε – малий параметр, $\tilde{f}_{j,s}(c_j(x,t), c_s(x,t), T(x,t))$ та $\tilde{f}_{j,s}^*(q_j(x,r,t), q_s(x,r,t), T(x,t))$ – неперервні обмежені функції, що характеризують швидкість масообміну між j -ою та s -тою компонентою відповідно в міжчастинковому просторі та в мікрочастинці, εa – коефіцієнт температуропровідності, $f_{j,s}^*(c_j(x,t), c_s(x,t))$ – неперервні обмежені функції, що характеризують швидкість підвищення температури середовища внаслідок хімічної реакції, $k_j > 0$ – константи адсорбційної рівноваги для кожного сорту розчинних речовин. Всі функції, які фігурують в початкових та граничних умовах є достатньо гладкими та узгодженими між собою в кутових точках даної області. Зауважимо, що питання ідентифікації параметрів задач дифузії в нанопористому середовищі досліджено зокрема в [3].

Побудовано алгоритм асимптотичного розв'язку поставленої задачі в припущенні, що мікрочастинки миттєво нагрівається чи охолоджуються, тобто немає зміни температури вздовж радіуса нанопористої частинки.

1. *Rolando M.A. Roque-Malherbe. Adsorption and Diffusion in Nanoporous Materials / Rolando M.A. Roque-Malherbe . – CRC Press, 2012. – 288 p.*
2. *Петрик М.Р. Моделирование и анализ концентрационных полей нелинейной конкуритивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц / М.Р. Петрик, Ж. Фрессард, Д.М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 4. – С. 73–83.*
3. *Сергиенко И.В. Идентификация градиентными методами параметров задач диффузии вещества в нанопористой среде / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека // Пробл. управления и информатики. – 2010. – № 6. – С. 5–18.*
4. *Бомба А.Я. Асимптотичний метод розв'язання одного класу модельних сингулярно збурених задач процесу масопереносу в різнопористих середовищах / А.Я. Бомба, І.М. Присяжнюк, О.В. Присяжнюк // Доповіді НАН України. – 2013.- № 3. – С. 28-34.*

УДК 519.612.2

В.В. Вербіцький, І.М. Іванищева***

(* Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,

** Одеський національний політехнічний університет)

ПЕРЕУПОРЯДКУВАННЯ СІДЛОВИХ МАТРИЦЬ

Відомо, що ітераційні методи підпросторів Крилова є ефективними методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з великими розрідженими матрицями[1]. Однак, методи підпросторів Крилова потребують передобумовлювання системи. В роботі [2] запропоновано передобумовлювач на основі неповного узагальненого розкладання Холеського для систем з розрідженими сідловими матрицями виду

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & B^T \\ -B & C \end{bmatrix},$$

де $A \in R^{n \times n}$ – симетрична додатно визначена матриця, $B \in R^{m \times n}$ ($n \geq m$) – матриця повного стрічкового ранга, $C \in R^{m \times m}$ – симетрична напівдодатно визначена матриця.

Однією з переваг такого передобумовлювача є те, що передобумовлена система стає додатно визначеною, що дозволяє використовувати метод спряжених градієнтів.

Добре відомо, що ефективність передобумовлювача, який будується з використанням неповного розкладання матриці, залежить від переупорядкування матриці.

Оскільки, сідлова матриця є симетричною з точністю до знака, а узагальнений метод Холеського використовує таку «симетричність», то є сенс будувати таке переупорядкування сідлової матриці, яке зберігає симетричність.

Одним з найефективніших методів переупорядкування симетричних додатно визначених матриць є метод мінімальної степені[3].

Нами запропоновано алгоритм переупорядкування сідлової матриці на основі алгоритму мінімальної степені. Алгоритм мінімальної степені зручно описувати за допомогою графів винятків. Адаптація алгоритму до сідлових матриць складається з наступного. Водяться два типи вершин графа: переміщення та моменти. Моменти пов'язані з діагональними елементами матриці A , переміщення – з діагональними елементами матриці C . Переміщення нумерується лише тоді, коли хоча б один пов'язаний з ним момент уже занумеровано.

Алгоритм реалізовано з використанням бібліотеки CSparse на мові програмування C [4].

Проведено обчислювальні експерименти.

На Рисунку зображено портрети розрідженої сідлової матриці до (зліва) та після переурядкування. Матриця має 5061 ненульовий елемент. Узагальнений множник Холеського містить 43551 ненульових елементів. Узагальнений множник Холеського переупорядкованої матриці має 7669 ненульових елементів. Оскільки при побудові неповного розкладання найчастіше обчислюють лише ті елементи множника, індекси яких відповідають ненульовим елементам матриці, то слід очікувати, що розкладання переупорядкованої матриці буде краще апроксимувати вихідну матрицю.

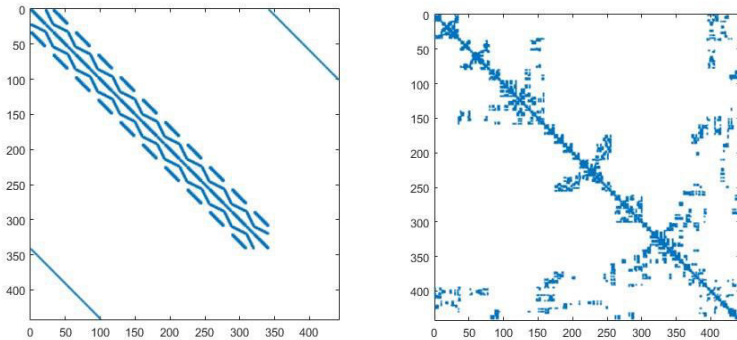


Рисунок. – Портрети сідлової матриці до та після переупорядкування.

1. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. Second edition / Y. Saad. – SIAM, Philadelphia, PA, 2003. – 547 p.
2. *Вербицкий В.В.* Предобуславливание седловых матриц с использованием неполного обобщенного разложения Холесского / В.В. Вербицкий, И.Н. Иванищева // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2013.– Т. 18, вип. 4(20). – С. 22-30.
3. *Patrick R. Amestoy.* An approximate minimum degree ordering algorithm / Patrick R. Amestoy, Timothy A. Davis, Iain S. Duff // SIAM J. Matrix Analysis & Applic. – 1996. – Vol 17, no 4. – P. 886-905.
4. *Timothy A. Davis.* Direct methods for sparse linear systems / Timothy A. Davis. – SIAM, 2006. – 211 p.

УДК 519.6

О.Н. Вітюк, О.Д. Кічмаренко, К.Ю. Сапожнікова

(Одеський національний університет імені І.І.Мечникова)

ПРО НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З МАКСИМУМОМ

Рівняння з максимумом [3] є різновидом функціонально-диференціальних рівнянь, які виникають при розв'язанні деяких прикладних задач. Дослідженню питань розв'язності початкової задачі для диференціальних рівнянь з максимумом присвячені публікації [2]-[8]. В нашій роботі представлено обґрунтування чисельного методу побудови наближеного розв'язку початкової задачі для рівняння з максимумом.

Розглянемо наступну початкову задачу:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \max_{\tau \in \sigma(\tau)} x(\tau)), \quad t \in J = [0, a], \quad (1)$$

$$x(t) = 0, \quad t \in [-h, 0], \quad \sigma(t) = [t-h, t], \quad h > 0. \quad (2)$$

Будемо вважати, що $f(t, x, y) : J \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє наступним умовам:

(i) $f(t, x, y)$ – неперервна;

(ii) задовольняє умові Ліпшиця

$$\left| f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq K \left| x - \bar{x} \right| + L \left| y - \bar{y} \right|.$$

Розв'язком задачі (1), (2) будемо називати функцію $x(t) \in C^1([-h, a])$, яка задовольняє рівнянню (1) для $t \in J$ та умові (2).

При виконанні умов (i), (ii) нами було доведено [1], що для задачі (1), (2) існує єдиний розв'язок, причому розв'язок $x(t)$ шукаємо у вигляді

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in \sigma(0), \\ \int_0^t v(s) ds, & t \in J, \end{cases}$$

$$\text{де } \max_{\tau \in \sigma(\tau)} x(\tau) = \max_{\tau \in \sigma(\tau)} \int_0^{\tau} v(s) ds,$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \in \sigma(0), \\ f(t, \int_0^t v(s) ds, \max_{\tau \in \sigma(\tau)} \int_0^{\tau} v(s) ds), & t \in J. \end{cases}$$

Алгоритм побудови чисельного розв'язку задачі (1), (2).

На проміжку J задамо сітку вузлів $t_k = kl$, де $l = \frac{a}{N}$ - крок сітки, $k = 0, 1, 2, \dots$, причому $h = lp$ ($p \geq 1$ - ціле число), та визначимо $x_k \approx x(t_k)$ наступним чином

$$x_{n+1} = l \sum_{k=0}^n v_k,$$

де $v_{n+1} = f(t_{n+1}, x_{n+1}, \bar{x}_{n+1})$, $\bar{x}_{n+1} = l \sum_{i=0}^{n+1-k} v_i$ - наближене значення максимуму

$$\bar{x} = \max_{\tau \in \sigma(\tau_{n+1})} x(\tau).$$

Має місце наступна теорема про збіжність.

Теорема. Нехай функція $f(t, x, y) : J \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умовам (і), (ii) та $f(0, 0, 0) = 0$, тоді чисельний метод є збіжним, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max |x(t_n) - x_n| = 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

1. Витюк А.Н. О разрешимости начальной задачи для дифференциального уравнения с максимумом/ А.Н.Витюк, О.Д.Кичмаренко, Е.Ю.Сапожникова // Вісн. Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.-2015.-Т.20, Вип.1, (25).-С.29-39.
2. Георгиев Л.О. проблеме непрерывной зависимости решения дифференциального уравнений с "максимумом" от параметра/ Георгиев Л., Мунтян В., Шпакович В. – Акад.Наук Украины, ССР. – 1987.
3. Магомедов А.Р. Обыкновенные дифференциальные уравнения с максимумом / А.Р.Магомедов. - Баку: Элм., 1991.-220 с.
4. Angelov V. On the functional-differential equations with “maximums” / Angelov V., and Bainov D.- Applicable Anal. – 1983, Vol.16, Issue 3.- 187–194 pp.
5. Bainov D.D. Differential equations with maxima/ Bainov D.D., Hristova S.G. – London,N.Y.:CRC Pres., 2011.-291 pp.
6. Georgiev L. On the existence and uniqueness of solutions for maximum equations / Georgiev L., and Angelov V. – Glasnik Matematsicki. – 2002. – Vol. 37, Issue 2. – 275–281 pp.
7. Kichmarenko O.D. Full averaging scheme for differential equation with maximum /O.D. Kichmarenko, K.Yu.Sapozhnikova // Contemporary Analysis and Applied Mathematics. – 2015. – Vol.3, Issue 1. – 113-122 pp.
8. Sobeih M. A study for a unique solution for a vector differential equation with maximum/Sobeih M., Aly E. // An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat. – 1991. – Vol. 37, Issue 1. – 27–36 pp.

УДК 627.324.2/3:532.546:532.72

А.П.Власюк, Н.А.Жуковська

(Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. акад. Степана Дем'янчука, м. Рівне
Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО- МАСОПЕРЕНОСЕННЯ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАННИЙ СТАН ҐРУНТОВОГО МАСИВУ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В ТРИВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

Проведено математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан (НДС) ґрунтового масиву в тривимірному випадку. Ґрунтовий масив має форму прямокутного паралелепіпеда, що займає область $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2, 0 < z < l_3\}$. При цьому $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, де Ω_1 – область повністю водонасиченого ґрунтового масиву; Ω_2 – область ґрунтового масиву в природному стані. Вільна поверхня знаходиться на рівні Γ_0 і вважається нерухомою.

Математичну модель даної задачі в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею [1]:

$$\begin{aligned} & \mu(c, T) \Delta U + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} \varepsilon_\theta + \\ & + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \\ & - \left(\left(3 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \right) T + (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \alpha_T + X = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu(c, T) \Delta V + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial y} + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} \varepsilon_\theta + \\ & + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \\ & - \left(\left(3 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \right) T + (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \alpha_T + Y = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu(c, T) \Delta W + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z} + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial z} \varepsilon_\theta + \\ & + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \\ & - \left(\left(3 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial z} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \right) T + (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \alpha_T + Z = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

$$X = \begin{cases} \frac{dp_1}{dx}, & \mathbf{X} \in \Omega_1, \\ 0, & \mathbf{X} \in \Omega_2, \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} \frac{dp_2}{dy}, & \mathbf{X} \in \Omega_1, \\ 0, & \mathbf{X} \in \Omega_2, \end{cases}, \quad Z = \begin{cases} \gamma_{\text{ж}} + \frac{dp_3}{dy}, & \mathbf{X} \in \Omega_1, \\ \gamma_{\text{np}}, & \mathbf{X} \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T) \nabla c) - \mathbf{v} \nabla c - \gamma(c - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\lambda_T \nabla T) - \rho c_p \bar{\mathbf{v}} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c, T) \nabla h + \mathbf{v}_c \nabla c + \mathbf{v}_T \nabla T, \quad \text{div} \mathbf{v} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{v} c - \mathbf{D}(c, T) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p \bar{\mathbf{v}} T - \lambda_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right), \quad \mathbf{X} \in \Omega,$$

$$\sigma_x = \lambda(c, T) \varepsilon_\theta + 2\mu(c, T) \varepsilon_x - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \alpha_T \bar{T},$$

$$\sigma_y = \lambda(c, T) \varepsilon_\theta + 2\mu(c, T) \varepsilon_y - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \alpha_T \bar{T},$$

$$\sigma_z = \lambda(c, T) \varepsilon_\theta + 2\mu(c, T) \varepsilon_z - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \alpha_T \bar{T},$$

$$\tau_{xy} = 2\mu(c, T) \varepsilon_{xy}, \quad \tau_{xz} = 2\mu(c, T) \varepsilon_{xz}, \quad \tau_{yz} = 2\mu(c, T) \varepsilon_{yz}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (9)$$

з відповідними початковими умовами для невідомих функцій у всій області Ω , граничними умовами на границях досліджуваної області та умовами спряження на вільній поверхні Γ_0 .

Отримано чисельний розв'язок крайової задачі (1)-(9). Показано, що тепло-масоперенесення значно змінює картину напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з вільною поверхнею.

1. Власюк А.П. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния основания грунтовой плотины со свободной поверхностью под влиянием тепло- и массопереноса в двумерном случае / А.П Власюк, Н.А. Жуковская // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 2. – С. 324-335.

УДК 627.324.2/3:532.546:532.72

А.П. Власюк, В.В. Жуковський

(Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. акад. Степана Дем'янчука, м. Рівне
Національний університет водного господарства
та природокористування, м.Рівне)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІГРАЦІЇ РАДІОНУКЛІДІВ У КАТАЛІТИЧНОМУ ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ З ПАСТКАМИ У НЕЛІНІЙНОМУ ВИПАДКУ

Розглядається задача вертикальної міграції радіонуклідів у насиченому пористому середовищі, що містить мікро- або наночастинки, у нелінійному випадку з урахуванням локальних переходів між різними станами. Математичну модель даної задачі в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею [1]:

$$\sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) - \nu(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \theta \left. \frac{\partial q}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_3(c_3) \frac{\partial c_3}{\partial x} \right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \gamma_3 c_3, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D_0 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\nu = -k(c_1) \frac{dh}{dx} + \nu_c \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad \operatorname{div} \bar{\nu} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$q(x, r, t) \big|_{r=R} = k_e \cdot c_2(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (6)$$

з відповідними крайовими умовами для невідомих функцій.

Отримано чисельний розв'язок поставленої крайової задачі (1)-(6). Проведено ряд чисельних експериментів та здійснено їх аналіз. Показано вплив мікро- та наночастинок на швидкість міграції радіонуклідів. Це дає можливість робити оцінку щодо ефективності використання очищуючих частинок та прогнозувати ступінь забруднення пористих середовищ у зоні повного насичення і їх подальше використання.

1. *Власюк А.П.* Математичне моделювання міграції радіонуклідів у ненасиченому пористому середовищі у двохвимірному лінійному випадку / *А.П. Власюк, В.В. Жуковський* // Тез. Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів», 19-22 лютого 2015 року, Рівне, 2015. – С. 44.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНОСЕННЯ СОЛЕЙ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНІЙ ФІЛЬТРАЦІЇ ПІДЗЕМНИХ ВОД ТА ВОЛОГОПЕРЕНОСЕННІ У НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНОМУ ҐРУНТІ З РУХОМОЮ ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Досліджено перенесення сольових розчинів під впливом нестационарної фільтрації підземних вод та вологоперенесення в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві, що містить дрена, при наявності рухомої вільної поверхні.

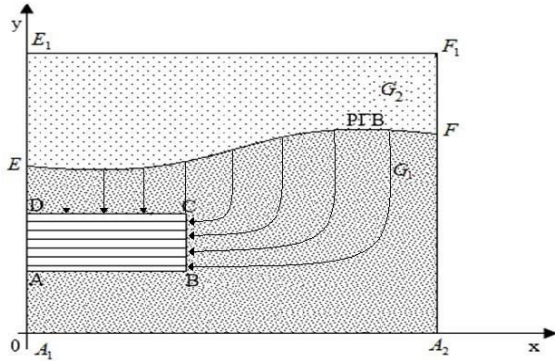


Рис. 1 Фільтрація сольового розчину до дрена

Математична модель даної задачі у загальноприйнятих позначеннях описується наступною крайовою задачею [1, 2]:

$$\frac{\partial \left(D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right)}{\partial y} - v'_x(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} - v'_y(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma_1(c_1 - C^*) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1(c_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1(c_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = a \frac{\partial h_1}{\partial t}, \quad (2)$$

$$v'_x(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad v'_y(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} + v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y}, \quad (3)$$

$$h_1|_{EF} = y, \quad \frac{\partial h_1}{\partial n} \Big|_{BC} = 0, \quad h_1|_{AB} = H_1, \quad h_1|_{CD} = H_2, \quad h_1|_{AF} = y, \quad (4)$$

$$c_1(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial c_1}{\partial n} \right|_{AB \cup BC \cup CD} = 0, \quad \left. \frac{\partial c_1}{\partial n} \right|_{DE} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_x(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} - v_y(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} - \gamma_2(c_2 - C^*) = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\mu(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} \right), \quad (5)$$

$$v_x(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + v(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x}, \quad v_y(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} + v(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x}, \quad (6)$$

$$h_2(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), \quad h_2|_{EF} = y, \quad \left. \frac{\partial h_2}{\partial n} \right|_{FL \cup LK \cup KE} = 0, \quad (9)$$

$$c_2(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial c_2}{\partial n} \right|_{FL \cup LK \cup KE} = 0. \quad (10)$$

На межі областей повного та неповного насичення (кривій депресії) задаються умови спряження для напорів, концентрації та потоків солей відповідно

$$h_1|_{EF} = h_2|_{EF}, \quad \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \bigg|_{EF} = 0, \quad (11)$$

$$c_1|_{EF} = c_2|_{EF}, \quad v_1 c_1 - D_1 \frac{\partial c_1}{\partial n} = v_2 c_2 - D_2 \frac{\partial c_2}{\partial n}.$$

Для задачі (1)-(11) побудовано монотонну різницеву схему з використанням локально-одновимірного методу О.А. Самарського. Розроблено обчислювальний алгоритм та програмне забезпечення розв'язування крайової задачі та проведено серію чисельних експериментів при різних вихідних даних. В результаті чого встановлено положення вільної поверхні, розподіл поля напорів та концентрації солей в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві.

1. *Сергиенко И.В.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопечкий., В.С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 1991. – С. 27-32
2. *Власюк А.П.* Математичне моделювання солеперенесення під впливом нестационарної фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах / А.П. Власюк, Т.П. Цветкова // Тез. І Міжн. XX Всеукр. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2014. – С. 56.

ДО ВИКОРИСТАННЯ КВАДРАТИЧНИХ АПРОКСИМАЦІЙ КООРДИНАТ ДЛЯ ПОБУДОВИ СІТОК МСЕ

З багатьох причин популярними на сьогоднішній день є двоетапні схеми генерації 3D сіток. На першому кроці із залученням відповідних вихідній задачі евристик виконується груба декомпозиція досліджуваної області у набір геометричних примітивів. Класичні форми останніх дають змогу на наступному етапі повністю автоматизувати процес подальшої деталізації сітки.

Поширеним способом для цього є вибір однакових типів примітивів та скінчених елементів, що сприяє застосуванню концепції ізопараметричного відображення поділеного потрібним чином на елементи «стандартного» примітива на вихідні криволінійні.

У випадку застосування вищих, аніж лінійні, порядків апроксимації координат можливість маніпулювання серединними вузлами на ребрах примітивів стає гнучким інструментом зміни концентрації сітки елементів у потрібних ділянках досліджуваної області, що стає ключовою перевагою в умовах жорсткої економії обчислювальних ресурсів у 3D аналізі.

На практиці за ізопараметричний базис часто вибирають квадратичні та кубічні серендипові апроксимації, які, втім, володіють відомим [1] недоліком виродження в умовах надмірного зсуву серединних вузлів елементів у напрямку кутових. Таким чином, візуально доволі легко контрольована у двовимірному випадку ситуація перетворюється у гостру проблему за вимушеного використання складної геометрії скінчених елементів у 3D розрахунках.

Автором апробовано методики поточного контролю за якістю сітки на основі апіорних оцінок допустимих границь зсуву серединних вузлів та спостереження за якобіаном перетворення координат. Оскільки гарантованої якості розбиття області на елементи досягти так і не вдалося, увагу було перенесено на пошук окремого (не ізопараметричного) поточкового перетворення координат, яке не вироджувалось би за будь-якого зсуву центральних вузлів елемента щодо кутових. Втім, ні в класі степеневих, ні тригонометричних, ні інших нелінійних функцій відповідного базису для апроксимації координат знайдено не було.

В даній роботі показано, що для побудови базису не виродженого поточкового перетворення координат все ж можна скористатись класичними серендиповими апроксимаціями, внівши у вигляд їхніх функцій певні зміни. Зокрема, в одномірному випадку для цього

достатньо вдвоє послабити вплив функції, що відповідає серединному вузлу елемента порівняно з кутовими.

$$N_2(x) = 1 - x^2 \quad \text{Р} \quad N_2(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

Порушення умови типу Лагранжа тут є допустимим, позаяк вигляд залежності зміни густини сітки елементів від зміщення серединного вузла у практичних застосуваннях є непринциповим. Іншою є ситуація у 2D та 3D координатах, де виконання вищезгаданої умови є обов'язковим. Зменшення впливу функцій, що відповідають серединним вузлам тут мусить компенсуватися збільшенням впливу збоку інших функцій базису. Встановлено закономірності такого перерозподілу для біквадратичних серендипових апроксимацій:

$$N_i(x, h) = \frac{1}{2r}(1 - x^2)(1 + r \cdot h_i h), \quad h_i = \pm 1, \quad i = 5, 7$$

$$N_i(x, h) = \frac{1}{2r}(1 - h^2)(1 + r \cdot x_i x), \quad x_i = \pm 1, \quad i = 6, 8$$

де r – штучно введений коефіцієнт чутливості згущення сітки до зсуву серединного вузла у напрямку кутового. Емпірично встановлено, що величину даного коефіцієнта слід вибирати більшою, ніж найбільше на сітці серед усіх співвідношень між частинами поділених серединними вузлами ребер елементів. Більш точні оцінки вимагають подальших досліджень. Втім, практичне використання технології показало, що для візуального контролю якості побудованої сітки елементів в тонких налаштуваннях цього коефіцієнта реальної потреби немає і значення $r = 10$ задовольняє всім розглянутим випадкам.

Отримано також вигляд базисних функцій і у тривимірному випадку.

Запропоновану технологію інтегровано в пакет 3D аналізу напружено-деформованого стану зубощелепного апарату людини в умовах функціонального навантаження.

1. *Зенкевич О.* Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
2. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М.: Мир, 1979. — 392 с.
3. *Хомченко А.Н.* Геометрия серендиповых аппроксимаций / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, П.И. Гучек // Прикл. геом. и инж. графика. — К.: Будівельник, 1996. — Вып. 59. — С. 40-42.

УДК 519.6:517.925

О.В. Вовк*, Г.А. Квасниця*, Г.А. Шинкаренко*,**

(*Львівський національний університет імені Івана Франка,

**Опольський політехнічний університет)

АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНКИ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ ДЛЯ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ КРУЧЕННЯ ПРИЗМАТИЧНИХ СТРИЖНІВ

Метою даної роботи є побудова апостеріорних оцінок похибок апроксимацій методу скінченних елементів (МСЕ) розв'язку задачі про кручення пружних призматичних стрижнів (див. [3-5]).

Розглядатимемо задачу про скручування пружного неоднорідного призматичного стрижня D довжини $l > 0$ і сталого поперечного перерізу Ω з ліпшицевим контуром $\Gamma = \partial\Omega$:

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2) \in \Omega \in \mathbb{R}^2, x_3 \in (0, l)\}.$$

Вважаємо, що бічна поверхня стрижня $S = \Gamma \times (0, l)$ вільна від зовнішнього навантаження, а його торці навантажено силами, еквівалентними крутному моменту M . Згідно гіпотези Сен-Венана [1] у кожному поперечному перерізі Ω стрижня компоненти вектора його пружних зміщень $u = \{u_i(x, x_3)\}_{i=1}^3$ подаються у вигляді такого відокремлення змінних:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -\alpha x_2 x_3, \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 x_3, \quad u_3(x_1, x_2, x_3) = \alpha \psi(x_1, x_2),$$

де $\psi = \psi(x_1, x_2)$ – так звана функція кручення Сен-Венана, α – кут закручування, сталий для всіх волокон стрижня, паралельних його осі. Це припущення дозволяє звести задачу кручення пружного призматичного стрижня до крайової задачі Неймана вигляду:

$$\begin{cases} \text{знайти } \psi = \psi(x) \text{ таку, що} \\ -\nabla \cdot (G \nabla \psi) = \nabla \cdot (G z) \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ -n \cdot (G \nabla \psi) = G n \cdot z \quad \text{на } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

де вектор $z = (z_1, z_2) := (-x_2, x_1)$, задана функція $G = G(x)$ описує модуль

зсуву матеріалу стрижня, $n = \{\cos(n, x_i)\}_{i=1}^2 = \left(\frac{dx_2}{ds}, -\frac{dx_1}{ds} \right)$ є одиничним

вектором зовнішньої нормалі до межі Γ , а оператор $\nabla := \{\partial / \partial x_i\}_{i=1}^2$ визначає градієнт скалярної функції.

Відповідна (1) варіаційна задача формулюється у вигляді:

$$\begin{cases} \text{задано } z = (-x_2, x_1) \in \mathbb{R}^2, \quad W = \{w \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} w dx = 0\}; \\ \text{знайти } \psi \in W \text{ таку, що } a(\nabla \psi + z, \nabla w) = 0 \quad \forall w \in W, \end{cases} \quad (2)$$

де білінійна форма $a(\cdot, \cdot) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ визначена в такий спосіб

$$a(\nabla \psi, \nabla w) := \int_{\Omega} G \nabla \psi \cdot \nabla w dx \quad \forall \psi, w \in W.$$

Можна довести, що варіаційна задача є коректно поставленою, а отже має єдиний розв'язок, який також є розв'язком задачі мінімізації квадратичного функціоналу [2]:

$$\text{знайти } \psi \in W \text{ таку, що } J(\psi) = \inf_{w \in W} J(w), \quad (3)$$

де $J(w) := \|\nabla w + z\|_W^2 \quad \forall w \in W$.

Лема 1 про апроксимацію функції кручення.

Нехай функція $\psi \in W$ є розв'язком варіаційної задачі (2) або, що еквівалентно, задачі мінімізації (3) і $\psi_h \in W_h \subset W$, $\dim W_h < +\infty$, – її апроксимація Гальоркіна-Рітца, обчислена як розв'язок задачі

$$\text{знайти } \psi_h \in W_h \text{ таку, що } J(\psi_h) = \inf_{w \in W_h} J(w).$$

Тоді похибка цього наближення $\varepsilon_h := \psi - \psi_h \in W$ задовольняє варіаційне рівняння

$$a(\nabla \varepsilon_h, \nabla w) = 0 \quad \forall w \in W_h$$

або

$$a(\nabla \varepsilon_h, \nabla w) = -a(\nabla \psi_h + z, \nabla w) \quad \forall w \in W.$$

Більше того, похибка такої апроксимації допускає оцінки вигляду

$$\begin{aligned} \|\nabla \varepsilon_h\|_W^2 &= \|\nabla(w - \psi)\|_W^2 = J(\psi_h) - J(\psi) = \\ &= \|\nabla \psi_h + z\|_W^2 - \|\nabla \psi + z\|_W^2. \end{aligned}$$

Таким чином, апостеріорна оцінка похибки Гальоркіна-Рітца для задачі кручення стрижня в термінах функції кручення Сен-Венана в достатньо грубому наближенні може бути обчислена так:

$$\|\nabla \varepsilon_h\|_W \leq \|\nabla \psi_h + z\|_W = J^{1/2}(\psi_h).$$

Розглянемо тепер двоїсту задачу. Введемо так звану функцію напружень Прандтля $u = u(x)$ згідно правила [6]

$$\sigma_{13} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} = G\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - x_2 \right), \quad \sigma_{23} = -\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} = G\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + x_1 \right),$$

і відзначимо зв'язок її градієнта з градієнтом функції кручення Сен-Венана

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{1}{G} \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_2, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{1}{G} \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1.$$

Тоді з використанням функції Прандтля задача кручення стрижнів набуває вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -\nabla \cdot (G^{-1} \nabla u) = 2 \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \Gamma. \end{cases} \quad (4)$$

Або у варіаційному формулюванні:

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V \text{ таку, що} \\ b(u, v) = 2(1, v) \quad \forall v \in V := H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{де } b(u, v) := \int_{\Omega} G^{-1} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V.$$

Евівалентна їй форма задачі мінімізації квадратичного функціоналу має вигляд:

$$\text{знайти } u \in V \text{ таку, що } F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in V, \quad (6)$$

$$\text{де } F(v) := b(v, v) - 4(1, v) \quad \forall v \in V.$$

Лема 2 про апроксимацію функції напружень.

Нехай $u \in V = H_0^1(\Omega)$ є розв'язком варіаційної задачі (4) або, що еквівалентно, задачі мінімізації (5) і $u_{\Delta} \in V_{\Delta} \subset V$, $\dim V_{\Delta} < +\infty$, — її апроксимація Гальоркіна-Рітца.

Тоді похибка $e_{\Delta} = u - u_{\Delta} \in V$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} b(e_{\Delta}, v) &= 2(1, v) - b(u_{\Delta}, v) \quad \forall v \in V, \\ \|u - u_{\Delta}\|_V^2 &= F(u_{\Delta}) - F(u). \end{aligned}$$

Повертаючись до визначення функціоналів мінімізації $J(\cdot): W \rightarrow R$ та $F(\cdot): V \rightarrow R$ нагадаємо, що їхні мінімальні значення досягаються на розв'язках варіаційної задачі (2) та (4) відповідно і при цьому

$$\begin{cases} \|u\|_V^2 = -F(u) = C, \\ \|\nabla \psi + z\|_W^2 = J(\psi) = C. \end{cases}$$

Нехай $\psi_h \in W_h \subset W$ і $u_{\Delta} \in V_{\Delta} \subset V$ є розв'язками дискретизованих за Гальоркіним задач

$$\begin{cases} \text{знайти } \psi_h \in W_h \text{ таку, що} \\ a(\nabla \psi_h + z_1 \nabla w) = 0 \quad \forall w \in W_h, \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} \text{знайти } u_{\Delta} \in V_{\Delta} \text{ таку, що} \\ b(u_{\Delta}, v) = 2(1, v) \quad \forall v \in V_{\Delta} \end{cases}$$

відповідно. Тоді згідно лем 1 і 2 ми маємо такі оцінки похибок знайдених наближень

$$\|\nabla(\psi - \psi_h)\|_W^2 = J(\psi_h) - J(\psi) = J(\psi_h) - C,$$

$$\|u - u_\Delta\|_V^2 = F(u_\Delta) - F(u) = F(u_\Delta) + C.$$

Після додавання цих рівностей приходимо до такого твердження:

Теорема про апостеріорну оцінку похибок апроксимації розв'язку задачі кручення.

Нехай $\psi_h \in W_h \subset W$ і $u_\Delta \in V_\Delta \subset V$ є апроксимаціями Гальоркіна-Рітца розв'язків $\psi \in W$ і $u \in V$ задач про кручення стрижнів в термінах функції кручення Сен-Венана і функції напружень Прандтля відповідно.

Тоді похибки знайдених наближень задовольняють таку рівність

$$\|\nabla(\psi - \psi_h)\|_W^2 + \|u - u_\Delta\|_V^2 = J(\psi_h) + F(u_\Delta) = \|\nabla \psi_h + z\|_W^2 - \|u_\Delta\|_V^2.$$

Практично дана теорема встановлює цілком обчислювану точну оцінку суми квадратів енергетичних норм похибок апроксимацій розв'язків обох моделей кручення стрижнів, що дозволяє розробляти апостеріорні оцінювачі похибок апроксимацій МСЕ як прямої, так і двоїстої задачі кручення призматичного стрижня.

Як наслідок із цієї теореми можна отримати грубі верхні оцінки похибок наближень для кожної задачі:

$$\begin{aligned} \|\psi - \psi_h\|_W &\leq \sqrt{J(\psi_h) + F(u_\Delta)}, \\ \|u - u_\Delta\|_V &\leq \sqrt{J(\psi_h) + F(u_\Delta)}. \end{aligned}$$

1. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел. / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян. – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.
2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 412 с.
3. Савула Я.Г. Апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку, одержаного методом скінченних елементів, у задачі кручення стержнів / Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко, В.М. Вовк. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.- мат. – 1977. – Вип. 12. – С. 63–68.
4. Савула Я.Г. Некоторые приложения метода конечных элементов / Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко, В.Н. Вовк. – Львов: ЛГУ, 1981, вип.12. – С. 88.
5. Шинкаренко Г.А. Применение метода конечных элементов в задаче кручения неоднородных стержней / Г.А. Шинкаренко, Я.Г. Савула, В.Н. Вовк. В сб.: Метод конечных элементов в строительной механике. – Горький: Изд-во ГГУ, 1975. – С. 108–118.
6. Han W.A Posteriori Error Analysis via Duality Theory with Applications in Modeling and Numerical Approximations / W. Han. – New York: Springer, 2005. – pp. 319.

УДК 519.624.2

*О.В. Вовк *, Г.А. Шинкаренко ***

(* Львівський національний університет імені Івана Франка,

** Політехніка Опольська)

ОЦІНКИ ВЕРХНЬОЇ ТА НИЖНЬОЇ МЕЖ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Метою роботи є побудова апостеріорних оцінювачів (АОП) для отримання верхньої та нижньої оцінок похибки [2, 3] лінійних апроксимацій методу скінченних елементів (МСЕ) для крайової задачі, яка допускає наступне варіаційне формулювання

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_u\} \text{ такий, що} \\ a_\Omega(u, v) = \langle l_\Omega, v \rangle \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_\Omega(u, v) := \int_\Omega \{(\mu \nabla u) \cdot \nabla v + v[\beta \cdot \nabla u + \sigma u]\} dx + \int_{\Gamma_q} \alpha u v d\gamma, \\ \langle l_\Omega, v \rangle := \int_\Omega f v dx + \int_{\Gamma_q} g v d\gamma \quad \forall u, v \in V. \end{cases} \quad (2)$$

На області Ω будується триангуляція $\mathfrak{T}_h = \{K\}$, $h_K = \text{diam } K$, $h = \max_{K \in \mathfrak{T}_h} h_K$, і задача (1)-(2) розв'язується МСЕ в скінченновимірному просторі $V_h := \{v \in V \cap C(\Omega) : v \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathfrak{T}_h\} \subset V$, де $P_1(K)$ простір поліномів, визначених на трикутнику K , до першого порядку, $\dim V_h = N$, див. [1, 5, 6]. Система лінійних алгебраїчних рівнянь МСЕ розв'язується проекційним методом узагальнених мінімальних нев'язок GMRES з перезапусками та передобумовленням [6] і знайдена апроксимація МСЕ $u_h \in V_h$ розв'язку задачі (1)-(2) використовується для обчислення АОП цієї апроксимації [1]

$$\begin{cases} \text{задано } u_h \in V_h; \text{ знайти } e = u - u_h \in E, \quad V = V_h \oplus E, \text{ таку, що} \\ a_\Omega(e, v_h) = \langle \rho_\Omega(u_h), v_h \rangle \quad \forall v_h \in E, \\ \langle \rho_\Omega(w), v \rangle = \langle l_\Omega, v \rangle - a_\Omega(w, v) \quad \forall w, v \in V. \end{cases} \quad (3)$$

Остання дискретизується у підпросторі $E_h \in E$, $\dim E_h < +\infty$, з базисом $\{\phi_K\}_{K \in \mathfrak{T}_h}$, $\text{supp } \phi_K := \overline{K}$, $\phi_K \in E_h(K) := \{v \in H^1(K) : v(A_i) = 0 \quad \forall A_i \in K\}$, де A_i – вузли елемента K . Внаслідок ортогональності цього базису оцінювач e_h обчислюється на кожному K незалежно від сусідів триангуляції $\mathfrak{T}_h$

$$e_h|_K := e_K(x) = \lambda_K \phi_K(x) = \frac{\langle \rho_K(u_h), \phi_K \rangle}{a_K(\phi_K, \phi_K)} \phi_K(x) \quad \forall x \in K \quad \forall K \in \mathfrak{T}_h. \quad (4)$$

Підпростори $E_h \in E$ вибираються двома способами:

- (i) $E^{Dir}(K) = \{v \in H^1(K) : v = 0 \text{ на } \partial K\}$ – простір індикаторів Діріхле;
- (ii) $E^{Neu}(K) = \{v \in H^1(K) : v(A_i) = 0 \quad \forall A_i \in K\}$ – простір індикаторних функцій Неймана. За бази цих просторів вибрано:

$$\phi_K^{Dir} := 27L_1L_2L_3, \quad \phi_K^{Neu} := 3(L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1) \quad \forall K \in \mathfrak{T}_h, \quad (5)$$

де $\{L_i\}_{i=1}^3$ – барицентричні координати трикутника K .

Теорема. Про двосторонні оцінки похибки апроксимацій МСЕ.

Нехай для будь-якого лінійного функціоналу $l \in [H^1(K)]'$ функції $e_K^{Dir} \in E_h^{Dir}(K) \subset H_0^1(K)$ та $e_K^{Neu} \in E_h^{Neu}(K) \subset H^1(K)$ є розв'язками локальних задач Діріхле та Неймана такого гатунку:

$$\text{знайти } e_K^{Dir}, \text{ такий, що } a_\Omega(e_K^{Dir}, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(K), \quad (6)$$

$$\text{знайти } e_K^{Neu}, \text{ такий, що } a_\Omega(e_K^{Neu}, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in H^1(K), \quad (7)$$

Тоді будуть правильними такі оцінки

$$\|e_h^{Dir}\|_K \leq \|e_h^{Neu}\|_K \quad \forall K \in \mathfrak{T}_h, \quad (8)$$

$$\|e_h^{Dir}\|_V \leq \|e\|_V \leq C \|e_h^{Neu}\|_V, \quad \|w\|_V^2 := \sum_{K \in \mathfrak{T}_h} \|w\|_K^2, \quad (9)$$

де $C = \text{const} > 0$ залежить від значень констант з підсиленої нерівності Коші-Буняковського та умови насиченості. Доведення див. [2, 3].

Поелементно-визначені АОП e_K^{Dir} та e_K^{Neu} є інтелектуальною частиною h -адаптивного МСЕ і застосовуються у критерії адаптування [3] останнього: поділ трикутника K методом бісекції [6] виконується, якщо

$$\tilde{\eta}_K := \sqrt{N} \|e_K\|_{1,K} \|u_h + e_h\|_{1,\Omega}^{-1} 100\% > \text{TOL}, \quad (10)$$

де $\text{TOL} = \text{const} > 0$ визначає допустимий рівень відносної похибки u_h .

Метод бісекції дає змогу будувати послідовність вкладених просторів апроксимацій МСЕ, що дозволяє обчислити збіжну послідовність наближених розв'язків задачі (1)-(2), див. [4].

Для числового підтвердження теоретичних результатів розглянемо наступну сингулярно-збурену задачу з приміжним шаром, який характеризується числом Пекле $Pe \cong 3.6056 \mu^{-1} = 180.3$, $\mu = 0.02$,

$$-\mu \Delta u + (2, 3) \cdot \nabla u = f \quad \text{в } \Omega = (0; 1)^2, \quad u \equiv 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (11)$$

з точним розв'язком $u^{Ext}(x) = x_1 x_2^2 - x_2^2 g(2, x_1) + g(3, x_2)[g(2, x_1) - x_1]$, де $f(x) = 2\{(\mu - 3x_2)[g(2, x_1) - x_1] - g(3, x_2) + x_2^2\}$, $g(\gamma, t) := \exp[\mu^{-1}\gamma(t-1)]$.

Задачу (11) спочатку розв'яжемо на рівномірних сітках, див. Табл. 1.

Таблиця 1. Збіжність апроксимацій МСЕ та АОП для рівномірних сіток

k	$Nod \mathfrak{T}_h$	$Card \mathfrak{T}_h$	$\mathcal{E}_h^{Dir}$	$\mathcal{E}_h^{Ext}$	$\mathcal{E}_h^{Neu}$	κ^{Dir}	κ^{Neu}	p^{Dir}	p^{Ext}	p^{Neu}
1	221	400	72.122	103.505	97.052	1.0	3.9	-	-	-

2	841	1 600	46.681	85.601	89.818	0.6	2.4	1.0	0.3	1.0
3	3 281	6 400	26.144	62.121	72.373	0.4	1.7	1.0	0.5	1.0
4	12 961	25 600	13.642	37.608	47.055	0.4	1.4	1.0	0.7	1.0
5	51 521	102 400	6.908	20.096	25.902	0.3	1.3	1.0	0.9	1.0
6	205 441	409 600	3.465	10.235	13.310	0.3	1.3	1.0	1.0	1.0
7	820 481	1 638 400	1.734	5.142	6.702	0.3	1.3	1.0	1.0	1.0
8	3 279 361	6 553 600	0.867	2.574	3.357	0.3	1.3	1.0	1.0	1.0

Тут і далі $Nod \mathfrak{S}_h$ – кількість вузлів сітки; $Card \mathfrak{S}_h$ – кількість скінченних елементів триангуляції; $\kappa^a := \|e_h^a\|_{1,\Omega} \|e_h^{Ext}\|_{1,\Omega}^{-1}$ – індекси ефективності, $e_h^{Ext} = u^{Ext} - u_h$; $p^a := 2\ln(\|e_{h,k}^a\|_{1,\Omega} \|e_{h,k+1}^a\|_{1,\Omega}^{-1}) / (\ln(N_{k+1} N_k^{-1}))^{-1}$ – порядки збіжності; $\varepsilon_h^a := \|e_h^a\|_{1,\Omega}^{-1} \|u\|_{1,\Omega}^{-1} 100\%$ – відносні похибки, $a = \{Dir, Ext, Neu\}$. Табл. 1 демонструє ідентичність порядків збіжності АОП та істинних похибок MSE. Оцінювачі Діріхле e_K^{Dir} та Неймана e_K^{Neu} надійно обчислюють нижню та верхню межі істинної похибки апроксимацій MSE з індексами ефективності 0.3 та 1.3 відповідно. Більше цього, дані цієї таблиці показують, що двосторонні оцінки похибок (9) виконуються зі сталою $C = 1$.

Врешті застосуємо h-адаптивний MSE до розв’язування задачі (11) з $TOL = 1\%$ та апостеріорним оцінювачем Діріхле в критерії адаптування (10), за дет. див. Табл. 2.

Таблиця 2. Збіжність АОП для h-адаптивного MSE

k	$Nod \mathfrak{S}_h$	$Card \mathfrak{S}_h$	ε_h^{Dir}	ε_h^{Ext}	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	p^{Dir}	p^{Ext}	p^{Neu}
6	446	816	54.359	94.542	92.878	0.7	2.7	1.6	0.3	1.6
8	954	1 782	30.906	66.207	78.283	0.5	1.9	2.0	1.2	2.0
10	1 633	3 049	16.111	38.197	53.434	0.4	1.7	2.5	2.8	2.5
12	3 157	5 917	8.151	19.758	30.195	0.4	1.6	1.8	2.6	1.8
13	4 743	9 083	5.772	16.887	21.851	0.3	1.3	1.6	0.7	1.6
14	7 584	14 431	4.099	9.910	15.690	0.4	1.6	1.5	2.3	1.5
15	11 918	23 089	2.912	8.592	11.213	0.3	1.3	1.5	0.6	1.5
16	19 161	36 972	2.083	5.043	8.044	0.4	1.6	1.4	2.3	1.4
17	29 344	57 307	1.513	4.419	5.849	0.3	1.3	1.5	0.6	1.5
18	44 161	85 978	1.133	2.828	4.384	0.4	1.6	1.4	2.2	1.4
19	61 177	119 917	0.902	2.521	3.491	0.4	1.4	1.4	0.7	1.4

В Табл. 2 осциляції порядку збіжності істинної похибки пояснюються зміною структури сітки за рахунок специфіки методу бісекції в приміжевому шарі. Суттєву перевагу в ефективності h-адаптивних схем можна побачити на наступному рисунку

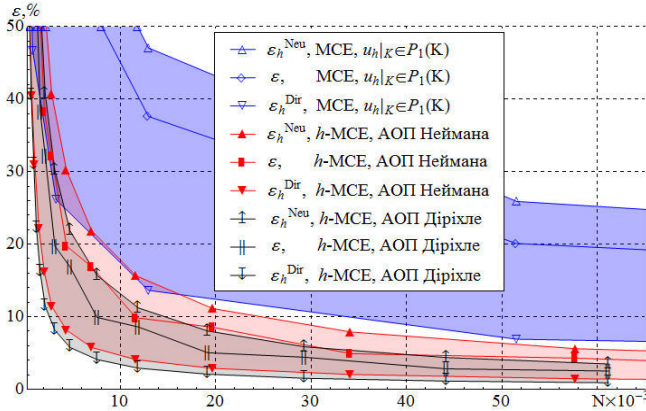


Рисунок. Збіжність відносних похибок апроксимацій MCE і АОП на рівномірних та локально-згущуваних сітках

Ефективність, надійність, збіжність, а також здатність представлених тут АОП Діріхле і Неймана забезпечувати двосторонні оцінки похибок лінійних апроксимацій MCE доведено теоретично та підтверджено числовими результатами.

1. *Babuška I.* Finite Elements: An Introduction to the Method and Error Estimation / I. Babuška, J.R. Whiteman, T. Strouboulis. – New York: Oxford: University Press, 2011.
2. *Bank R.E.* Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations / R.E. Bank, A. Weiser // Math. of Comput. – 1985. – Vol. 44. – P. 283-301.
3. *Kvasnytsia H.A.* Computable double-sided a posteriori error estimates and h -adaptive finite element approximations. / H.A. Kvasnytsia, O.Yu. Ostapov, H.A. Shynkarenko, O. V. Vovk // Manufacturing Process. Actual Problems-2014. – Opole: Politechnika Opolska, 2014. – Vol. 1. – P. 87–102.
4. *Mekchay K.* Convergence of adaptive finite element methods for general second order linear elliptic PDE / K. Mekchay, R. Nochetto // SIAM J. Numer. Analysis. – 2002. – № 43. – P. 1803–1827.
5. *Ostapov O.Yu.* A posteriori error estimator and h -adaptive finite element method for diffusion-advection-reaction problems / O.Yu. Ostapov, H.A. Shynkarenko, O.V. Vovk // Recent Advances in Computational Mechanics; T. Łodygowski, J. Rakowski, P. Litewka eds. – London: Taylor & Francis Group, 2014. – P. 329-337.
6. *Ostapov O.Yu.* Finite element adaptive refinement techniques for diffusion-advection-reaction problems / O.Yu. Ostapov, H.A. Shynkarenko, O.V. Vovk // Manufacturing Process. Actual Problems-2013. – Opole: Politechnika Opolska, 2013. – Vol. 1. – P. 31–46.

УДК 517 (519.6)

С. Я. Вольфсон, О. В. Черницька

(Дніпропетровський національний університет ім. О.Гончара)

**ЗАДАЧА РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ
ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ**

Розглядається простір $C[a, b] \times [a, b]$ та функції $z = f(x, y)$ що належать цьому простору. $\omega(f, x)$ - модуль неперервності функції f , $r(f, x)$ - перестановка функції.

Відомі результати для оцінки найкращого наближення функцій $f(x) \in L_p$, $0 \leq p \leq \infty$. В [1] Івановим В. І. було розглянуто наближення неперервних функцій сплайнами нульового порядку. Для доведення теореми про оцінку найкращого наближення ним був використаний апарат перестановок та поняття модуля неперервності.

У [2] модулем неперервності функції f в метриці C за напрямом h називаємо величину

$$\omega_h(f, \delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \|f(x + th) - f(x)\|_C, |h| = 1 \quad (1)$$

$h = (h_1, h_2) \in R_2$ - довільний вектор.

Для $f(x, y)$ модуль неперервності розглядаємо як функцію двох змінних $\omega(f; \delta; \eta)$. При його визначенні за формулою (1) маємо лише один параметр δ . Тому зробимо наступні перетворення.

Нехай $\delta = \delta_1$, вектор $h = (1; \frac{\delta_2}{\delta_1})$, $|h| = 1$. Отримуємо

$$\begin{aligned} \omega(f(x, y), \delta_1, \delta_2) &= \omega_h(f(x, y), \delta) = \\ &= \omega_{(1; \frac{\delta_2}{\delta_1})}(f(x, y), \delta_1) = \sup_{|t| \leq \delta_1} \left\| f\left(x + t * 1, y + t * \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) - f(x, y) \right\|_C. \end{aligned}$$

При максимальному $t = \delta_1$

$$\begin{aligned} \omega &= \left\| f\left(x + \delta_1 * 1, y + \delta_1 * \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) - f(x, y) \right\|_C \\ &= \max_{(x, y) \in G} |f(x + \delta_1, y + \delta_2) - f(x, y)|. \end{aligned}$$

Для функцій $f(x, y)$ з простору $C[a, b] \times [a, b]$, таких що $\max f(x, y) + \min f(x, y) = 0$ перестановку та модуль неперервності $f(x, y)$ визначаємо наступним чином:

$$\begin{aligned} r(f, t) &= \inf\{z: m(f, z) \leq t\}, \\ \omega(f, t) &= \max_{\substack{|x' - x''| \leq t \\ |y' - y''| \leq t}} |f(x', y') - f(x'', y'')|. \end{aligned}$$

Розглядаємо наступну нерівність

$$r(f, x, [a, b] \times [a, b]) \leq \frac{1}{2} \omega(f, b - a - x, [a, b]), 0 \leq x \leq b. \quad (2)$$

Без обмеження загальності можемо вважати, що $[a; b] \times [a; b] = [0, 1] \times [0, 1]$. Переходимо до кусково-постійних функцій $f(x, y) = c_k$, $x \in \left(\frac{p-1}{N}, \frac{p}{N}\right)$, $y \in \left(\frac{q-1}{N}, \frac{q}{N}\right)$, $p, q = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, N^2$.

Через c_k^* позначимо перестановку кусково-постійної функції $f(x, y)$. Тоді c_1^* і c_2^* будуть найменшим і найбільшим значенням функції.

Тоді:

$$r(f, t) = c_k^*, \\ \omega(f, 1 - t) = \omega\left(f, \frac{N^2 + 1 - k}{N^2}\right).$$

$$\text{Отримуємо нерівності } c_k^* \leq \omega\left(f, \frac{N^2 + 1 - k}{N^2}\right), k = \overline{1, N^2}.$$

З'ясовано, що безпосереднього доведення потребують лише N нерівностей. Справедливість інших нерівностей випливає зі справедливості цих N нерівностей.

Було доведено, що для $N=2$, $N=3$ нерівності виконуються завжди. Для більшого числа частин поділу виконання нерівностей залежить від того, які значення приймає функція і де розміщені c_1^* , c_2^* . При більших N можна сформулювати умови, за яких нерівності справедливі. Для $N = 4$, $N = 5$ порушення відбувається лише у випадку розміщення найбільшого за модулем значення c_1^* у куті. Для більших N порушення буде і тоді, коли c_1^* , c_2^* знаходяться не в куті. Це дає можливість зробити висновок, що для виконання нерівностей функція має задовольняти певним умовам.

Наприклад, для довільного N можна назвати наступні умови. Якщо для будь-якого c_i , $i = \overline{1, N^2}$ існує c_j , $j = \overline{1, N^2}$ таке, що $c_i + c_j = 0$, то нерівності будуть справедливі. Якщо функція $f(x, y) \in C[0; 1] \times [0; 1]$ така, що для будь-якої точки $(x_1, y_1) \in C[0; 1] \times [0; 1]$ існує $(x_2, y_2) \in C[0; 1] \times [0; 1]$ така, що $f(x_1, y_1) = -f(x_2, y_2)$, то для цієї функції нерівність (1) буде виконуватись.

Для дослідження зв'язку модуля неперервності та перестановки функції була написана програма, яка дозволяє задавати кусково-постійні функції від двох аргументів, будувати для них модуль неперервності та перестановку та перевіряти виконання нерівностей.

1. *Иванов Ю. И.* Приближение функций из сплайнами минимального дефекта// Математические заметки. – 1988. – Т.43, № 6. – с.746-756.
2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.:Наука, 1977. – 456с.

АЛГЕБРИЧНА СТРУКТУРА ОПРАЦЮВАННЯ НАПІВТОНОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ, ЯКА ВРАХОВУЄ ЙОГО ОСВІТЛЕННЯ

В опрацюванні зображень підвищення їх візуальної якості є однією з важливих задач. Оскільки зображення зазвичай призначені для їх сприйняття людиною, то підвищення якості має враховувати психофізичні властивості людини. Такою основною властивістю є реакція людини на світлове збудження, яка описується законом Вебера-Фехнера. За ним реакція психофізичної системи людини пропорційна логарифму світлового збудження. Тому цей закон став основою побудови алгебричних структур логарифмічного типу [1], арифметичні операції яких моделюють логарифмічний характер процесу сприйняття світла людиною. На цій основі побудовано різні алгебричні структури логарифмічного типу, одна з яких описана у роботі [2]. Вона розглядає рівні сірого елементів напівтонового зображення u_1, u_2 , які належать до проміжку $U \in (0, 1)$. Для цієї множини рівнів сірого U означено операцію додавання $\oplus$ та множення $\otimes$ на дійсний скаляр як алгебричну структуру векторного простору. При цьому операція додавання описується виразом

$$u_1 \oplus u_2 = \frac{u_1 u_2}{u_1 u_2 + (1 - u_1)(1 - u_2)}, \quad \forall u_1, u_2 \in U; \quad (1)$$

операція віднімання –

$$u_1 \ominus u_2 = \frac{u_1(1 - u_2)}{u_1(1 - u_2) + (1 - u_1)u_2}, \quad \forall u_1, u_2 \in U; \quad (2)$$

операція множення рівня сірого u на дійсний скаляр α –

$$\alpha \otimes u = \frac{u^\alpha}{u^\alpha + (1 - u)^\alpha}, \quad \forall u \in U, \forall \alpha \in R. \quad (3)$$

Однак недоліком такої алгебричної системи є те, що її арифметичні операції моделюють сприйняття світла за ідеальних умов спостереження зображення – без врахування можливих його додаткового освітлення чи додаткового затемнення. Тому метою роботи є побудова алгебричної структури, яка враховує наявність додаткового освітлення чи затемнення зображення при його спостереженні. Розв'язком цієї задачі є побудована нова алгебрична структура дійсного векторного простору з операціями додавання $\langle + \rangle$ та множення $\langle \times \rangle$ на дійсний скаляр. При цьому операція додавання описується виразом

$$u_1 \langle + \rangle u_2 = \frac{ku_1 u_2}{ku_1 u_2 + (1-u_1)(1-u_2)}, \quad \forall u_1, u_2 \in U, \quad k > 0; \quad (4)$$

операція віднімання –

$$u_1 \langle \ominus \rangle u_2 = \frac{ku_1(1-u_2)}{ku_1(1-u_2) + (1-u_1)u_2}, \quad \forall u_1, u_2 \in U, \quad k > 0; \quad (5)$$

а операція множення рівня сірого u на дійсний скаляр α –

$$\alpha \langle \times \rangle u = \frac{(ku)^\alpha}{(ku)^\alpha + k(1-u)^\alpha}, \quad \forall u \in U, \quad k > 0, \quad \forall \alpha \in R; \quad (6)$$

Наведені вище операції додавання $\langle + \rangle$ та множення $\langle \times \rangle$ на дійсний скаляр утворюють на множині рівнів сірого U структуру дійсного векторного простору. Векторний простір рівнів сірого $(U, \langle + \rangle, \langle \times \rangle)$ є ізоморфним до простору дійсних чисел $(R, +, \cdot)$ через функцію $\varphi: U \rightarrow R$, яка описується виразом

$$\varphi(u) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{ku}{1-u}\right), \quad k > 0, \quad \forall u \in U.$$

Ізоморфізм φ задовольняє вимогам

$$\varphi(u_1 \langle + \rangle u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in U,$$

$$\varphi(\alpha \langle \times \rangle u) = \alpha \cdot \varphi(u), \quad \forall \alpha \in R, \quad \forall u \in U.$$

Зазначимо, що функція (4) відома в теорії трикутних норм як уніорма [3], але для побудови алгебричних структур не використовувалася.

Введення у вираз (1) коефіцієнта k забезпечило отримання формули (4), яка уможливило моделювання ступеня освітленості зображення при його сприйнятті. Так, при $k=1$ побудована алгебрична структура (4)-(6) відповідає відомій (1)-(3) [2]. При $0 < k < 1$ операції моделюють випадок затемнення спостережуваного зображення, а при $k > 1$ – сприйняття зображення, яке освітлюється додатковим джерелом світла. Завдяки цьому досягається більш достовірне опрацювання напівтонового зображення.

1. Воробель Р.А. Логарифмічна обробка зображень / Р.А. Воробель – Київ: Наукова думка, 2012. – 231 с.
2. Patrascu V. Gray level image processing using algebraic structures/ V. Patrascu // Proceedings of the 11-th Conference on Applied and Industrial Mathematics. May 29-31, 2003. Vol. 1. Oradea, Romania. P. 167-172.
3. Klement E.P. Triangular Norms // E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 2000. – 385 p.

УДК 004.827+728.1.012

Г.А. Гайна, А.В. Єрукаєв

(Київський національний університет будівництва і архітектури)

ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ НЕЧІТКОЇ ПРОДУКЦІЙНОЇ КОГНІТИВНОЇ КАРТИ

Нечітка продукційна когнітивна карта (НПКК) - це нечітка причинно-наслідкова мережа (мережа взаємовпливу) виду

$$G = (Y, W),$$

де $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ - множина концептів; $W = \{w_{ij}\}$ - множина зв'язків між концептами.

Загальний вигляд НПКК представлено на рисунку 1.

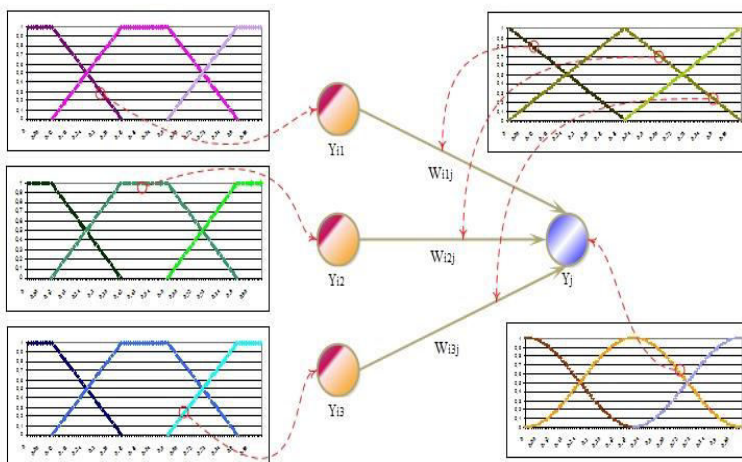


Рисунок 1 - Загальний вигляд НПКК

НПКК поєднує в собі теорію:

- нечітких множин;
- нейронних мереж.

Нечітка множина $\mathcal{A}$ - це множина впорядкованих пар або кортежів виду: $\langle x, \mu_{\mathcal{A}}(x) \rangle$, де x є елементом деякої універсальної множини або універсуму X , а $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ - функція належності, що ставить у відповідність кожному з елементів $x \in X$ деяке дійсне число з інтервалу $[0, 1]$, тобто дана функція визначається у формі відображення:

$$\mu_{\mathcal{A}} : X \rightarrow [0, 1]$$

При цьому значення $\mu_{\mathcal{A}}(x)=1$ для деякого $x \in X$ означає, що елемент x безперечно належить нечіткій множині $\mathcal{A}$, а значення $\mu_{\mathcal{A}}(x)=0$ означає, що елемент x безперечно не належить нечіткій множині $\mathcal{A}$.

Концепти і зв'язки між ними в НПКК описуються за допомогою лінгвістичних та нечітких змінних.

Лінгвістична змінна - це кортеж виду $\langle \beta, T, X \rangle$, де:

- β - назва лінгвістичної змінної;
- T - базова терм-множина лінгвістичної змінної або множина її значень (термів), кожне з яких представляє з себе назву окремої нечіткої змінної α ;
- X - область визначення (універсум) нечітких змінних, які входять у визначення лінгвістичної змінної β .

Нечітка змінна - це кортеж виду $\langle \alpha, X, \mathcal{A} \rangle$, де:

- α - назва нечіткої змінної;
- X - область її визначення (універсум);
- $\mathcal{A} = \{x, \mu_{\mathcal{A}}(x)\}$ - нечітка множина на X , що описує можливі значення, які може приймати нечітка змінна α .

Елементарний нечіткий вислів - це розповідне речення, що виражає закінчену думку, відносно якої ми можемо судити про її істину або хибність тільки з деякою ступенем впевненості.

Приклади елементарних нечітких висловлювань:

1. Зупинка громадського транспорту знаходиться близько.
2. Рівень забезпеченості мікрорайону об'єктами соціальної інфраструктури недостатній.
3. Рельєф територій придатний для будівельних робіт.

Для оцінки ступені істинності довільного нечіткого висловлювання використовується спеціальне відображення T , що діє з множини нечітких висловлювань U , що розглядаються, в інтервал $[0, 1]$, тобто

$$T: U \rightarrow [0, 1]$$

Це відображення називається відображенням істинності нечітких висловлювань. Значення істинності деякого нечіткого висловлювання $\mathcal{A} \in U$ позначається через $T(\mathcal{A})$.

Нейронна мережа - це одне з напрямлень в області штучного інтелекту, що ґрунтується на спробі відтворити нейронну систему людини, а саме: здатність нервової системи навчатися і виправляти помилки, що дозволяє змоделювати, хоч і достатньо грубо, роботу людського мозку. Нейронна мережа складається з нейронів.

Структура нейрону представлена на рисунку 2.

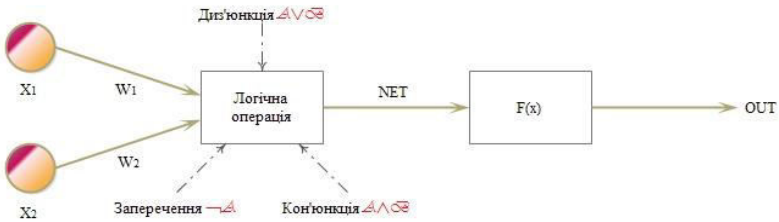


Рисунок 2 - Структура нейрону

Структура нейрону можна представити з наступних блоків:

1. Вхідні сигнали x_n ;
2. Вагові коефіцієнти w_n ;
3. Логічна операція ($\neg$, $\wedge$, $\vee$) та її вихід NET ;
4. Функція активації нейрону $F(x)$;
5. Вихідний сигнал OUT .

Види логічних операцій з нечіткими висловлюваннями:

1. Заперечення: $T(\neg A) = 1 - T(A)$
2. Кон'юнкція: $T(A \wedge B) = \min\{T(A), T(B)\}$
3. Диз'юнкція: $T(A \vee B) = \max\{T(A), T(B)\}$

Функція активації нейрону - це функція, яка розраховує вихідний сигнал нейрону. На вхід цієї функції подається логічна операція всіх добуток сигналів і ваг цих сигналів.

Загальний вигляд функції активації:

$$OUT = F(NET)$$

В якості функції активації використовується гіперболічний тангенс, графік якого представлено на рисунку 3.

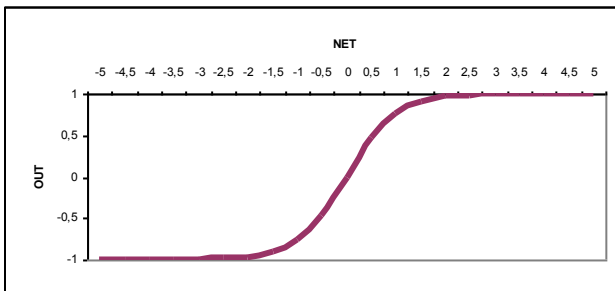


Рисунок 3 - Графік гіперболічного тангенсу

Формула гіперболічного тангенсу має наступний вигляд:

$$OUT = \frac{e^{NET} - e^{-NET}}{e^{NET} + e^{-NET}}$$

1. *Борисов В.В.* Нечеткие модели и сети [Текст] / В.В. Борисов, В.В. Круглов, А.С. Федулов. – М.: Горячая линия - Телеком, 2012. - 284 с.
2. *Леоненков А.В.* Нечеткое моделирование в среде Matlab и fuzzyTECH [Текст] / А.В. Леоненков. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 736 с.
3. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации [Текст] / С. Осовский; пер. с польского И.Д. Рудинский. - М.: Финансы и статистика, 2002. – 344 с.

УДК 519.6

Я. Гарасим, Б. Остудін

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ НА КОМПАКТІ

Нехай у евклідовому просторі $\mathbf{R}^3$ міститься незамкнена поверхня S , обмежена кусково-гладким контуром скінченної довжини ∂S , тобто $\bar{S} := S \cup \partial S$. Припустимо, що S належить до класу поверхонь Ліпшиця. Через $M, P, N, \dots$ позначимо точки в $\mathbf{R}^3$. Розв'язок розглядуваної диференціальної задачі шукатимемо в необмеженій області $\Omega_S^- := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}$ за припущення двосторонності S , а саме, необхідно знайти функцію $u \in H^1(\Omega_S^-, \Delta)$, яка задовольняє умови

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega_S^-, \quad (1)$$

$$\delta^\pm u = g_\pm \text{ на } S, \quad (2)$$

$$\lim_{|P| \rightarrow \infty} u(P) = 0. \quad (3)$$

Тут $\delta^\pm : H^1(\Omega_S^-) \rightarrow H^{1/2}(S)$ – оператори сліду, $g_\pm \in H^{1/2}(S)$ – задані функції, у цьому разі $g_\pm(M)$ вважаємо відомими значеннями шуканої функції у точці M на S в залежності від напрямку, за яким точки поза S прямують до M , а

$$H^1(\Omega_S^-, \Delta) := \{u \in H^1(\Omega_S^-), \Delta u \in L_2(\Omega_S^-)\}.$$

Трактуючи (1)-(3) як математичну модель електростатичного поля, створюваного зарядженим електродом, припускаємо, що $g_- = g_+$. Суттєвим узагальненням задачі (1)-(3) є також припущення, що S утворюється сукупністю розімкнених поверхонь, тобто $S := \bigcup_{i=1}^v S_i$.

Не зменшуючи загальності, розглянемо осесиметричний варіант задачі (1)-(3). Для цього запровадимо циліндричну систему координат (z, r, φ) . Досліджуване поле не залежить від координати φ . Тому інформацію щодо форми заряджених електродів, змодельованих сукупністю розімкнених поверхонь S , задамо параметричними зображеннями у напівплощині zr ($r > 0$) твірних L_i , які обертаванням навколо осі Oz утворюють бічні поверхні S_i ($i = \overline{1, v}$) деяких циліндрів. Нехай

$$L_i := \{(z_i, r_i) \mid z_i = z_i(\tau), r_i = r_i(\tau), \tau \in \bar{\Delta}_i := [\alpha_i, \beta_i]; i = \overline{1, v}\}.$$

Функції $z_i(\tau)$ і $r_i(\tau)$ вважаємо, як мінімум, гладкими на $\Delta_i := (\alpha_i, \beta_i)$. При застосуванні методу інтегральних рівнянь (ІР) розв'язування осесиметричного варіанту задачі (1)-(3) зводиться до такої системи операторних рівнянь:

$$(A\bar{q})(\bar{\tau}) = \bar{U}_0(\bar{\tau}) \equiv U_o^{(i)}, \quad \bar{\tau} \in \Delta_i \quad (i = \overline{1, v}). \quad (4)$$

Тут $\bar{q}(\tau) := (q_1(\tau), \tau \in \bar{\Delta}_1; q_2(\tau), \tau \in \bar{\Delta}_2; \dots; q_v(\tau), \tau \in \bar{\Delta}_v)^T$ – сукупна густина розподілу зарядів на $L := \bigcup_{j=1}^v L_j$; $\bar{U}_0(\bar{\tau}) := (U_0^{(1)}, U_0^{(2)}, \dots, U_0^{(v)})^T$ – граничні значення потенціалів на L_j . У (4) $A := (A_{ij})_{i,j=1}^v$, тобто є матрицею інтегральних операторів:

$$(A_{ij}q_j)(\tau) \equiv \int_{\alpha_j}^{\beta_j} E_{ij}(\tau, \bar{\tau}) q_j(\tau) d\tau, \quad \bar{\tau} \in \Delta_i,$$

у цьому разі $E_{ij}(\tau, \bar{\tau}) := 4r_j \left\{ [r'_j(\tau)]^2 + [z'_j(\tau)]^2 \right\}^{1/2} K(\eta_{ij}) T_{ij}^{-1}(\tau, \bar{\tau})$, де

$$T_{ij}(\tau, \bar{\tau}) := \left\{ [r_j(\tau) + r_i(\bar{\tau})]^2 + [z_j(\tau) - z_i(\bar{\tau})]^2 \right\}^{1/2},$$

а

$$K(\eta_{ij}) := \sum_{s=0}^4 a_s \eta_{ij}^s - \ln(\eta_{ij}) \sum_{s=0}^4 b_s \eta_{ij}^s,$$

$$\eta_{ij} := \eta_{ij}(\tau, \bar{\tau}) = \left\{ [r_j(\tau) - r_i(\bar{\tau})]^2 + [z_j(\tau) - z_i(\bar{\tau})]^2 \right\} T_{ij}^2(\tau, \bar{\tau})$$

– є апроксимацією повного еліптичного інтегралу першого роду.

Систему (4) можна вважати певним ІР, яке належить до класу рівнянь з логарифмічною особливістю в ядрі. Розв'язок такого ІР, спираючись на фізичні міркування, розглядали як елемент декартового добутку

модифікованих просторів Гьольдера: $\bar{q}(\tau) \in \prod_{i=1}^v H_{\mu_i}^*(\Delta_i)$. У цьому разі

$q_i(\tau) \in H_{\mu_i}^*(\Delta_i) \Leftrightarrow q_i(\tau) = \hat{q}_i(\tau) / \omega_i(\tau)$, де $\hat{q}_i(\tau) \in H_{\mu_i}(\bar{\Delta}_i)$ (простір неперервних функцій, що задовольняють умову Гельдера з показником μ_i), а $\omega_i(\tau) := (\tau - \alpha_i)^{n_i} (\beta_i - \tau)^{m_i}$ ($0 \leq n_i, m_i < 1$). Для одержання наближеного розв'язку ІР (4) застосовували метод Боголюбова-Крилова (метод колокації із апроксимацією невідомої густини розподілу зарядів кусково-постійними базисними функціями). Розв'язуючи чисельно ІР (4), отримували можливість, на підставі інтегрального подання розв'язку задачі (1)-(3), знаходити потенціал електростатичного поля в будь-якій точці $(\bar{z}, \bar{r})$ напівплощини zr ($r > 0$).

Наведені вище міркування стосуються аналізу так званої прямої задачі, яку в найпростішому вигляді формують так. За відомими граничними

значеннями на електродах знайти розподіл потенціалу на осі симетрії з метою виявлення в подальшому основних характеристик досліджуваного електростатичного поля. У такому контексті до оберненої можна зарахувати проблему відтворення граничних потенціалів і геометрії поверхонь – електродів за відомими характеристиками поля, що моделюється. Ефективне вирішення цих проблем актуальне при комп'ютерному проектуванні окремих фрагментів сучасних електронно-променевих приладів.

Ми у своїх дослідженнях розглядали одну модельну задачу відтворення густини розподілу зарядів та граничного значення потенціалу на електроді, змодельованому бічною поверхнею круглого циліндру радіуса $h > 0$, вісь якого співпадає з віссю Oz запровадженої системи координат (z, r, φ) , а відповідна твірна подається у вигляді таких параметричних рівнянь:

$$L := \{z = z(\tau) \equiv \tau, r = r(\tau) \equiv h > 0, |\tau| \leq 1\}.$$

У цьому разі, враховуючи симетричність початкових даних відносно осі Oz , для відтворення густини розподілу зарядів $g(\tau)$ уздовж L необхідно розв'язати таке ІР з неперервним ядром:

$$\int_0^1 K_h(\tau, \bar{\tau}) g(\tau) d\tau = v(\bar{\tau}), \quad |\bar{\tau}| \leq C, \quad C \geq 1, \quad (5)$$

де $K_h(\tau, \bar{\tau}) := [h^2 + (\tau - \bar{\tau})^2]^{-1/2} + [h^2 + (\tau + \bar{\tau})^2]^{-1/2}$, а $v(\bar{\tau})$ характеризує розподіл потенціалу на осі симетрії, отриманий при розв'язанні прямої задачі. Для наближеного розв'язання (5) застосовували метод регуляризації на компактi з метою максимального використання апіорної інформації про характер поведінки шуканої функції за умов її кусково-постійної апроксимації. Розглядали випадок наближеної правої частини $\tilde{v}(\bar{\tau})$ і точного ядра $K_h(\tau, \bar{\tau})$. Метод знаходження наближених значень

шуканої функції $g(\tau)$ в точках $\tau_{j_0} := \frac{1}{n} (2j_0 - 1)$, тобто набору величин $g_{j_0} \approx g(\tau_{j_0})$ ($j_0 \in M_0 := \{1, 2, \dots, n\}$), полягає в мінімізації на компактi $M \uparrow_{C_1}^{C_2}$ такого функціоналу

$$F(g) := f(g) + \frac{1}{\beta} \varphi(g), \quad \text{де } g := (g_1, g_2, \dots, g_n)^T \in \mathbf{R}^n; \quad (6)$$

$\varphi(g) := \sum_{K=1}^4 \sum_{j_k \in M_k} G_{j_k}^2(g) \{1 - \text{sign}[G_{j_k}(g)]\}$ – штрафна функція ($\beta > 0$ – її

параметр); $f(g) := \sum_{i=1}^m p_i \left[g_{j_0} \int_{(j_0-1)/n}^{j_0/n} K_h(\tau, \bar{\tau}_i) d\tau - \tilde{v}(\bar{\tau}_i) \right]^2$ – дискретний аналог

функціоналу нев'язки, p_i – коефіцієнти деякої квадратурної формули, а $\bar{\tau}_i$ – її абсциси. У цьому разі $M_1 := \{1, 2, \dots, n-1\} \subset M_0$, $M_2 := \{2, 3, \dots, n-1\} \subset M_0$, $M_3 := \{1\} \subset M_0$, $M_4 := \{n\} \subset M_0$. Оскільки наближений розв'язок рівняння (5) шукаємо на множині монотонно зростаючих, неспадних, обмежених, опуклих вниз функцій, то відповідний компакт можна подати у вигляді таких нерівностей:

$$M \uparrow_{C_1}^{C_2} = \begin{cases} G_{j_1}(g) := g_{j_1+1} - g_{j_1} \geq 0, j_1 \in M_1; 0 \leq C_1 < C_2 < +\infty; \\ G_{j_2}(g) := g_{j_2-1} - 2g_{j_2} + g_{j_2+1} \geq 0, j_2 \in M_2; \\ G_{j_3}(g) := g_{j_3} - C_2 \geq 0, G_{j_4}(g) := C_1 - g_{j_4} \geq 0, j_3 \in M_3, j_4 \in M_4. \end{cases}$$

Для мінімізації функціоналу (6) використовували метод спряжених градієнтів. У цьому разі для знаходження компонент вектора – градієнта корисним виявились такі формули:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial k_0} &= 2 \sum_{i=1}^m p_i \left[\sum_{j_0 \in M_0} g_{j_0} \int_{(j_0-1)/n}^{j_0/n} K_h(\tau, \bar{\tau}_i) d\tau - \tilde{v}(\bar{\tau}_i) \right] \int_{(k_0-1)/n}^{k_0/n} K_h(\tau, \bar{\tau}_i) d\tau, \forall k_0 \in M_0; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial k_0} &= 2 \sum_{k=1}^4 \sum_{j_k \in M_k} \frac{\partial G_{j_k}(g)}{\partial g_{k_0}} G_{j_k}(g) \{1 - \text{sign}[G_{j_k}(g)]\}, \forall k_0 \in M_0; \\ \frac{\partial G_{j_k}(g)}{\partial g_{k_0}} &= \begin{cases} \theta_k, k_0 \in M_3; \\ \mu_k, k_0 \in M_4; \\ \sigma_k, k_0 \in M_2, \end{cases} \end{aligned}$$

де $\theta_k, \mu_k, \sigma_k$ – компоненти векторів $\bar{\theta} := (-1, 1, 1, 0)$, $\bar{\mu} := (1, 1, 0, -1)$, $\bar{\sigma} := (0, -1, 0, 0)$.

У процесі відтворення густини розподілу зарядів стійкість отримуваних результатів перевіряли шляхом моделювання відповідних збурень величин $\tilde{v}(\bar{\tau}_i)$, а відновлення граничного потенціалу на L здійснювали на підставі дискретного аналогу інтегрального подання розв'язку початкової задачі.

1. Тихонов А.Н. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 232 с.

УДК 539.3

*Г.Ю. Гарматій¹, В.С. Попович¹, М. Круль²**(¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики**ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36, Львів,**² Жешувська політехніка, вул. Повстанців Варшави 8, Жешув, Польща)*

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА МЕТОДИКА
ВИЗНАЧЕННЯ НЕУСТАЛЕНОГО ТЕПЛОВОГО СТАНУ
КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ЗА РІЗНИХ
УМОВ НАГРІВАННЯ**

Шаруваті тіла є широко розповсюдженими елементами конструкцій, які в сучасних умовах експлуатації часто зазнають дії інтенсивних температур, що приводить до зміни термомеханічних характеристик матеріалів. Тому при визначенні їх термопружної поведінки важливо щоб математичні моделі враховували температурну залежність теплофізичних і механічних характеристик (термочутливість) матеріалів та реальні умови теплообміну з довколишнім середовищем. Це приводить до розв'язування двох незалежних задач: перша задача – про визначення температурного поля, а друга – про визначення спричиненого цим полем напруженого стану. Розподіл неусталеного температурного поля в таких шаруватих тілах описується нелінійною математичною моделлю, в якій нелінійності зосереджені в рівнянні теплопровідності та в умовах контакту шарів, а у випадку складного теплообміну з поверхонь ще й в граничних умовах. Таке ускладнення теплових математичних моделей вимагає розробки досконалих і ефективних методів розрахунку. В роботах [1-3] запропоновано аналітичну та аналітично-числову методики розв'язування нелінійних стаціонарних та нестаціонарних задач теплопровідності для термочутливих шаруватих тіл за припущення, що коефіцієнт температуропровідності є стала величина. Тут пропонується методика числового розв'язування нелінійних нестаціонарних задач теплопровідності для шаруватих тіл, яка дозволяє враховувати температурну залежність коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_i(t)$, температуропровідності $a(t)$ та об'ємної теплоємності $c_v(t)$ матеріалів шарів за різних умов нагрівання.

Суть запропонованої методики полягає у застосуванні до нелінійної математичної моделі інтегрального перетворення Гудмена і побудові методом прямих з використанням інтегро-інтерполяційного методу її напівдискретного аналогу у вигляді задачі Коші для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (СНЗДР). Розв'язок СНЗДР знаходимо чисельно.

Розглянемо n -шарову безмежну ізотропну термочутливу пластину завтовшки b (рис.). Коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності матеріалів шарів є різними неперервними функціями температури. Температура пластини змінюється тільки по її товщині $t = t(z, \tau)$, де τ – час.

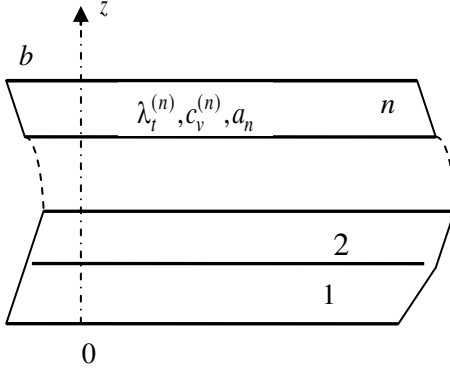


Рис.

Рівняння теплопровідності для визначення розподілу нестационарного температурного поля в такій n -шаровій пластині як в одному цілому запишемо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) = c_v(t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad 0 < z < b, \quad (1)$$

де $\lambda_t(t)$, $c_v(t)$ є

$Q^0[0, b]$ ($Q^0[a, b]$ – клас кусково-неперервних функцій

зі скінченним числом точок розриву першого роду),

$$\{\lambda_t(t), c_v(t)\} = \begin{cases} \lambda_t^{(1)}(t), c_v^{(1)}(t), & 0 \leq z \leq z_1, \\ \lambda_t^{(i)}(t), c_v^{(i)}(t), & z_{i-1} \leq z \leq z_i, \quad i = \overline{2, n-1}, \\ \lambda_t^{(n)}(t), c_v^{(n)}(t), & z_{n-1} \leq z \leq b, \end{cases} \quad (2)$$

$\lambda_t^{(i)}(t)$, $c_v^{(i)}(t)$ – коефіцієнт теплопровідності та об'ємна теплоємність матеріалу i -го шару.

Для рівняння теплопровідності (1) з розривними коефіцієнтами (2) виконуються умови ідеального теплового контакту (неперервності температури і теплового потоку на межах контакту сусідніх шарів)

$$t|_{z=z_i-0} = t|_{z=z_i+0}, \quad (3)$$

$$\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=z_i-0} = \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=z_i+0}. \quad (4)$$

На обмежуючих поверхнях пластини $z = 0$ та $z = b$ можливе задання різних комбінацій граничних умов: деякої температури чи теплового потоку, конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообміну. Наприклад, нехай на поверхні $z = 0$ відбувається конвективний теплообмін зі середовищем сталої температури t_c , а на

поверхні $z=b$ підтримується стала температура t_b . Тоді ці умови матимуть вигляд:

$$\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} + \alpha(t|_{z=0} - t_c) = 0, \quad (5)$$

$$t|_{z=b} = t_b, \quad (6)$$

де α – коефіцієнт теплообміну.

Початкову температуру пластини вважаємо сталою і рівною t_p

$$t|_{\tau=0} = t_p. \quad (7)$$

Після введення безрозмірних величин: $\{T, T_p, T_b, T_c\} = \{t, t_p, t_b, t_c\} / t_0$, $\bar{T} = T - T_p$; $\bar{z} = z/b$; $Fo = a_0^{(1)} \tau / b^2$; $Bi = \alpha b / \lambda_{t_0}^{(1)}$ (t_0 – вибрана опорна температура, $a_0^{(1)} = \lambda_{t_0}^{(1)} / c_{v0}^{(1)}$, $\lambda_{t_0}^{(1)}, c_{v0}^{(1)}$ – опорні значення коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності першого шару пластини за початкової температури T_p), подання $\lambda_t(t)$, $c_v(t)$ і $a(t) = \lambda_t(t) / c_v(t)$ у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(\bar{T})$ та застосування перетворення Гудмена [4]

$$v = a_0^{(1)} \int_0^{\bar{T}} c_{v0} c_v^*(u) du \quad (8)$$

отримаємо крайову задачу:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(K_a(\bar{z}) a^*(v) \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial v}{\partial Fo}, \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\lambda_{t_0}^{(1)}} a^*(v) \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} + Bi \left(\bar{T}(v) \Big|_{\bar{z}=0} - \bar{T}_c \right) = 0, \quad (10)$$

$$v \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_i-0} = v \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_i+0}, \quad (11)$$

$$K_a(\bar{z}) a^*(v) \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_i-0} = K_a(\bar{z}) a^*(v) \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_i+0}, \quad (12)$$

$$v \Big|_{\bar{z}=1} = v_b, \quad (13)$$

$$v \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (14)$$

$$\text{де } K_a(\bar{z}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq z_1, \\ \frac{a_0^{(i)}}{a_0^{(1)}}, & z_{i-1} \leq z \leq z_i, \quad i = \overline{2, n-1}, \\ \frac{a_0^{(n)}}{a_0^{(1)}}, & z_{n-1} \leq z \leq b, \end{cases} \quad v_b = a_0^{(1)} \int_0^{\bar{r}_b} c_{v0} c_v^*(u) du.$$

Введення змінної Гудмена дозволило перегрупувати нелінійності і перенести розривні коефіцієнти з правої частини рівняння на приріст температури в ліву під знак похідної, що робить можливим розв'язання отриманої крайової задачі (8)-(14) чисельно, звівши методом прямих (здійснивши дискретизацію за змінною $\bar{z}$) до задачі Коші для СНЗДР [5]. При побудові напівдискретного аналогу задачі (8)-(14) доцільно виходити з рівнянь балансу тепла, записаних для елементарних об'ємів сіткової області (консервативні різницеві схеми), що є необхідною умовою збіжності в класі розривних коефіцієнтів нестационарних задач математичної фізики. Тому для апроксимації диференціального оператора сітковим оператором використовуємо інтегро-інтерполяційний метод [6]. Отриману СНЗДР на змінну Гудмена розв'язуємо чисельно за допомогою лінійних багатокрокових різницевих методів. Задаючи температурні залежності об'ємних теплоємностей матеріалів шарів, скориставшись оберненою інтерполяцією, визначаємо розподіл температурного поля в кусково-однорідному тілі за знайденими значеннями змінної Гудмена.

1. Гарматій Г. Ю., Попович В. С. Моделювання та визначення неусталеного термопружного стану двошарової термочутливої пластини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 4. – С.125–132.
2. Кушнір Р. М., Попович В. С. Про визначення усталеного термопружного стану багатощарових структур за високотемпературного нагрівання // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім.Т. Шевченка.– 2013. –Вип. 3. – С. 42–47.
3. Процюк Б.В. Квазистатические температурные напряжения в многослойной пластине при нагреве тепловым потоком // Теор. и прикл. механика. – 2003. – №1. – С. 21–26.
4. Самарский А.А, Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. — Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
5. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений/ Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. – Москва: Мир, 1979. –312 с
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989.

УДК 551.24.02 : 624.131.66

В. А. Герус, П. М. Мартинюк(Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне)**ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ
КОНТАКТНОЇ СУФОЗІЇ В НАСИЧЕНИХ ҐРУНТАХ МЕТОДОМ
СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Сформовано математичну модель взаємозв'язаних процесів контактної багато фракційної суфозії та фільтраційної консолідації в шаруватому гетерогенному пористому середовищі (рис. 1), яка в загальноприйнятих позначеннях містить наступні складові [1, 2]:

1. Рівняння фільтраційної консолідації

$$\frac{2\gamma a(c, T, h, \sigma_m)}{1 + \xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1 + e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial \sigma_m^{(i)}}{\partial t} + \frac{e}{\rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{e}{\rho_p} \left(\frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} \right) =$$

$$= (1 + e) (\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h, \sigma_m) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T)), \mathbf{X} \in \Omega, t > 0.$$

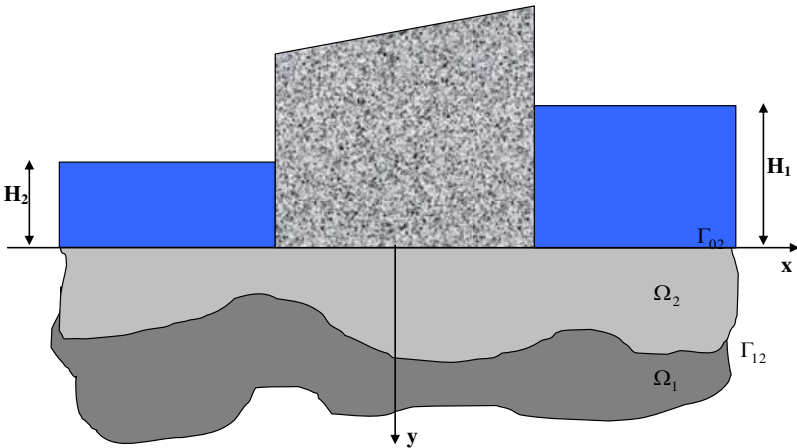


Рис. 1 Контактна суфозія в неоднорідному масиві ґрунту

2. Рівняння теплосолеперенесення

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = \sigma \frac{\partial c}{\partial t} - \gamma_1 (C_m - c), \mathbf{X} \in \Omega, t > 0.$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0.$$

3. Рівняння переносу суфозійних частинок

$$\frac{\partial \sigma_m^{(i)}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_2.$$

4. Кінематичні граничні умови

$$\left(\sigma_{\max} - \sum_{i=1}^l \sigma_m^{(i)}(\mathbf{X}, t) \right) \frac{\partial \Gamma_{12}(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^l (\mathbf{q}_i(\mathbf{X}, t), \mathbf{n}_{12}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{12};$$

$$\frac{\partial \Gamma_{02}(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{n_z^{(12)}} \frac{\partial \Gamma_{12}(x, t)}{\partial t} - \frac{2\gamma \left(1 - \sum_{i=1}^l \sigma_m^{(i)} \right)}{(1+e)(1+\xi)} \int_{\varphi(x)}^{\Gamma_{02}} a \frac{\partial h}{\partial t} dz; \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{02}.$$

5. Узагальнений закон Дарсі–Герсеванова та закон переносу суфозійних частинок

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(c, T, h, \sigma_m) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega};$$

$$\mathbf{q}_i(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{u}, u_{kr}^{(i)}) \sigma_m^{(i)}(\mathbf{X}, t) \mp w_i \nabla y - \mathbf{D}^{(i)} \nabla \sigma_m^{(i)}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega_2, \quad i = \overline{1, l},$$

де $\mathbf{X} = (x, y)$, w_i – швидкість осідання твердих часток i -ї фракції у вертикальному напрямку (« $\leftarrow$ » – вісь oy направлена вгору, « $\rightarrow$ » – вісь oy направлена вниз); $\mathbf{D}^{(i)}$ – тензор коефіцієнтів дисперсії суфозійних частинок; $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{u}, u_{kr}^{(i)}) = \{f_j^{(i)}\}_{j=1}^2$, $f_j^{(i)} = \alpha_{er}^{(i)}(u_j - u_{kr}^{(i)})_+ = \alpha_{er}^{(i)} \max\{0; u_j - u_{kr}^{(i)}\}$, $\alpha_{er}^{(i)}$ – коефіцієнт розмиву; $u_{kr}^{(i)}$ – скалярна критична швидкість розмиву для суфозійних частинок i -ї фракції.

6. Додаткові умови, які включають

- початкові умови для невідомих функцій та для вільних рухомих меж;
- граничні умови для функцій $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$, $\sigma_m(\mathbf{X}, t) = \{\sigma_m^{(i)}\}_{i=1}^l$;
- умови спряження на межі контакту Γ_{12} для функцій $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$.

Чисельний розв'язок відповідної нелінійної крайової задачі знайдено методом скінчених елементів (МСЕ) [3, 4]. Не зменшуючи загальності припущали, що у суфозійних частинок є лише одна фракція ($l=1$). Узагальнений розв'язок нелінійної крайової задачі, якою описується сформована математична модель, шукали у вигляді лінійної комбінації добутків невідомих коефіцієнтів, що залежать лише від часу, та базисних функцій $\varphi_i(\mathbf{X})$ скінченновимірному підпросторі всього простору узагальнених розв'язків:

$$\begin{aligned} & (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) = \\ & = \left(\sum_{i=1}^k h_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \sum_{i=1}^k c_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \sum_{i=1}^k T_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \sum_{i=1}^k \sigma_{mi}(t) \varphi_i(\mathbf{X}) \right). \end{aligned}$$

Оскільки коефіцієнти $h_i(t)$, $c_i(t)$, $T_i(t)$, $\sigma_m(t)$ залежать тільки від часу, то згідно з методом Гальоркіна ми отримаємо задачу Коші для системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Для знаходження її (задачі Коші) чисельного розв'язку можна використати лінеаризовану повністю неявну різницеву схему, схему Кранка-Ніколсона або схему предиктор-коректор. Такі ж самі часові дискретизації застосовувались для визначення положення вільних меж. При цьому для рівнянь теплосолеперенесення застосовувались стабілізаційні схеми МСЕ.

Аналіз результатів проведених чисельних експериментів розрахунку надлишкових напорів та концентрації суфозійних часток свідчить, що суфозійні процеси не значно впливають на розподіл напорів. Різниця між розподілом напорів з урахуванням впливу суфозійних явищ та без їх (на момент часу $t=360$ діб) лежить в межах кількох відсотків. Однак, зміна концентрації суфозійних частинок значно більше впливає на просідання ґрунту. Так, залежно від координати вузла верхньої рухомої межі $y = \Gamma_{02}(x, t)$, просідання за рахунок зміни концентрації суфозійних частинок при $t=360$ діб становить 75-85,15% від загального просідання. Тому при проектуванні споруд на неоднорідних суфозійних ґрунтах обов'язково потрібно проводити попередні прогностичні розрахунки величини просідань поверхні ґрунту для недопущення аварійних ситуацій.

1. *Мартинюк П. М.* Про узагальнення рівняння фільтраційної консолідації ґрунтів / П. М. Мартинюк, В. А. Герус // Труды XVII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2015). - Харьков-Сумы, 2015. – С. 161-164.
2. *Мартинюк П. М.* Математична модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням багатофракційної суфозії / П. М. Мартинюк, О. В. Гошко // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2013.–Вип. 4.–С.136–141.
3. *Савула Я. Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 222 с.
4. *Кіндибалюк Ар.* Застосування кусково-степеневих апроксимацій МСЕ для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії-реакції / Ар. Кіндибалюк, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. - 2014. - Вип. 22. - С. 60–74.

УДК 519.6

*М.І. Глебена^{*}, Г.Г. Цегелик^{**}**(^{*} Ужгородський національний університет,**^{**} Львівський національний університет імені Івана Франка)*

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

В [2] розроблено апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, який одержав широке застосування для побудови нових чисельних методів розв'язування окремих класів задач алгебри, математичного аналізу та диференціальних рівнянь [3]. Зокрема, цей апарат використано для побудови чисельного методу відшукування екстремуму довільних логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних [1].

У доповіді пропонується модифікація методу [1], направлена на підвищення його ефективності.

Постановка задачі.

Нехай в області $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ визначена логарифмічно вгнута функція $f(x, y)$, яка може бути як гладкою, так і негладкою. Потрібно знайти максимальне значення вищеназваної функції.

Алгоритм методу.

Побудуємо в області D сітку:

$$x = x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = (b - a)/n;$$

$$y = y_j = c + js, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad s = (d - c)/m.$$

Позначимо $f(x_i, y_j) = a_{ij}$ ($i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$). Побудуємо для значень $f(x_i, y_j) = a_{ij}$ неklasичну мажоранту Ньютона $M_f(x, y)$ [2].

Оскільки функція $f(x, y)$ є логарифмічно вгнутою в області D , то

$$R_{ij}(x) = \left(\frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}} \right)^{\frac{1}{h}} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m),$$

$$R_{ij}(y) = \left(\frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}} \right)^{\frac{1}{s}} \quad (i = 0, 1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m),$$

$$R_{ij}(x, y) = \left(\frac{a_{i-1,j-1}}{a_{ij}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{h^2 + s^2}}} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).$$

Легко бачити, що якщо для деякої точки $(x_k, y_l) \in D$ виконуються умови

$$R_{kl}(x) \leq 1, \quad R_{k+1,l}(x) > 1, \quad (1)$$

$$R_{kl}(y) \leq 1, \quad R_{k,l+1}(y) > 1, \quad (2)$$

то точка (x_k, y_l) з точністю $\varepsilon = \max(s, h)$ є точкою екстремуму функції $f(x, y)$.

Вибравши за початкове наближення екстремальної точки будь-яку точку $(x_k, y_l) \in D$, алгоритм методу є таким.

1. Обчислюємо $R_{kl}(x)$, $R_{kl}(y)$, $R_{k+1,l}(x)$, $R_{k,l+1}(y)$. Якщо умови (1), (2) виконуються, то точку (x_k, y_l) з точністю $\varepsilon \leq \max(s, h)$ приймаємо за оптимальну і на цьому робота алгоритму завершується. Якщо обидві умови не виконуються, то визначаємо $\tilde{R}_{kl} = \max\{R_{kl}(x), R_{kl}(y), R_{kl}(x, y)\}$ і переходимо до пункту 2. Якщо умова (1) виконується, а умова (2) не виконується, то визначаємо $\tilde{R}_{kl} = \max\{R_{kl}(y), R_{kl}(x, y)\}$ і переходимо до пункту 3. Якщо умова (2) виконується, а умова (1) не виконується, то визначаємо $\tilde{R}_{kl} = \max\{R_{kl}(x), R_{kl}(x, y)\}$ і переходимо до пункту 4.
2. Якщо $R_{kl}(x) \leq 1$ і $R_{kl}(y) \leq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1. Якщо $R_{kl}(x) \geq 1$, $R_{kl}(y) \geq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$, то за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1. У випадку якщо $R_{kl}(x) \leq 1$ і $R_{kl}(y) \geq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1.

3. Якщо $R_{kl}(y) \leq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1. Якщо $R_{kl}(y) \geq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1.
4. Якщо $R_{kl}(x) \leq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1. Якщо $R_{kl}(x) \geq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1.
1. *Глебена М.І.* Чисельний метод мажорантного типу відшукування екстремуму довільних логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних / М.І.Глебена, Г.Г.Цегелик // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2011.– Вип. 22. №2 – С.50 – 53.
2. *Цегелик Г.Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн.- 1989.- Т.41.- №9. с.1273-1276.
3. *Цегелик Г.Г.* Апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г.Г.Цегелик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013.- 190с.

УДК 519.8

В.М. Горбачук

(Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України)

**МЕТОД БАНАХА–КНАСТЕРА–ШТЕЙНГАУЗА РОЗВ'ЯЗАННЯ
ЗАДАЧІ ЧЕСНОГО ПОДІЛУ**

У 1949 р. професор Вроцлавського університету (Польща) Г. Штейнгауз зробив доповідь на конференції у Вашингтоні (США), опубліковану у журналі «Економетрика» [14], заснованому під час Великої депресії. Головував на конференції директор Інституту статистики університету Упсала (Швеція) Х. Волд (H. Wold), а обговорював цю доповідь майбутній Нобелівський лауреат 1975 р. Т. Купманс (T. Koopmans) (Нідерланди). Доповідь була присвячена проблемі чесного розподілу. Про новизну цієї проблеми на той час свідчить те, що вона не згадувалася у виданні [5], але згадувалася у пізнішому виданні [6].

Добре відомий принцип поділу пирога на $n=2$ половини, який полягає у правилі «один ділить, а інший вибирає», мабуть, існує в англійській правничій традиції, що ґрунтується на загальноприйнятих звичаях (інститутах). Г. Штейнгауз поставив задачу поширення такого принципу на $n > 2$, розв'язав її при $n=3$, а С. Банах і Б. Кнастер розв'язали її при довільному n [8, 9, 12, 13].

Чесний (прагматичний – у перекладі французькою) поділ можна вважати грою, де слід розрізнити правила й методи. Задача поділу на 2 половини – це гра з правилом «один ділить, а інший вибирає». Правило для першого гравця дозволяє йому розрізати пиріг так, як він хоче; правило для другого гравця дає йому вільний вибір однієї з двох частин пирога. У методі розв'язання гри обидві сторони вважаються рівними стосовно права ділити чи вибирати та незалежними одна від одної: перший гравець розрізає пиріг таким способом, щоб обидві частини пирога були рівноцінними з його точки зору; другий гравець обирає ту частину, яку вважає на свій погляд ціннішою.

У певному сенсі другий гравець (послідовник за Штакельбергом [3]) має перевагу, бо перший гравець (лідер за Штакельбергом) не має можливості отримати більше половини пирога за своєю власною оцінкою, не бажаючи брати ризик отримання менше половини пирога. З іншого боку, перший гравець може мати шанс отримати більше без подібного ризику. Цю недосконалість через порядок рішень гравців можна усувати, якщо формалізувати процедуру рішень як гру в розширеній формі, до ролі гравців визначаються однаковими ймовірностями.

Якщо у випадку $n = 2$ кожний гравець хотів би дістати не менше $1/2$ пирога, то у випадку $n = 3$ кожний хотів би отримати не менше $1/3$ пирога. Нехай серед гравців А, В, С гравець А повільно рухає великий ніж над пирогом (довільної форми) так, що частка пирога по один бік ножа неперервно зростає. Якщо будь-який гравець вважає, що по один бік ножа залишилася $1/3$ пирога, то він дає команду «Ріж!»; гравець А негайно відрізає шматок пирога і віддає його тому гравцю, який подав команду (коли команду дають одночасно 2 або 3 гравці, то відрізаний шматок віддається будь-кому з них). Двох інших гравців теж влаштовує залишена на них частина пирога, бо вони (неявно) вважають, що ця частина містить не менше $2/3$ усього пирога. Тоді задача зводиться до випадку $n = 2$.

Зазначений метод узагальнюється на випадок довільного n через математичну індукцію [1]. Один з гравців рухає ніж над пирогом. Перший, хто подасть команду «Ріж!», отримує перший шматок (коли команду дають одночасно кілька гравців, то відрізаний шматок віддається будь-кому з них за жеребом). Потім ця універсальна процедура повторюється з рештою $(n - 1)$ гравців і продовжується, поки не залишиться 2 гравці. Тоді задача зводиться до класичного випадку $n = 2$: один гравець рухає ніж над пирогом, а кожний з обох гравців може дати команду «Ріж!», коли вважатиме, що по один бік ножа залишилося не менше $1/2$ залишку пирога. Такий метод може застосовуватися до чесного поділу не тільки пирога, але й інших неперервних продуктів, ресурсів і факторів, які можна ділити на довільні частки.

Зазначений метод є чесним у тому сенсі, що кожний учасник приймає свою стратегію подання команди для вибору частини пирога, не меншої $1/n$ за його власною оцінкою: учасник може першим обрати таку частину або стати одним з членів меншої групи, яка ділитиме частину пирога, не меншу $(n - 1)/n$ за його власною оцінкою.

Метод Банаха–Кнастера–Штейнгауза для довільного n складається з таких кроків: нехай серед упорядкованих гравців А, В, С, ..., N гравець А першим відрізає частину пирога, яку він вважає не меншою за $1/n$. Потім гравець В має право (але не обов'язок) зменшити цей шматок. Незалежно від того, яке рішення прийняв попередній гравець В, гравець С має право (але не обов'язок) зменшити уже зменшений (або не зменшений) шматок, і так далі до гравця N. Правило зобов'язує гравця взяти ту частку пирога, яку він торкався (зменшував) останнім, і вийти з гри. Після цього решта $(n - 1)$ гравців повторюють процедуру для залишку пирога. Метод Банаха–Кнастера–Штейнгауза гарантує отримання кожним гравцем частини пирога, не меншої $1/n$ за його власною оцінкою, незалежно від поведінки решти гравців. Цей метод

можна використовувати для поділу таких об'єктів, як поля, ділянки, сади, де загальна вартість є сумою вартостей частин. Прагматичний метод можна поширювати на поділ об'єктів між гравцями, які мають різні переваги (функції корисності).

Практична важливість прагматичного методу у тому, що його процедура поділу виявляє ринкову вартість частин розглядуваного об'єкту, оснований на експертних оцінках гравців (партнерів). Цей метод дозволяє кожному партнеру гарантувати частку загальної вартості за своєю власною оцінкою, не меншу від тієї, яку він заслуговує а ргіогі також за своєю власною оцінкою. Водночас метод розвиває оснований на суб'єктивних оцінках фундаментальний напрям ціноутворення, який започаткували видатні економісти Х. Госсен (H. Gossen), К. Менгер (K. Menger), С. Джевонс (S. Jevons), Л. Вальрас (L. Walras) [2]. Цей напрям не збігається з теорією ціноутворення К. Маркса (K. Marx). Прагматичний метод має важливе прикладне значення для розуміння децентралізованого прийняття рішень у Польщі та Європейському Союзі [7].

Прагматичний поділ не гарантує партнеру, що вибрана ним частка не менша частки іншого партнера за оцінкою останнього. Метод [15], що узагальнює результати [11, 16] і оснований на теоремі К. Борсука (K. Borsuk), дозволяє поділити об'єкт T на n частин (portions) $P_1, \dots, P_n$, яким відповідають числам $q_1, \dots, q_n$, $0 \leq q_i \leq 1$, так, що $E_j(P_i) = q_i E_j(T)$, $i, j = 1, \dots, n$, де $E_j(X)$ – міра вартості об'єкта X на погляд партнера j . Отже, можна досягти поділу, справедливого з точок зору всіх партнерів і водночас такого, що задовольняє їхнім суб'єктивним оцінкам.

Г. Штейнгауз [11] назвав проблему С. Улама [16] задачею бутерброда з шинкою: для даних трьох скінченних і довільних мір (ємностей) A_1, A_2, A_3 у 3-вимірному евклідовому просторі знайти таку площину P у цьому просторі, яка одночасно розрізає кожну з трьох ємностей на рівні частини (здійснює бісекцію кожної ємності) [4]. Ключова умова – довільне розташування ємностей. Умови задачі можна уявити як багатoshаровий бутерброд, що складається з довільно розподілених шинки, сиру і хліба: треба розрізати ножом цей бутерброд так, щоб отримати рівні частини кожної складової (шинки, сиру і хліба).

Через топологічну інваріантність вимірності ця задача має обмежуватися прикладом, де число об'єктів (мір), які треба ділити, не перевищує число вимірів розглядуваного простору, а поділяюча гіперплощина має вимірність на одиницю нижчу. Отже, можна здійснити одночасну бісекцію трьох скінченних ємностей двовимірною площиною. Тоді узагальнена задача бісекції формулюється таким чином: у n -

вимірному евклідовому просторі знайти $(n-1)$ -вимірну гіперплощину, яка здійснює одночасну бісекцію кожного з n тіл [15].

Результати [11, 15, 16] спираються на обмеження вимірності: у 3-вимірному просторі ніж, що здійснює бісекцію двох тіл, повертається так, щоб також здійснювати бісекцію третього тіла. Прагматичний метод можна поширювати на множину окремих об'єктів, коли кожний партнер виписує свою оцінку вартості кожного об'єкта, щоб надавати об'єкти партнерам з найвищими заявками [10]. Згадані С. Банах, Б. Кнастер, К. Менгер, Г. Штейнгауз, С. Улам свого часу працювали у Львові.

1. *Гарднер М.* Есть идея! – М.: Мир, 1982. – 305 с.
2. *Горбачук В.* Макроекономічні методи: теорії та застосування. – К.: Кий, 2000. – 271 с.
3. *Горбачук В.М.* Методи індустріальної організації. – К.: А. С. К., 2010. – 224 с.
4. *Ржевский С.В.* Математические развлечения. – К.: Європейський університет, 1999. – 123 с.
5. *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. – Москва–Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 143 с.
6. *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. – М.: Наука, 1981. – 152 с.
7. *Domański R.* Kształtowanie otwartych regionów ekonomicznych. – Warszawa: PWN, 1972.
8. *Knaster B.* Sur le probleme du partage pragmatique de H. Steinhaus // Annales de la Societe Polonaise de Mathematique. – 1946. – 19. – P. 228–230.
9. *Knaster B., Steinhaus H.* Sur le partage pragmatique // Comptes Rendus de la Societe des Sciences et des Lettres de Wroclav. – 1947. – 2. – P. 1–13.
10. *Lewis A.* Aspects of fair division. – Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1980. – 19 p.
11. *Steinhaus H.* A note on the ham sandwich theorem // Mathesis Polska. – 1938. – 9. – P. 26–28.
12. *Steinhaus H.* Remarques sur le partage pragmatique // Annales de la Societe Polonaise de Mathematique. – 1946. – 19. – P. 230–231.
13. *Steinhaus H.* The problem of fair division // Econometrica. – 1948. – Vol. 16. – № 1. – P. 101–104.
14. *Steinhaus H.* Sur la division pragmatique // Econometrica. – 1949, July. – Vol. 17. Supplement: Report of the Washington Meeting. – P. 315–319.
15. *Stone A.H., Tukey J.W.* Generalized «sandwich» theorems // Duke mathematical journal. – 1942. – Vol. 9. – № 2. – P. 356–359.
16. *Ulam S.* Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre // Fundamenta Mathematicae. – 1930. – Vol. 16. – P. 140–150.

УДК 519.6:517.958

В.М. Горлач, Г.А. Шинкаренко* ***

(* Львівський національний університет імені Івана Франка,

** Політехніка Опольська)

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ АКУСТИКИ ТЕРМОГІДРОПРУЖНИХ СИСТЕМ

У роботах [1-3] обґрунтовано математичну модель термогідроакустики (дисипативної акустики) стосовно невідомих вектора зміщень $\mathbf{u}$ та температури θ , що описують поширення акустичних хвиль у в'язкій теплопровідній рідині з урахуванням зв'язаності механічних і температурних полів. Там же побудовано відповідні варіаційні задачі для нестационарних та вимушених усталених коливань і встановлено умови їх коректності. У роботі [4] обґрунтовано математичну модель акустичної взаємодії слабков'язких пружного тіла та рідини в термінах переміщень.

Узагальнення отриманих результатів дозволяє сформулювати математичну модель термогідропружності, що описує поширення акустичних хвиль у слабков'язких пружному тілі та рідині з урахуванням зв'язаності механічних і температурних полів.

Відмітимо, що для опису акустичних коливань у слабков'язкій рідині використано лінеаризовані рівняння Нав'є-Стокса (див. [3,4]).

Надалі верхніми індексами ^{S} та ^{F} будемо позначати невідомі та фізичні характеристики пружного тіла та рідини відповідно. Нехай пружне тіло та рідина займають обмежені області Ω^S та Ω^F точок $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^d \in R^d$, $d = 1, 2$ або 3 , і нехай область $\Omega = \Omega^S \cup \Omega^F$ має неперервну за Ліпшицем межу $\Gamma = (\Gamma^S \cup \Gamma^F) \setminus \Gamma^C$, де $\Gamma^C := \Gamma^S \cap \Gamma^F \neq \emptyset$ поверхня контакту. Введемо частинами визначений вектор переміщень $\mathbf{u} = \{u_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$ для всіх $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$ так, що $\mathbf{u} = \mathbf{u}^S$ в $\Omega^S \times [0, T]$ і $\mathbf{u} = \mathbf{u}^F$ в $\Omega^F \times [0, T]$. Подібним чином опишемо невідому температуру $\theta = \theta(\mathbf{x})$, густину середовища $\rho(\mathbf{x})$, питому теплоємність $c_v(\mathbf{x})$, початкову температуру $\theta_0(\mathbf{x})$, коефіцієнти теплопровідності $\chi_{ij}(\mathbf{x})$ та теплового розширення $\alpha_{ij}(\mathbf{x})$, модулі пружності і в'язкості $a_{ijk}(\mathbf{x})$ і $c_{ijk}(\mathbf{x})$ відповідно, інтенсивність розподілених джерел звуку $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \{f_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$ та тепла $w = w(\mathbf{x}, t)$.

Тоді взаємодія акустичного та теплового полів у розглядуваній системі пружне тіло-рідина описується такою початково-крайовою задачею термогідропружності в термінах пружних зміщень і температури:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти вектор пружних зміщень } \mathbf{u} = \{u_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d \text{ та} \\ \text{приріст температури } \theta = \theta(\mathbf{x}, t) \text{ такі, що задовольняють рівняння} \\ \rho u_i'' - \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}, \theta) = f_i, \quad c_v \theta' - (\chi_{ij} \theta_{,j})_{,i} + \theta_0 \alpha_{ij} c_{ijkm} e_{km}(\mathbf{u}') = w, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}, \theta) := a_{ijkm} [e_{km}(\mathbf{u}) - \alpha_{km} \theta] + c_{ijkm} e_{km}(\mathbf{u}'), \\ e_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \\ \text{крайові умови} \\ \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma_u \times [0, T], \Gamma_u \subset \Gamma, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u}, \theta) n_j = \hat{\sigma}_i \text{ на } \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u, \\ \theta = 0 \text{ на } \Gamma_\theta \times [0, T], \Gamma_\theta \subset \Gamma, \quad -n_i \chi_{ij} \theta_{,j} = \hat{q} \text{ на } \Gamma_q \times [0, T], \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_\theta, \\ \text{умови ідеального контакту пружного тіла і рідини} \\ \mathbf{u}^S = \mathbf{u}^F, \quad (\sigma_{ij}^S - \sigma_{ij}^F) n_j = 0, \\ \theta^S = \theta^F, \quad (\chi_{ij}^S \theta_{,j}^S - \chi_{ij}^F \theta_{,j}^F) n_i = 0 \quad \text{на } \Gamma^C \times [0, T] \\ \text{та початкові умови} \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}'|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega. \end{array} \right.$$

Тут використано вектор зовнішньої нормалі $\mathbf{n} = \{n_i\}_{i=1}^d$, $n_i := \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_i)$.

Сформулюємо відповідну варіаційну задачу термогідропружності

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{v} = 0 \text{ на } \Gamma_u\}, \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H} := [L^2(\Omega)]^d, \\ \theta_0 \in G := L^2(\Omega), (l, z) \in L^2(0, T; \mathbf{V}' \times G'); \\ \text{знайти пару } (\mathbf{u}, \theta) \in L^2(0, T; \mathbf{V} \times G) \text{ таку, що} \\ m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ \quad - b(\theta(t), \mathbf{v}) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle, \\ s(\theta'(t), g) + k(\theta(t), g) + b(g, \mathbf{u}'(t)) = \langle z(t), g \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad a(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ s(\theta(0) - \theta_0, g) = 0 \quad \forall g \in G. \end{array} \right. \quad (1)$$

Вжиті вище білінійні форми та лінійні функціонали мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} a_{ijkm} e_{ij}(\mathbf{u}) e_{km}(\mathbf{v}) dx, \\ c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} c_{ijkm} e_{ij}(\mathbf{u}) e_{km}(\mathbf{v}) dx, \quad b(g, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \theta_0 \alpha_{ij} c_{ijkm} e_{km}(\mathbf{v}) g dx, \\ s(\theta, g) := \int_{\Omega} c_v \theta g dx, \quad k(\theta, g) := \int_{\Omega} \chi_{ij} \theta_{,i} g_{,j} dx, \\ \langle l, \mathbf{v} \rangle := \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v} ds, \quad \langle z, g \rangle := \int_{\Omega} w g dx + \int_{\Gamma_q} \hat{q} g ds, \end{array} \right.$$

де лінійні неперервні функціонали l та z описують зовнішні та внутрішні джерела надходження механічної та теплової енергії.

Послугуючись міркуваннями та технікою, викладеними у [2,4], можемо стверджувати, що подана вище варіаційна задача (1) є коректно

сформульовано, тобто її розв'язок $(\mathbf{u}, \theta) \in L^2(0, T; \mathbf{V} \times G)$ існує, єдиний та неперервно залежить від її даних, якщо останні є достатньо регулярними.

Застосування класичної процедури Гальоркіна напівдискретизації за просторовими змінними приводить до розгляду варіаційної задачі у скінченновимірних просторах

$$\begin{cases} \mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}, \quad G_h \subset G \quad \forall h > 0, \\ \dim \mathbf{V}_h = N = N(h) \rightarrow \infty, \quad \dim G_h = M = M(h) \rightarrow \infty, \quad \text{if } h \rightarrow 0, \end{cases}$$

та подання шуканих наближень як розвинень за базисними функціями

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N u_k(t) \phi_k(\mathbf{x}), \quad \theta_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^M \vartheta_k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T].$$

Для відшукування невідомих коефіцієнтів розвинень $\mathbf{U}(t) = \{u_k(t)\}_{k=1}^N$ та $\Theta(t) = \{\vartheta_k(t)\}_{k=1}^M$ отримуємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{U}''(t) + \mathbf{C}\mathbf{U}'(t) + \mathbf{A}\mathbf{U}(t) - \mathbf{B}\Theta(t) = \mathbf{L}(t), \\ \mathbf{S}\Theta'(t) + \mathbf{K}\Theta(t) + \mathbf{B}^T\mathbf{U}'(t) = \mathbf{Z}(t) \quad \forall t \in (0, T], \\ \mathbf{M}\mathbf{U}'(0) = \mathbf{Y}^0, \quad \mathbf{A}\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}^0, \quad \mathbf{S}\Theta(0) = \Theta^0, \end{cases}$$

де матриці $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$ та вектори $\mathbf{L}$, $\mathbf{Z}$ обчислені за виразами для білінійних форм та лінійних функціоналів ($\mathbf{M} = \{m(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_k)\}_{i,k=1}^N$ тощо).

На основі процедури Петрова-Гальоркіна з покроковою частинами квадратичною апроксимацією зміщень і частинами лінійною апроксимацією температури за повною аналогією з [3] отримуємо однокрокову рекурентну схему (ОРС) інтегрування задачі Коші за часом

$$\begin{cases} \text{задано } \{\dot{\mathbf{U}}^0, \Theta^0\}, \Delta t > 0, \gamma, \beta \in [0, 1]; \\ \text{знайти } \{\ddot{\mathbf{U}}^{j+1/2}, \dot{\Theta}^{j+1/2}\} \text{ та } \{\mathbf{U}^{j+1}, \dot{\mathbf{U}}^{j+1}, \Theta^{j+1}\}, \text{ такі що} \\ [\mathbf{M} + \Delta t \gamma \mathbf{A} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta \mathbf{C}] \ddot{\mathbf{U}}^{j+1/2} - \Delta t \gamma \mathbf{B} \dot{\Theta}^{j+1/2} = \mathbf{L}(t_{j+1/2}) - \mathbf{A} \dot{\mathbf{U}}^j - \mathbf{C}[\mathbf{U}^j + \Delta t \gamma \dot{\mathbf{U}}^j] + \mathbf{B} \Theta^j, \\ -\mathbf{B}^T \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{U}}^{j+1/2} + [\mathbf{S} + \Delta t \gamma \mathbf{K}] \dot{\Theta}^{j+1/2} = \mathbf{Z}(t_{j+1/2}) - \mathbf{K} \Theta^j - \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{U}}^j, \\ \dot{\mathbf{U}}^{j+1} = \dot{\mathbf{U}}^j + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^{j+1/2}, \quad \mathbf{U}^{j+1} = \mathbf{U}^j + \frac{1}{2} \Delta t (\dot{\mathbf{U}}^j + \dot{\mathbf{U}}^{j+1}), \\ \Theta^{j+1} = \Theta^j + \Delta t \dot{\Theta}^{j+1/2} \quad j = 0, 1, \dots \text{ доки } j \Delta t \leq T. \end{cases}$$

Для аналізу стійкості такої ОРС у [3] використано рівняння балансу енергії дискретизованої задачі і подано достатній критерій безумовної її стійкості.

Також, за аналогією з викладками [2], для слабков'язких середовищ можна сформулювати коректну варіаційну задачу, що описує вимушені усталені гармонійні коливання термогідропружних систем.

За умов, що джерела коливань тривалий час змінюються в часі гармонійно із круговою частотою $\omega = \text{const} > 0$ за законом вигляду

$$\begin{cases} l(t) = l_1 \cos \omega t + l_2 \sin \omega t, \\ z(t) = z_1 \cos \omega t + z_2 \sin \omega t \end{cases} \quad \forall t \in (0, T],$$

усталені гармонійні розв'язки варіаційної задачі (1) слід шукати у вигляді лінійних комбінацій

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) \cos \omega t + \mathbf{u}^2(\mathbf{x}) \sin \omega t, \\ \theta(\mathbf{x}, t) = \theta^1(\mathbf{x}) \cos \omega t + \theta^2(\mathbf{x}) \sin \omega t. \end{cases}$$

де $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ та θ^1, θ^2 – невідомі амплітуди зміщень та температури.

Тоді варіаційна задача (1) набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано кругову частоту } \omega = \text{const} > 0; \\ \text{знайти } (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \theta^1, \theta^2) \in (\mathbf{V} \times G)^2 \text{ такий, що} \\ -\omega^2 m(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) + \omega a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^1) + c(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) - b(\mathbf{v}^1, \theta^1) = \langle l_1, \mathbf{v}^1 \rangle \quad \forall \mathbf{v}^1 \in \mathbf{V}, \\ -\omega^2 m(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) - \omega a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^2) + c(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) - b(\mathbf{v}^2, \theta^2) = \langle l_2, \mathbf{v}^2 \rangle \quad \forall \mathbf{v}^2 \in \mathbf{V}, \\ \omega s(\theta^2, g^1) + k(\theta^1, g^1) + \omega b(\mathbf{u}^2, g^1) = \langle z_1, g^1 \rangle \quad \forall g^1 \in G, \\ -\omega s(\theta^1, g^2) + k(\theta^2, g^2) - \omega b(\mathbf{u}^1, g^2) = \langle z_2, g^2 \rangle \quad \forall g^2 \in G. \end{array} \right. \quad (2)$$

1. Horlatch V. Finite element analysis of forced steady-state thermoacoustic waves in dissipative fluid / V. Horlatch, I. Klymenko, H. Shynkarenko // Manufacturing Processes. Actual Problems – 2013. Vol. 1. Basic Science Applications. Opole: Politechnika Opolska, 2013. pp. 47-66.
2. Horlatch V. Formulation and well-posedness of the variational problem of viscous heat-conducting fluid acoustics / V. Horlatch, I. Klymenko, G. Shynkarenko // Journal of Numerical and Applied Mathematics – 2012. № 3 (109). – С. 53-71.
3. Горлач В. Побудова та аналіз однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі варіаційної задачі акустики в'язкої теплопровідної рідини / В. Горлач, І. Клименко, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – 2012. – Вип. 18. – С. 76-95.
4. Войтович В.М. Математична модель акустики гідропружних систем у термінах переміщень / В.М. Войтович, В.М. Горлач, Я.В. Кондратюк, Г.А. Шинкаренко // Прикладні проблеми механіки і математики: НАН України, ІППИМ ім.Я.С.Підстригача – 2005. № 2. – С. 108-118.

УДК 519.6

І. В. Гребеннік, О. С. Чорна

(Харківський національний університет радіоелектроніки)

**СПЕЦІАЛЬНІ ТРАНСПОЗИЦІЇ ЕЛЕМЕНТІВ ПЕРЕСТАНОВОК
ТА ВЛАСТИВОСТІ ЇХ КОМПОЗИЦІЇ**

Множина перестановок P_n та її властивості використовуються у математичному моделюванні та рішенні багатьох наукових та прикладних задач [1-6]. Один з відомих способів дослідження комбінаторних множин базується на їх зануренні у евклідов простір [3,5]. Опукла оболонка множини перестановок, зануреної у евклідов простір, являє собою перестановочний багатогранник [2]. Таке занурення дозволяє використовувати засоби неперервної математики, в тому числі, комбінаторні багатогранники, при аналізі комбінаторних задач [2, 6]. Однією з базових властивостей перестановочного багатогранника є критерій суміжності його вершин.

Основою побудови перестановок є транспозиції породжуючих елементів. Виділимо особливий клас транспозицій. Транспозиції які належить до цього класу, відповідають критерію суміжності у перестановочному багатограннику [2]. Тобто, при застосуванні до деякої перестановки транспозиції з даного класу буде отримана інша перестановка, така що, вершини комбінаторного багатогранника, відповідні цим двом перестановкам, є суміжними. Використання таких транспозицій та відповідних властивостей комбінаторного багатогранника, дозволяє розв'язувати задачі комбінаторної генерації і оптимізації, використовуючи властивості суміжних вершин багатогранника [1].

Актуальним є питання побудови композиції декількох транспозицій спеціального класу і аналіз результатів їх впливу на деяку перестановку. Оскільки у композиції беруть участь декілька транспозицій, необхідно також дослідити залежність результатів їх застосування від порядку і розташування транспозицій у композиції.

Окремо необхідно розглянути два основних питання застосування композицій транспозицій до перестановки:

1. Скільки різних перестановок можна отримати, при застосуванні заданої композиції транспозицій до деякої перестановки, з урахуванням всіх можливих послідовностей транспозицій у композиції?
2. Скільки різних послідовностей транспозицій у заданій композиції при застосуванні до деякої перестановки призведуть до одної перестановки?

Відповіді на ці питання дозволять застосовувати відомі методи розв'язання задач на багатогранниках, використовуючи для цього не тільки суміжні вершини, а й послідовності суміжних вершин, котрі відповідають композиціям транспозицій спеціального класу.

Для розв'язання усіх, сформульованих питань, у роботі розглядається функція σ_i на множині породжуючих елементів, $\sigma_i : A \rightarrow A$, визначена наступним чином:

$$\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2, \dots, \sigma(i) = i + 1, \sigma(i + 1) = i, \dots, \sigma(n) = n,$$

де $i \in J_{n-1}$. Така функція, є бієктивною і називається транспозицією елементів $\{i, i + 1\} \subset A = J_n$.

В залежності від породжуючих елементів, що беруть участь у транспозиції, в роботі введені поняття транспозицій, що перетинаються, та транспозицій, що не перетинаються.

Основна частина дослідження присвячена аналізу властивостей комутативності транспозицій в залежності від того чи перетинаються транспозиції, які беруть участь у одній композиції. Доведено твердження, стосовно того що, для композиції будь якої кількості транспозицій, що не перетинаються, властивість комутативності виконується. Сформульовано наслідок з твердження, про результати застосування до деякої перестановки $p \in P_n$ такої композиції. Сформульовані леми про властивості комутативності транспозицій що не перетинаються та про деякі композиції обох видів транспозицій. Для кожної леми вплив відповідної композиції транспозицій на деяку перестановку $p \in P_n$ визначено як наслідок.

1. Гребеннік І.В., Юрченко Л.Ю. Впорядкування перестановок при вирішенні задач комбінаторної оптимізації з лінійною цільовою функцією // Системи обробки інформації. – 2007. – Вип. 8 (66). – 139–142 с.
2. Ємелічев В.А. Багатогранники, граfi, оптимізація. / В.А. Ємелічев, М.М. Ковальов, М. К. Кравцов – М.:Наука, 1981. – 344 с.
3. Стоян Ю.Г. Математичні моделі і оптимізаційні методи геометричного проектування. / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.
4. Стенлі Р. Перелічувальна комбінаторика: пер. с англ. – М.: Мір, 1990. – 440 с.
5. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець – К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
6. Ісаченко Ю.А. Застосування поліедрального підходу до задачі на циклічних перестановках // Сучасні комп'ютерні інформаційні технології, ГрГУ, том 2, Гродно, 2008. – стр. 203-206.

ОБРОБКА ДАНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ МЕТОДОМ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ПРИ ДІАГНОСТУВАННІ ПРИПОВЕРХНЕВИХ ТРІЩИН

Виявлення в приповерхневому шарі елементів конструкції дефектів, а також ідентифікація їх параметрів дозволяє визначати значення напружень і деформацій в реальній системі, що надає можливість оцінювати безпечність експлуатації такої конструкції. Для виявлення вказаних дефектів можуть бути використані різні методи неруйнівного контролю – акустичні, теплові, оптичні, поляризаційно-оптичні, а також аналітичні методи. Метод обернених задач передбачає визначення місця розташування, конфігурації і глибини тріщини за результатами вимірів значень переміщень або деформацій на частині границі області.

Розглядається задача щодо визначення координат точок пластини $X_k = \{x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}\}$, $k = \overline{1, K}$, у яких розташовані дефекти у вигляді тріщин, по вимірних значеннях переміщень w_p в точках X_p , $p = \overline{1, P}$.

Тривимірна модель пластини подається в дискретній формі з використанням методу скінченних елементів. Зазначені дефекти моделюються за допомогою функції $u(X)$, яка має вигляд:

$$u_k(X) = \begin{cases} \delta(X - X_k), & \text{при наявності дефекта} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (1)$$

де $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака.

Постановка задачі доповнюється обмеженням:

$$\int_{\Omega} \sum_k u_k(X) d\Omega = K. \quad (2)$$

Обернена задача формулюється в варіаційній постановці, її розв'язок відшукується як квазірозв'язок, для якого має виконуватися умова:

$$J = \int_{\Omega} (w_p(u(X), X_p) - w_p^*)^2 d\Omega \Rightarrow \min, u \in U \quad (3)$$

де $w_p(u(X), X_p)$, w_p^* – обчислені з використанням математичної моделі при відомих параметрах тріщини і виміряні значення переміщень відповідно.

Процедура методу скінченних елементів призводить до розв'язуючої системи рівнянь

$$A(u)w = R \quad (4)$$

де $w = \{w_n\}$ – вектор переміщень; $R = \{R_n\}$ – вектор, що характеризує навантажувальний комплекс; $A = [a_{ij}(u)]$ – матриця жорсткості з елементами $\overline{a_{ij}} = a_{ij}(1 + \alpha_{ij}u_n)$, $i, j = \overline{1, N}$; $u = \{u_n\}$, $n = \overline{1, N}$.

Вводиться множина n -вимірних векторів $Q = \{q_m\}$, $m = \overline{1, M}$, $M = C_N^K$, де $q_m = \{q_{1m} q_{2m} \dots q_{km} 0 \dots 0\}$. Компоненти q_{km} , $k = \overline{1, K}$ відповідають номерам вузлів пластини, в яких є дефект, значення компонент дорівнює 1, на інших (N-K) позиціях розташовуються 0.

Елементи матриці A містять множник u_n , значення якого дорівнюють 1, якщо $n \in q_{km}$, та 0, якщо $n \notin q_{km}$.

Умови (2), (4) приєднуються до функціонала (3) за допомогою множників Лагранжа $\Phi = (\varphi_0, \varphi_i)$, $i = \overline{1, N}$. Умова мінімуму розширеного функціоналу дає розв'язок (u^*, Φ^*) , як сідлову точку функціоналу J^* [1].

Тоді для визначення значень u_n маємо умови:

$$u_n^* = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \varphi_i \sum_{n=1}^N a_{in} \alpha_{in} w_n + \varphi_0 < 0 \\ 0, & \text{якщо } \varphi_i \sum_{n=1}^N a_{in} \alpha_{in} w_n + \varphi_0 > 0 \\ \text{будь-яке число} \in [0, 1], & \text{якщо } \varphi_i \sum_{n=1}^N a_{in} \alpha_{in} w_n + \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

Наводяться приклади розв'язання задач про ідентифікацію розташування тріщини в пластині за значеннями w_p^* , виміряними точно і «зашумленими» випадкової похибкою.

1. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. – К.: Наукова думка, 2005. – 562с.

АЛГОРИТМИ ОМК З ДИВЕРСИФІКОВАНИМ ПОШУКОМ

Оптимізація мурашиними колоніями (ОМК) – один із перспективних напрямів розробки прикладних алгоритмів комбінаторної оптимізації [4]. Подібні алгоритми належать до класу методів ройового інтелекту в оптимізації [8].

Завдяки своїй універсальності і гнучкості, алгоритми ОМК успішно застосовуються для розв'язання багатьох типів задач комбінаторної оптимізації, починаючи із задач комівояжера. Численні дослідження показали, що часто вони конкурують із спеціалізованими алгоритмами, призначеними для розв'язання конкретних задач. В той же час алгоритми ОМК розробляються для все нових і нових задач оптимізації.

Алгоритми ОМК відносяться до моделі-орієнтованих методів, оскільки вони використовують власну модель задачі комбінаторної оптимізації, яка розв'язується [2, 4, 8]. Така модель зазвичай подається у вигляді спеціального зваженого графа $G=(V,E)$. Ваги ребер, що характеризують їх привабливість і визначають так звану матрицю мурашиних маршрутів, формуються шляхом композиції як прямого використання даних задачі, що розв'язується ("евристична інформація"), так і "досвіду" мурах ("феромонний слід"). Пошук розв'язку задачі комбінаторної оптимізації інтерпретується як знаходження оптимального маршруту в графі G групою штучних мурах (агентів), які не взаємодіють між собою напряму, а лише через зміну навколишнього середовища.

Загальну схему алгоритмів ОМК можна подати так.

1. Початкові установки: вибір значень параметрів алгоритму, (зокрема, числа мурах t в колонії), ініціалізація значень феромонних слідів.

2. Утворення нового покоління мурах і їх розміщення випадковим чином у вершинах V графа G . Зазначені вершини грають роль початкових фрагментів маршрутів.

3. Для кожної мурахи із популяції:

а) формування підмножини припустимих вершин із множини N_i вершин, що є сусідніми до тієї вершини $i \in V$, яка є останньою в поточному фрагменті маршруту;

б) обчислення ймовірності p_{ij} переходу від вершини i до довільної припустимої вершини $j \in N_i$ як функції від значень феромону τ_{ij} на ребрі $(i, j) \in E$ та евристичної інформації η_{ij} ;

с) імовірнісний вибір чергової припустимої вершини $s \in N_i$, включення її у кінець фрагменту маршруту;

д) модифікація значень τ_{ij} , якщо вибране онлайнове покровокове оновлення;

е) якщо маршрут не побудований повністю, переходимо на п.а), інакше мураха завершує свою роботу.

4. Коли всі мурахи завершують свою роботу, здійснюється модифікація феромонних значень для певних дуг графа G , а також "випаровування" феромону (пониження значень τ_{ij}) для всіх його ребер.

Запам'ятовування найкращого маршруту. Всі поточні мурахи завершують свою діяльність.

5. Якщо умови завершення не виконуються, то переходимо на п.2.

6. Завершення роботи алгоритму.

Фактично, на кожному кроці конкретна мураха досліджує найближчих сусідів тієї вершини графа задачі, якою закінчується побудований нею на даний момент фрагмент маршруту.

Прагнення до підвищення ефективності алгоритмів ОМК спричинило, зокрема, появу алгоритмів, що використовують декілька колоній (острівні моделі [8]), та гібридних метаевристик (див., наприклад, [3, 6]).

Пропонується диверсифікація пошуку шляхом дослідження в п.3 обчислювальної схеми не множини найближчих сусідів, а більш розширених підмножин простору розв'язків [1]. Для цього при виборі варіантів продовження маршруту мурахам надається можливість враховувати не одну, а відразу декілька вершин, які можуть бути включені в цей маршрут. Для більшої наочності викладу ідеї підходу розглянемо випадок, коли ця кількість вершин дорівнює двом.

Зазначений підхід можна імплементувати в алгоритм ОМК, якщо п.3 модифікувати наступним чином.

3.' Для кожної мурахи:

а) формування множини N_i^2 , яка складається із пар $j, k \in V$ вершин, що утворюють ланцюжок попарно інцидентних вершин графа G , а саме $(i, j), (j, k) \in E$, $k \neq j$, та виділення припустимих комбінацій;

б) обчислення ймовірності p_{ijk} переходу від вершини i до вершини k через вершину j як функції від значень τ_{ijk} , залежних від значень феромону τ_{ij} , τ_{jk} на припустимому фрагменті маршруту (i, j, k) та евристичної інформації φ_{ijk} , співвіднесеної до пари ребер (i, j) та (j, k) ;

с) ймовірнісний вибір вершин $s, t \in N_i^2$ і доповнення цими вершинами поточного фрагменту маршруту після вершини i .

Досвід застосування ОМК дозволяє зробити висновок, що обчислення аналогів феромонних значень для фрагменту (i, j, k) можна здійснювати як мультиплікативне $\tau_{ijk} = \tau_{ij} \cdot \tau_{jk}$, середнє $\tau_{ijk} = (\tau_{ij} + \tau_{jk}) / 2$ чи мінімальне $\tau_{ijk} = \min\{\tau_{ij}, \tau_{jk}\}$ значення феромону на відповідних ребрах.

Аналогічним чином можуть визначатися і евристичні значення φ_{ijk} на основі відповідних значень на ребрах $(i, j), (j, k) \in E, k \neq j$.

Ефективність розробленого алгоритму досліджувалася шляхом аналізу результатів обчислювального експерименту із розв'язання ряду відомих прикладних задач комівояжера розмірності від 497 до 657. У всіх розрахунках були отримані кращі результати у порівнянні з макс-мінним алгоритмом мурашиних систем (MAX-MIN Ant System – MMAS) – однією із найкращих модифікацій мурашиних алгоритмів для цієї задачі [4,7].

Пропонований підхід дозволяє розширити сферу пошуку в ОМК, створюючи умови для його диверсифікації, тобто уникнення передчасної збіжності – однієї із найгостріших проблем для більшості прикладних алгоритмів комбінаторної оптимізації. Крім того, як і ряд інших алгоритмів мурашиних колоній, пропонований алгоритм може успішно застосовуватися при створенні ефективних гібридних метаевристик та гіперевристик [2, 5, 6].

1. Гуляницький Л.Ф. Диверсифікація пошуку в алгоритмах ОМК / Л.Ф. Гуляницький // Abstracts of Int. Conf "Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU–2011)" (September 19-23, 2011, Yalta, Ukraine). – Київ, 2011. – Р. 66–67.
2. Сергиенко И.В. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации / И.В. Сергиенко, Л.Ф. Гуляницький, С.И. Сиренко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 5. – С. 71–83.
3. Blum C. Hybrid metaheuristics in combinatorial optimization: A survey / C. Blum, J. Puchinger, G.R. Raid, A. Roli // Applied Soft Computing. – 2011. – 11, 6. – P. 4135–4151.
4. Dorigo M. Ant Colony Optimization / M. Dorigo, T. Stützle. – Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 2004. – 305 p.
5. Huliannytskyi L.F. Cooperative model-based metaheuristics / L.F. Huliannytskyi, S.I. Sirenko // Electronic Notes in Discrete Mathematics. – 2010. – 36. – P. 33–40.
6. Raidl G.R. A unified view on hybrid metaheuristics / G.R. Raidl // Lect. Notes Computer Sci. – Berlin: Springer-Verlag, 2006. – 4030. – P. 1–12.
7. Stützle T. MAX-MIN ant system / Stützle T., Hoos H. // Future Generation Computing Systems. – 2000. – 16, N 8. – P. 889–914.
8. Swarm intelligence and bio-inspired computation: theory and applications / Xin-She Yang et al. eds. – London: Elsevier Newnes, 2013. – 450 p.

УДК 519.8

Л.Ф.Гуляницький, О.Ю.Мулеса***

(* Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України,
** ДВНЗ «Ужгородський національний університет»)

ДО КЛАСИФІКАЦІЇ МЕТАЕВРИСТИК

Існує декілька підходів до класифікації алгоритмів комбінаторної оптимізації: за точністю, за типом використаних просторів, за структурою обчислювальної схеми тощо [1, 7].

Так за точністю алгоритми поділяються на точні, які знаходять глобальний розв'язок, наближені та евристичні алгоритми.

Наближені алгоритми можна розділити на власне наближені алгоритми, які не лише знаходять розв'язок з певною точністю, а і дозволяють дати певні його оцінки, та евристичні алгоритми, які будуються на основі правдоподібних міркувань, хоча і не дають ніяких оцінок знайденому розв'язку.

Ітераційні методи, які оперують на кожному кроці одним (поточним) розв'язком, називаються траєкторними; інколи у зарубіжній літературі такі методи називаються базованими на одному розв'язку чи стані (Single-Solution Based/Single-State Methods), а під траєкторними розуміють такий їх підклас, який породжує послідовність сусідніх розв'язків – траєкторію у просторі пошуку. Алгоритми, які опрацьовують на кожній ітерації не один, а декілька розв'язків одночасно, називаються популяційними (Population-Based Methods).

Серед сучасних наближених оптимізаційних методів розв'язання задач комбінаторної оптимізації окремий клас утворюють метаевристики. Метаевристика – це гібридний метод розв'язування широкого класу обчислювальних задач шляхом такого комбінування існуючих процедур, при якому одна виступає провідною, а інша (чи декілька інших) – як підлегла. У якості як провідної, так і підлеглих процедур зазвичай виступають деякі відомі евристики чи інші алгоритми. Якщо складовою метаевристики є певний математичний метод, то вживають термін мат евристика [4].

За складністю структури АКО можна виділити:

- "прості" алгоритми;
- гібридні алгоритми;
- метаевристики;
- гібридні метаевристики
- гіперевристики.

Гіперевристикою (гіперевристичним алгоритмом) називають метод пошуку, який орієнтований на автоматизацію процесів вибору, комбінування або адаптації чи налаштування декількох більш простих

алгоритмів (евристик чи метоевристик) для ефективного розв'язування ЗКО чи їх класів [2]. Це може досягатися як вибором наявних евристик чи їх фрагментів, так і генеруванням нових.

Таким чином, якщо метоевристики та інші алгоритми здійснюють, в основному, пошук у просторі розв'язків задач комбінаторної оптимізації, то простором пошуку для гіперевристик є множина евристик (більш простих алгоритмів чи їх частин).

За впливом на ландшафт пошуку більшість алгоритмів комбінаторної оптимізації можна віднести до таких, що залишають його незмінним. В той же час, є алгоритми, які модифікують цей ландшафт шляхом:

- зміни простору розв'язків (наприклад, послідовні алгоритми);
- зміни цільової чи оцінкової функції (алгоритми керованого локального пошуку);
- варіації системи околів, що використовується при пошуку (алгоритми локального пошуку зі змінними околами, метод вектора спаду з пульсуючими околами).

Якщо робота алгоритму базується на безпосередніх даних задач комбінаторної оптимізації, то такі алгоритми комбінаторної оптимізації відносяться до задаче-орієнтованих алгоритмів.

В ряді нових алгоритмів комбінаторної оптимізації використовуються не стільки прямі дані задачі комбінаторної оптимізації, скільки спеціальна модель задачі (наприклад, феромонна матриця та матриця маршрутів у оптимізації мурашиними колоніями) – такі алгоритми отримали назву моделе-орієнтованих.

Метоевристики також класифікують відповідно до парадигми, яка використовується при їх побудові. Буде розглянуто підхід до класифікації та наведені приклади поширених метоевристик, серед яких такі.

1. Детермінований локальний пошук – це метоевристики ітераційного типу, в основі яких лежить частковий перебір варіантів на кожній ітерації в околі поточного розв'язку.

Виділяють такі поширені метоевристики цього типу:

- пошук зі змінюваними (пульсуючими) околами;
- керований локальний пошук;
- табу-пошук.

2. Метоевристики на основі стохастичного локального пошуку. Використовують у якості підлеглої процедуру локального пошуку, у яку вбудовано ймовірнісні механізми. Це, зокрема, дозволяє будувати нерелаксаційні обчислювальні схеми з метою уникнення передчасної збіжності. Найбільш відомі такі алгоритми:

- метод звужувальних околів;
- алгоритми імітаційного відпаду;
- G-алгоритми;
- повторюваний локальний пошук;

- квантовий відпал;
- метод кросс-ентропії;
- GRASP.

3. Еволюційні метаевристики – це алгоритми пошуку, що використовуються для розв'язання задач оптимізації і моделювання шляхом послідовного відбору, комбінування і варіації шуканих параметрів розв'язків із використанням механізмів, що нагадують біологічну еволюцію. Найбільш відомими є:

- генетичні алгоритми;
- міметичні алгоритми;
- імунні алгоритми.

Варто відзначити, що за певної інтерпретації складових компонент до цього класу можна віднести і ряд метаевристик, які описуються авторами у інших термінах.

4. Метаевристики на основі ройового інтелекту – децентралізовані системи простих агентів, які локально взаємодіють як з середовищем, так і між собою. Часто їх об'єднують під назвою "навіяні природою чи засновані на принципах біології" [5]. Ці метаевристики бурхливо розвиваються в останні роки, тому важко скласти повний перелік; відмітимо ті, які вже пройшли певний період досліджень і апробації:

- мурашині алгоритми;
- оптимізація роєм часток;
- бджолині алгоритми;
- алгоритми світлячків;
- алгоритми моделювання поведінки бактерій.

Останнім часом запропоновані і досліджуються також алгоритми комбінаторної оптимізації, засновані на моделюванні чи імітації поведінки косяків риб, жаб, летючих мишей.

5. Методи сканування простору – популяційні метаевристики, на кожній ітерації яких формуються напрями нелокального пошуку в просторі розв'язків на основі наявних декількох варіантів наближень. Метою є диверсифікація процесу пошуку у просторі розв'язків. У комбінаторній оптимізації знайшли застосування такі методи цього типу:

- розсіяний пошук;
- перекомпоновка маршрутів;
- Н-метод.

Як впливає, метаевристики використовують різні стратегії як при виборі наступного поточного розв'язку, так і для прийняття такого розв'язку. Підсумовуючи сказане, перелічимо деякі із найважливіших особливостей цих стратегій:

- Траєкторні методи. При пошуку наступного наближення пошук ведеться в околі поточного розв'язку. Це правило застосовується, наприклад, у порогових алгоритмах та методах табу.

- Методи нелокального збурення. Здійснюють пошук у всьому просторі розв'язків. Прикладами є переходи у повторюваному локальному пошуку, генетичних алгоритмах, Н-алгоритмах і колоніях мурах.
- Популяційні (мультиагентні) методи. Результати пошуку агентів (простих процедур чи алгоритмів) заносяться в колективний досвід..
- Керований пошук чи пошук з використанням пам'яті. Включають ряд додаткових правил и вказівок щодо напрямку пошуку. У генетичних і міметичних алгоритмах популяція містить пам'ять про останній крок пошуку; у мурашиних алгоритмах адаптивною пам'яттю всієї колонії є матриця маршрутів. В пошуку табу список заборон є короткостроковою пам'яттю.
- Некерований пошук чи методи без запам'ятовування. Проводять повністю евристичний пошук.

Класифікація метаевристик (як і інших алгоритмів комбінаторної оптимізації) дозволяє як будувати нові гібридні метаевристики, так і деталізувати та досліджувати існуючі метаевристики [6].

Перспективним напрямом створення нових комбінованих алгоритмів комбінаторної оптимізації є розробка кооперативних метаевристик [1,3,7]. Їх особливістю є пошук (оптимізація) в просторі моделей, який проводиться на основі часткових моделей, сформованих базовими алгоритмами.

1. *Сергиенко И.В.* Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации / И.В. Сергиенко, Л.Ф. Гуляницкий, С.И. Сиренко // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 5. — С. 71-83.
2. *Blum C.* Hybrid metaheuristics in combinatorial optimization: A survey / C. Blum, J. Puchinger, G.R. Raidl, A. Roli // Applied Soft Computing. — 2011. — **11**, 6. — P. 4135-4151.
3. *Hulianytskyi L.F.* Cooperative model-based metaheuristics / L.F. Hulianytskyi, S.I. Sirenko // Electronic Notes in Discrete Mathematics. — 2010. — **36**. — P. 33-40.
4. *Matheuristics. Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming* / V. Maniezzo, T. Stutzle, S. Voß, ed. — N.Y., Dordrecht, Heidelberg, London: Springer-Verlag, 2009. — 269 p.
5. *Pintea C.M.* Advances in Bio-inspired Computing for Combinatorial Optimization Problems / C.M. Pintea — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2014. — 188 p.
6. *Raidl G.R.* A unified view on hybrid metaheuristics / G.R. Raidl // Lect. Notes Computer Sci. — Berlin: Springer-Verlag, 2006. — **4030**. — P. 1–12.
7. *Talbi El-Ghazali.* Metaheuristics: from design to implementation / El-Ghazali Talbi. — Vol. 74. John Wiley & Sons, 2009. — 593 pp.

УДК 330.46

Л.П. Добуляк, Г.Г. Цегелик

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ПІДПРИЄМСТВОМ ВЗЯТОГО КРЕДИТУ НА МОЖЛИВІ ВИДИ ДІЯЛЬНОСТІ З ВРАХУВАННЯМ ПОТРЕБ НА КОЖНИЙ ВИД ДІЯЛЬНОСТІ

Припустимо, що підприємство має можливість зайнятися n видами діяльності $D_1, D_2, \dots, D_n$. Для цього підприємство може взяти кредит в розмірі m грошових одиниць, кожна з яких становить s одиниць (наприклад, $m=10000$, $s=100$, $ms=1000000$ - сума кредиту). Відомо, що потреба в кредиті на вид діяльності D_i становить r_i грошових одиниць. При цьому на i -тий вид діяльності може бути виділено не більше j грошових одиниць, де $j=0,1,\dots,r_i$. В залежності від розміру виділених коштів на той чи інший вид діяльності підприємство отримує відповідний прибуток. Задача полягає в такому розподілі кредиту на види діяльності, за якого величина сумарного прибутку була б найбільшою.

Нехай $p_i(x_j)$, $i=1,2,\dots,n$ - величина прибутку від виділення на i -тий вид діяльності D_i $x_j = j$, $j=0,1,\dots,r_i$ грошових одиниць коштів; x_i , $i=1,2,\dots,n$ - кількість грошових одиниць коштів, що планується виділити на i -тий вид діяльності D_i . Тоді математична модель задачі матиме вигляд

$$P = \sum_{i=1}^n p_i(x_j) \rightarrow \max$$

за умов

$$\sum_{i=1}^n x_i = m,$$

$$x_i \in \{0,1,\dots,r_i\}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Для розв'язування задачі розробимо алгоритм на основі динамічного програмування [1, 2, 3]. При цьому вважатимемо, що види діяльності впорядковані за зростанням їхніх потреб і виконується умова $r_{i+1} < 2r_i$, $i=1,2,\dots,n-1$.

Позначимо

$$k_i = \sum_{j=1}^i r_j, \quad i=1,2,\dots,n,$$

і вважатимемо, що $k_l \leq m < k_{l+1}$, де $l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Процес розв'язування задачі розіб'ємо на n кроків. На першому кроці визначимо максимальний прибуток від виділення $x_j = j$, $j = 0, 1, \dots, r_1$ грошових одиниць коштів на перший вид діяльності D_1 . Взагалі, на i -му кроці при $i = 1, 2, \dots, l$ визначимо максимальний прибуток від виділення $x_j = j$, $j = 0, 1, \dots, k_i$, а при $j = l+1, l+2, \dots, n$ $x_j = j$, $j = 0, 1, \dots, m$ грошових одиниць коштів на види діяльності $D_1, D_2, \dots, D_i$.

Нехай $P_i(x_j)$ і $P_i^*(x_j)$ відповідає прибуток і максимальний прибуток від виділення $x_j = j$ грошових одиниць коштів на перші i види діяльності $D_1, D_2, \dots, D_i$. Тоді алгоритм розв'язування задачі є таким:

На першому кроці

$$P_1(j) = P_1^*(j) = p_1(j), \quad j = 0, 1, \dots, r_1.$$

На другому кроці

$$P_2(j) = \begin{cases} p_2(j) + P_1^*(0), \\ p_2(j-1) + P_1^*(1), \\ \dots\dots\dots \\ p_2(0) + P_1^*(j), \end{cases}$$

$$P_2^*(j) = \max_{0 \leq k < j} \{p_2(k) + P_1^*(j-k)\} \quad \text{для } j = 0, 1, \dots, r_1.$$

$$P_2(j) = \begin{cases} p_2(j) + P_1^*(0), \\ p_2(j-1) + P_1^*(1), \\ \dots\dots\dots \\ p_2(j-r_1) + P_1^*(r_1), \end{cases}$$

$$P_2^*(j) = \max_{j-r_1 \leq k < j} \{p_2(k) + P_1^*(j-k)\} \quad \text{для } j = r_1+1, r_1+2, \dots, r_2;$$

$$P_2(j) = \begin{cases} p_2(r_2) + P_1^*(j-r_2), \\ p_2(r_2-1) + P_1^*(j-r_2+1), \\ \dots\dots\dots \\ p_2(j-r_1) + P_1^*(r_1), \end{cases}$$

$$P_2^*(j) = \max_{j-r_1 \leq k < r_2} \{p_2(k) + P_1^*(j-k)\} \text{ для } j = r_2 + 1, r_2 + 2, \dots, k_2.$$

Взагалі, на i -му кроці ($i = 3, 4, \dots, l$)

$$P_i(j) = \begin{cases} p_i(j) + P_{i-1}^*(0), \\ p_i(j-1) + P_{i-1}^*(1), \\ \dots\dots\dots \\ p_i(0) + P_{i-1}^*(j), \end{cases} \quad (1)$$

$$P_i^*(j) = \max_{0 \leq k < j} \{p_i(k) + P_{i-1}^*(j-k)\} \text{ для } j = 0, 1, \dots, r_i;$$

$$P_i(j) = \begin{cases} p_i(r_i) + P_{i-1}^*(j - r_i), \\ p_i(r_i - 1) + P_{i-1}^*(j - r_i + 1), \\ \dots\dots\dots \\ p_i(0) + P_{i-1}^*(j), \end{cases} \quad (2)$$

$$P_i^*(j) = \max_{0 \leq k < r_i} \{p_i(k) + P_{i-1}^*(j-k)\} \text{ для } j = r_i + 1, r_i + 2, \dots, k_{i-1};$$

$$P_i(j) = \begin{cases} p_i(r_i) + P_{i-1}^*(j - r_i), \\ p_i(r_i - 1) + P_{i-1}^*(j - r_i + 1), \\ \dots\dots\dots \\ p_i(j - k_{i-1}) + P_{i-1}^*(k_{i-1}), \end{cases} \quad (3)$$

для $j = k_{i-1} + 1, k_{i-1} + 2, \dots, k_i$.

На i -му кроці при $i = l + 1, l + 2, \dots, n - 1$ формули для обчислення $P_i(j)$ і $P_i^*(j)$ будуть аналогічними тільки j буде змінюватися від 0 до m . Так, якщо $i = l + 1$, то при $m = k_l$ використовуються формули (1), (2), а також формули (3) для $j = k_{i-1} + 1, k_{i-1} + 2, \dots, m$. Якщо $i > l + 1$, то використовуються формули (1), а також формули (2) для $j = r_i + 1, r_i + 2, \dots, m$.

На останньому кроці досить обчислити $P_n(m)$ і $P_n^*(m)$.

$$P_n(m) = \begin{cases} p_n(r_n) + P_{n-1}^*(m - r_n), \\ p_n(r_n - 1) + P_{n-1}^*(m - r_n + 1), \\ \dots\dots\dots \\ p_n(0) + P_{n-1}^*(m), \end{cases}$$

$$P_n^*(m) = \max_{0 \leq k < r_n} \{p_n(k) + P_{n-1}^*(m-k)\}.$$

Оптимальний розподіл грошових одиниць ресурсів визначається так. Нехай $P_n^*(m)$ досягає максимуму для $k = s_1$. Тоді s_1 грошових одиниць коштів треба виділити на вид діяльності D_n . Далі треба розподілити $m - s_1$ грошових одиниць коштів на види діяльності $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$. Якщо $P_{n-1}^*(m - s_1)$ досягає максимуму для $k = s_2$, то s_2 грошових одиниць коштів треба виділити на вид діяльності D_{n-1} . І т. д. Нехай $P_2^*(m - (s_1 + s_2 + \dots + s_{n-2}))$ досягає максимуму для $k = s_{n-1}$, то s_{n-1} грошових одиниць треба виділити на вид діяльності D_2 . Нарешті $s_n = m - (s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1})$ грошових одиниць коштів треба виділити на вид діяльності D_1 . Максимальне значення цільової функції становить $P_n^*(m)$ одиниць.

1. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 400 с.
2. Цегелик Г.Г. Математичне програмування: навч. посібник / Г.Г. Цегелик. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2011. – 238 с.
3. Добуляк Л.П. Оптимальний розподіл малим підприємством взятого кредиту на можливі види діяльності з врахуванням обмежень на потреби в кредитах / Л.П. Добуляк, Г.Г. Цегелик // Матер. І Міжн. XX Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (7-9 квітня 2044 р., м. Львів). — Львів: Львів. національний університет ім. Івана Франка, 2014. – 79-80.

УДК 519;517.94;532.5

С.О. Довгий*, Д.І. Черній**

(*Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України,
 **Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ТЕХНОЛОГІЇ (НА ОСНОВІ МДО) ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

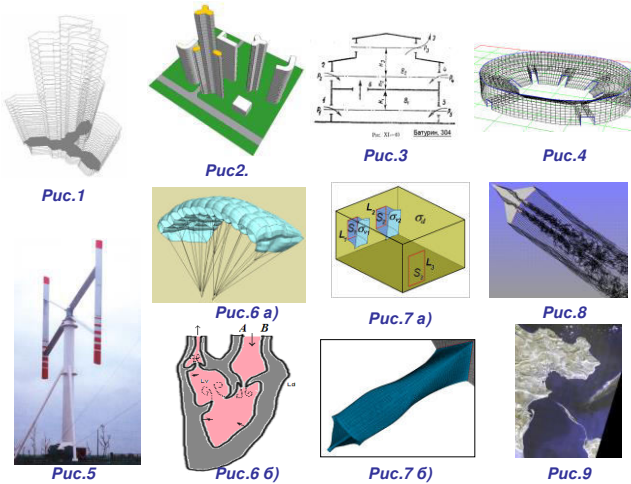
Розглядається достатньо широке коло аеро/гідродинамічних процесів із різних прикладних прикметних галузей [1], які можливо поєднати в окремий клас задач, завдяки фізично припустимим спрощенням та універсальності математичної постановки[2,4-6].

Зведення аеро/гідродинамічної задачі до системи граничних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь на **рухомих границях**
 $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$:

$$L_d(t) : \begin{cases} z = \omega_d(t) \in L_d, & t \geq t_0 : \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)^n} d\omega \right\} = W_n - \operatorname{Re} \left\{ \bar{V}_\infty n(\omega_d) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)^n} d\omega \right\} \\ \int_{L_d} f(\omega_d, t) d\omega_d = - \int_{L_v(t)} f(\omega_v, t) d\omega_v + C_j, j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$L_v(t) : \begin{cases} z = \omega_v(t) \in L_v(t), & t > t_0 : \\ \frac{d\bar{\omega}_v(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)^n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)^n}, \\ \omega_v = \omega_d \Rightarrow f(\omega_v, t) = f(\omega_d, t), \\ t = t_0 : \\ L_v(t_0) = L_{v0} \end{cases}$$

дозволяє застосувати МДО – метод дискретних особливостей (чисельний метод розв'язування сингулярних/гіперсингулярних інтегральних рівнянь [3]) для побудови універсальних обчислювальних технологій, комп'ютерна реалізація яких забезпечує моделювання динамічних процесів із різних прикладних прикметних галузей в реальному масштабі часу.



1. Довгий С.А. Технологии прогнозирования эволюции физических процессов для систем поддержки принятия решений / Довгий С.А., Лебедь А.Г., Литвин И.Н., Черний Д.И // 10 Міжнародна науково-практична конференція: «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях», 5-9 вересня 2011р., Київ-Харьків-АР Крим, 2011, Збірник наукових праць, с.5-36.
2. Белоцерковский С.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. /Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М - М.: «Наука», 1988, 232с.
3. Довгий С.О. Метод сингулярних інтегральних рівнянь / Довгий С.О., Ліфанов І.К. - Теорія та застосування. –Київ, “Наукова думка,” 2004р. – 510 с.
4. Meleshko V.V. The circulation model of vortex flow of a viscid wall layer. / Meleshko V.V., Cherniy D.I., Dovgiy S.A.// 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, August 19-24, 2012, Beijing, China; Abstract Book (23-rd ICTAM 2012, Beijing, China), p.101.
5. Cherniy D. The Vortex Model of a Viscid Wall's Layer / Cherniy D., Dovgiy S., Meleshko V. // IUTAM Symposium on "Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function", Abstract Book, March 10(Sun)-14(Thu), 2013, Fukuoka, Japan, pp. 126-127.
6. Cherniy D. One of Partial Solutions of the Navier-Stokes Equation. / Cherniy D. // XXIV International Conference “PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES” (PDMU-2014), Abstracts, September 1-5, 2014, Cesky Rudoles, Czech Republic, Kyiv – 2014. – с. 29-30.

УДК 681.518:004:657

В.М. Домрачев, В.В. Третиник

(Європейський університет, м.Київ)

МОДЕЛЮВАННЯ ГАЛУЗЕВИХ РИЗИКІВ ЯК ОСНОВА ПРОГНОЗУВАННЯ ВВП В УКРАЇНІ

Зв'язок потоків товарів та відповідних потоків грошових коштів між галузями економіки важливий чинник економічного зростання. Цей зв'язок відіграє вагомий роль у моделі загальної рівноваги (міжгалузевого балансу), яка свого часу використовувалася для прогнозування у плановій економіці. Нестача певної галузі у кредитних ресурсах може призвести до негараздів у цій галузі а також у сумісних галузях. При переході до моделі розвитку сімейно-кланового капіталізму стає важливим аналіз галузевих ризиків, які пов'язані з невідповідністю потоків капіталу грошовим потокам в економіці, що у свою чергу зменшує ефективність та уповільнює економічне зростання виробництва.

Фінансова криза не зменшила дисбалансів в українській банківській системі, як і взагалі у світовій економіці. З другого боку, завершився черговий етап надування бульбашок на ринках спекулятивних активів України. У банків виникає питання – кого кредитувати? Адже їхня ресурсна база зростає, відповідно ресурси необхідно вкладати в прибуткові активи, зокрема кредити. Отже, для банків стає актуальним питання аналізу галузевих ризиків [1-5].

Кредитний ризик – це ймовірність фінансових втрат внаслідок невиконання позичальниками своїх зобов'язань. Важливу складову кредитного ризику являє галузевий ризик, який впливає з невизначеності щодо перспектив розвитку галузі позичальника.

Аналіз кредитування банками окремих галузей економіки та галузевих ризиків банків України дозволяє стверджувати, що має місце залежність прибутку та процентного доходу банку від частки кредитів у певну галузь у його кредитному портфелі.

Динаміка зміни обсягу кредиту не завжди співпадає з динамікою доданої вартості певної галузі. У період сучасної фінансової кризи одним з найголовніших видів ризику є галузевий ризик. Галузевий ризик - це вірогідність втрат в результаті змін в економічному стані галузі і пов'язан з ступенем цих змін як усередині галузі, так і в порівнянні з іншими галузями.

При аналізі галузевого ризику необхідно враховувати наступні чинники:

- діяльність фірм даної галузі, а також суміжних галузей за певний (вибраний) період часу;

- наскільки діяльність фірм даної галузі стійка в порівнянні з економікою країни в цілому;
- які результати діяльності різних підприємницьких фірм усередині однієї і тієї ж галузі, чи є значна розбіжність в результатах.

З роботою підприємств галузі, а отже, і з рівнем галузевого ризику безпосередньо пов'язана стадія промислового життєвого циклу галузі та внутрігалузева конкуренція. При цьому рівень внутрігалузевої конкуренції є джерелом інформації про стійкість підприємницьких фірм в галузі по відношенню до фірм інших галузей і, як правило, служить оцінкою галузевого ризику.

Про рівень внутрігалузевої конкуренції можна судити за такою інформацією:

- ступінь цінової та нецінової конкуренції;
- легкість або складність входження організації в галузь;
- наявність або недолік близьких і конкурентоздатних за ціною замінників;
- ринкова здатність покупців;
- ринкова здатність постачальників;
- політичне й соціальне оточення.

Проте перелічені умови, в яких функціонує галузь, схильні до несподіваних, іноді різких змін. Тому підприємницьким фірмам необхідно постійно враховувати галузеві ризики у будь-яких видах діяльності.

Для різних галузей на різних часових інтервалах прибутковість і ризики неоднакові, вони неоднакові й для різних галузевих сегментів. Під час кризи відбувся перерозподіл галузевої структури кредитного портфеля банків України, проте не всі галузі постраждали однаково і не однаково почали відновлюватись. Так за інформацією Національного банку України станом на 01.05.2015 р. 58,5% кредитів наданих українськими банками юридичним особам склали всього дві галузі - оптова торгівля та переробна промисловість. Ці ж галузі склали найбільшу суму проблемної заборгованості (63,3 %).

Тоді як за станом на 01.07.2012 р. більше половини кредитів юридичним особам (54 %) прийшлося на п'ять галузей: оптова торгівля; грошове та фінансове посередництво; діяльність у сферах права, бухгалтерського обліку, інжинірингу; операції з нерухомим майном, надання послуг підприємцям; будівництво. А найбільшу суму проблемної заборгованості (52 %) склали кредити у 4 галузі: оптова торгівля; будівництво; операції з нерухомим майном; виробництво харчових продуктів, напоїв. Це не враховуючи кредитування фізичних осіб (33,8 % проблемної заборгованості).

Одним з показників, які свідчать про ефективність кредитування певної галузі є відношення прибутковості галузі (доданої вартості) до частки проблемних кредитів у цю галузь (коефіцієнт Шарпа).

Для побудови моделі функціонування економіки країни у плановій економіці вкористовувалась модель міжгалузевого балансу. За часів переходу до ринкової економіки все більше стали використовувати регресійні моделі. Однак лінійні регресійні моделі не враховували зворотні зв'язки, які виникали між окремими галузями. У запропонованій роботі використовується метод LISREL (лінійні структуровані рівняння) – це реалізований метод побудови багаторівневої ієрархічної моделі, який враховує зв'язки між окремими галузями формуючими ВВП країни [6]. Згідно з наявними в Україні статистичними даними, які оприлюднюються Державною службою статистики України [7] та Національним банком України [8], для побудови моделі достатньо дворівневої моделі, яка реалізована у програмному середовищі системи LISREL [9].

Так динаміка ВВП України тісно пов'язана з динамікою індексу промисловості (таб.1). Індекс промисловості у свою чергу залежить від добувної та обробної промисловості, будівництва, тощо. Ці залежності формують другий рівень рівнянь моделі.

Таблиця 1. Кореляційна матриця показників індексу промисловості та реального ВВП України, квартальні дані, період 1993 – 2015 рр.

	Індекс промисловості (річна зміна), %	Реальний ВВП (річна зміна), %
Індекс промисловості (річна зміна), %	1	0,936
Реальний ВВП (річна зміна), %	0,936	1

Під час кризи в Україні відбулася значна зміна ризиків кредитування окремих галузей. Головним антикризовим заходом Уряду є прийняття рішення відносно стратегії розвитку окремих галузей, які є стратегічно важливими для України. Потрібно вирішити, які галузі доцільно підтримувати: ті, які найбільше постраждали внаслідок кризи, або ті, що є стратегічно важливішими або ті, які є найбільш прибутковими.

Крім принципового вирішення стратегічних цілей розвитку галузей, необхідно оцінити дієвість можливого застосування інструментів антикризових заходів, вирішити за рахунок кого забезпечити галузі фінансовими ресурсами – держави (шляхом зміни податкового навантаження), чи через заохочування підприємців (наприклад, за рахунок запровадження державно-приватного партнерства). У процесі прийняття

рішення стосовно стратегії подальшого галузевого розвитку економіки України необхідно використовувати моделювання динаміки можливого розвитку окремих галузей господарства.

Отже, динаміка падіння виробництва в окремих галузях не збігається з факторами кредитного ризику, які впливають на прибуток та процентний дохід банків. Це свідчить про те, що найбільш прибуткові галузі не використовують кредитних ресурсів банків у належному обсязі.

Для ефективного реагування та згладжування наслідків наступних етапів світової фінансової кризи та підтримки окремих галузей економіки потрібна розробка системи антикризового реагування й створення системи моніторингу ризиків; розбудова інфраструктури і механізмів руху капіталів серед сегментів фінансового ринку; активізація кредитної діяльності банків з державним капіталом; розширення інструментів впливу на грошово-кредитний ринок та впровадження нових інструментів для оцінювання ризиків кредитування галузей як елементу системи антикризових заходів.

1. Глушков В.М. Макроэкономические модели и принципы построения ОГАС / В.М.Глушков. – М.: «Статистика», 1975. – 160 с.
2. Домрачев В.М. Формування монетарної політики в Україні: Монографія / Домрачев В.М. – К.: Видавництво «Логос», 2012. – 467 с.
3. Домрачев В.М. Методи оцінки банком ризиків кредитування окремих галузей економіки України / В.М. Домрачев // Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України: зб. наук. праць. – 2011. – Т. 31. – С. 63–70.
4. Домрачев В.М. Інформаційні банківські системи / В.М.Домрачев, В.В. Єрмак, К.М. Гребінець, Є.В. Домрачев. – К.: Видавництво Європейського університету, 2006. – 332 с.
5. Соболев Л. Автоматизация деятельности банка / Л. Соболев, В. Ермак, В. Домрачев // Банковский менеджмент, №5, 2008, С.2-10.
6. Schumacker Randall E. A beginner's guide to structural equation modeling / Randall E. Schumacker, Richard G. Lomax. - Taylor and Francis Group, LLC, 2010. – 510 p.
7. Державна служба статистики України [електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://ukrstat.gov.ua/>. – Дата звернення: 2015 р.
8. Національний банк України [електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.bank.gov.ua>. – Дата звернення: 2015 р.
9. Scientific Software International, Inc. [електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.ssicentral.com/lisrel/>. – Дата звернення: 2015 р.

УДК 519.85

*О.О. Ємець¹, Т.М. Барболина²*¹Полтавський університет економіки і торгівлі,²Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г.Короленка)

ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ЕВКЛІДОВИХ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ

Теорія і методи комбінаторної оптимізації активно розвиваються на основі занурення комбінаторних множин в евклідовий простір у рамках евклідової комбінаторної оптимізації. Розвиток евклідової комбінаторної оптимізації, необхідність побудови адекватних моделей в умовах неповної інформації призвели до дослідження задач з різними видами невизначеності, зокрема імовірнісної. У роботах [2]–[4] був запропонований підхід до постановок евклідових задач комбінаторної оптимізації з імовірнісною невизначеністю, що ґрунтується на введенні відношення порядку на множині випадкових величин. У даній доповіді пропонується постановка стохастичних задач комбінаторної оптимізації на основі відношення переваги та досліджуються властивості таких задач. Визначимо для випадкової величини A характеристичний вектор як вектор $H(A) = (h_1(A), \dots, h_s(A))$, де $h_i(A)$, $i \in J_s = \{1, 2, \dots, s\}$ – деякі числові характеристики випадкової величини A (тут і далі J_n означає множину n перших натуральних чисел). Вважатимемо, що характеристичний вектор задовольняє умову

$$h_i(aA + bB) = a^{\lambda_i} h_i(A) + b^{\lambda_i} h_i(B) \quad \forall i \in J_s, \quad (1)$$

де A, B – незалежні випадкові величини, $a, b \in \mathbb{R}^+$ – дійсні числа, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ – цілі додатні константи.

Нехай $<_i$ позначає лексикографічне упорядкування в s -вимірному евклідовому просторі, тобто для будь-яких $u, u' \in \mathbb{R}^s$ за означенням $u <_i u'$, якщо перша ненульова компонента різниці $u - u'$ є від'ємною. Записуватимемо $u \leq_i u'$, якщо $u <_i u'$ або $u = u'$.

Означення. Називатимемо дві випадкові величини A, B упорядкованими у неспадному порядку $\preceq$ (і позначати цей факт $A \preceq B$) тоді і тільки тоді, коли $H(A) \leq_i H(B)$.

Неважко переконатися, що введене відношення є транзитивним і повним, тобто відношенням переваги [5]. Мінімальний елемент на множині, на якій введене відношення переваги, розуміємо, як y [5].

Нехай $E_\eta^k(\Gamma)$ – загальна множина k -розміщень з елементів мультимножини $\Gamma = \{G_1, \dots, G_\eta\}$ (термінологію стосовно евклідової комбінаторної оптимізації використовуємо переважно з [6]). Вважатимемо, що елементи $\Gamma = \{G_1, \dots, G_\eta\}$ є незалежними випадковими величинами, причому $H(G_i) \geq_i 0 \quad \forall i \in J_\eta$. Розглянемо задачу пошуку пари $\langle L(X^*), X^* \rangle$ такої, що

$$L(X^*) = \min_{X \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^k c_j X_j, \quad X^* = \arg \min_{X \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^k c_j X_j, \quad (2)$$

де $c_j \in R^1 \quad \forall j \in J_k$, причому має місце умова

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_\alpha > 0 = c_{\alpha+1} = \dots = c_{\beta-1} > c_\beta \geq \dots \geq c_k. \quad (3)$$

Сформуємо мультимножини $Q_r = \{q_{r1}, \dots, q_{r\eta}\}$, де $q_{rj} = h_r(G_j) \quad \forall j \in J_\eta$ і разом із задачею (2) розглядатимемо детерміновані задачі мінімізації функції $\bar{L}_r(x) = \sum_{j=1}^k c_j^{\lambda_r} x_j$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, на відповідних множинах

$E_\eta^k(Q_r)$:

$$\bar{L}_r(x') = \min_{x \in E_\eta^k(Q_r)} \sum_{j=1}^k c_j^{\lambda_r} x_j \quad x' = \arg \min_{x \in E_\eta^k(Q_r)} \sum_{j=1}^k c_j^{\lambda_r} x_j. \quad (4)$$

Також разом із характеристичним вектором $H(A) = (h_1(A), \dots, h_s(A))$ розглядатимемо вектори $H_r(A) = (h_1(A), \dots, h_r(A))$ для всіх $r \in J_s$, $H_0(A) = \emptyset$. Нехай $r \in J_s$ — таке, що елементи мультимножини Γ задовольняють умову

$$H_{r-1}(G_i) = H_{r-1}(G_j) \quad \forall i, j \in J_\eta \quad G_i, G_j \in \Gamma \quad (5)$$

(у випадку $r=1$ умова (5) завжди виконується, оскільки $H_0(G_i) = \emptyset \quad \forall i \in J_\eta$).

Теорема 1. Нехай характеристичний вектор випадкової величини задовольняє умову (1), причому виконуються співвідношення (5). Тоді існує мінімаль $X' \in E_\eta^k(\Gamma)$ у задачі (2) така, що

$$h_r(X'_j) = x'_j \quad \forall j \in J_k, \quad (6)$$

де $\langle \bar{L}^r(x'), x' \rangle$ – розв'язок задачі (4).

Доведення проводиться за такою схемою. Для точки $X \in E_\eta^k(\Gamma)$ позначимо $\rho(X) = (h_r(X_1), \dots, h_r(X_k))$. З умови (1) випливає, що $h_r(L(X)) = \bar{L}_r(\rho(X))$. Нехай x' — мінімаль у задачі (4), X^* — мінімаль у задачі (2). Тоді повинні виконуватися співвідношення $\bar{L}_r(x') \leq h_r(L(X^*))$ і $h_r(L(X^*)) \leq \bar{L}_r(x')$, звідки $\bar{L}_r(x') = h_r(L(X^*))$. Далі на основі критерію розв'язку детермінованої лінійної безумовної задачі комбінаторної оптимізації на розміщеннях [1] одержуємо, що для деякої точки X' , яка задовольняє (6), мають місце співвідношення $L(X') = L(X^*)$, тобто X' — мінімаль у задачі (2). Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай характеристичний вектор випадкової величини задовольняє умову (1), причому виконуються співвідношення (5) і

$$h_r(G_1) \leq \dots \leq h_r(G_\eta) \quad (7)$$

Якщо також всі коефіцієнти цільової функції $L(X)$ у задачі (2) додатні (тобто в умові (3) $\alpha = k$), то існує мінімаль X' у задачі (2) така, що $h_r(X'_j) = h_r(G_j) \quad \forall j \in J_k$.

Доведення ґрунтується на критерії розв'язку детермінованої лінійної безумовної задачі оптимізації на розміщеннях та виконанні умови $c_1^{\lambda_r} \geq c_2^{\lambda_r} \geq \dots \geq c_k^{\lambda_r} > 0$.

Позначимо $J_n^m = \{m, \dots, n\}$ (таким чином $J_n = J_n^1$).

Наслідок 2. Нехай характеристичний вектор випадкової величини задовольняє умову (1), причому виконуються співвідношення (5), (7) і λ_r — непарне додатне число. Тоді то існує мінімаль X' у задачі (2) така, що $h_r(X'_j) = h_r(G_j) \quad \forall j \in J_\alpha$, $h_r(X'_i) = h_r(G_{\eta-k+i}) \quad \forall i \in J_k^\beta$.

Наслідок 3. Нехай характеристичний вектор випадкової величини задовольняє умову (1), причому виконуються співвідношення (5), $h_r(G_1) \geq \dots \geq h_r(G_\eta)$ і λ_r — парне додатне число. Якщо також всі коефіцієнти цільової функції $L(X)$ у задачі (2) від'ємні (тобто в умові (3) $\beta = 1$), то існує мінімаль X' у задачі (2) така, що $h_r(X'_j) = h_r(G_{\eta-k+j}) \quad \forall j \in J_k$.

Також справедливою є така теорема.

Можна також показати, що коли всі коефіцієнти цільової функції мають однаковий знак, то одна з мінімалей у задачі (2) може бути визначена без розв'язування задачі вигляду (4). Такі міркування можуть

бути покладені в основу схеми розв'язування лінійних безумовних задач комбінаторної оптимізації зі стохастичною невизначеністю у постановці (2):

1. Нехай r — найбільше число, при якому виконуються умови (5).
2. Розв'язуємо задачу (4) і формуємо мультимножини вигляду $\Gamma_p^r = \{G_{\eta_p}, \dots, G_{\eta_p+n_p-1}\}$ такі, що $H_r(G_{\eta_p}) = \dots = H_r(G_{\eta_p+n_p-1})$.
3. Якщо для деякої мультимножини відповідні коефіцієнти цільової функції мають однаковий знак, то формуємо розв'язок, інакше збільшуємо r на одиницю і розв'язуємо задачу вигляду (4) для цієї мультимножини.
4. Процес завершується, якщо $r=s$ або для всіх мультимножин відповідні коефіцієнти цільової функції матимуть однаковий знак.
5. Таким чином, досліджено деякі властивості лінійних безумовних задач комбінаторної стохастичної оптимізації на розміщеннях, постановка яких здійснена з використанням відношення переваги на множині випадкових величин, зокрема, встановлено взаємозв'язок властивостей стохастичної задачі з розв'язуванням спеціально побудованих детермінованих задач.

1. Барболіна Т.М. Властивості лінійних безумовних задач оптимізації на розміщеннях // Збірник наукових праць викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету. — Полтава : Астроя, 2015. — С.12-14.
2. Емец О.А. Комбинаторная оптимизационная модель упаковки прямоугольников со стохастическими параметрами / О.А.Емец, Т.Н. Барболина // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — № 4. — С. 99 -111.
3. Емец О.А. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью / О.А. Емец, Т.Н. Барболина // Доповіді НАН України. — 2014. — № 11. — С. 40–45.
4. Ємець О.О. Побудова і дослідження математичної моделі задачі директора зі стохастичними параметрами / О.О. Ємець, Т.М. Барболіна // Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика. — 2014. — № 18 (311). — С. 3-11.
5. Новоселов А.А. Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения / А.А.Новоселов – Новосибирск : Наука, 2001. — 102 с.
6. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г.Стоян, О.О.Ємець. — К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с. — Режим доступу: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487>.

УДК 519.6

М.В. Жук, А.Ю. Кіндибалюк***

(* Львівський національний університет імені Івана Франка,

** Київський національний університет будівництва та архітектури)

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА У ВИПАДКУ ДЕЯКОГО НЕВИРОДЖЕНОГО РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Розглядається рівняння

$$Au \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + r(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

$$+ s(x, y)u = f(x, y) \quad (1)$$

у скінченній області $S = \{a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ за однорідної крайової умови

$$N[u] \equiv \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x, y)u \right]_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

де $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + r(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(\nu, y)$

функція $\sigma(x, y)$ додатна, обмежена, тобто $0 < \sigma_1 \leq \sigma(x, y) \leq \sigma_2$, Γ – достатньо гладка межа області S і яке задовольняє умову рівномірної еліптичності.

Наближений розв'язок задачі (1)–(2) згідно методу Канторовича [1-2] шукаємо у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \phi_k(x, y), \quad (3)$$

де $\{\phi_k(x, y)\}$ – заздалегідь вибрана система координатних функцій, які задовольняють деякі загальні умови.

Шукані коефіцієнти $c_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ шукаємо з системи

$$\int_{g(x)}^{h(x)} (Au_n - f) \phi_k(x, y) dy + \phi_k \sqrt{1 + y'^2} N[u_n] \Big|_{y=g(x)} +$$

$$+ \phi_k \sqrt{1 + y'^2} N[u_n] \Big|_{y=h(x)} = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad (4)$$

за умов

$$\int_{g(a)}^{h(a)} N[u_n] \phi_k \Big|_{x=a} dy = 0, \quad \int_{g(b)}^{h(b)} N[u_n] \phi_k \Big|_{x=b} dy = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

яка зводиться до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно невідомих коефіцієнтів $c_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, за крайових умов (5).

Доведено, що при деяких умовах, які накладаються на вихідні дані задачі, існують єдині узагальнені розв'язки задач (1) – (2) та (4) – (5) в енергетичному просторі оператора H_A .

Встановлено збіжність методу Канторовича та оцінку швидкості збіжності. Вказано можливий спосіб вибору координатних функцій $\varphi_k(x, y)$.

1. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа. / Л.В. Канторович, В.И. Крылов // М. – Л., 1962.
2. Лучка А.Ю. Возникновение и развитие прямых методов математической физики / А.Ю. Лучка, Т.Ф. Лучка. – К.: Наук. думка, 1985.

УДК 51(092)

А.І. Кардаш

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ДО 40 ЛІТТЯ ФАКУЛЬТЕТУ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

З часу появи першої групи студентів, що спеціалізувалась з обчислювальної математики, на механіко-математичному факультеті з 1958 року й аж до 1975 року спостерігались наступні тенденції:

1. в групу відбирали кращих студентів за результатами навчання;
2. випускники направлялись на роботу в найкращі науково-дослідні заклади та підприємства;
3. постійно зростала престижність навчання в групі;
4. покращувалась якість навчання;
5. зростала потужності використовуваної обчислювальної техніки;
6. зростає потреба у використанні роботи програмістів;
7. програмна реалізація алгоритмів не набувала належної оцінки в класичних математиків;

Останнє якраз спричинило невдоволення викладачів та співробітників кафедри обчислювальної математики а також обчислювального центру, який на той час входив в склад факультету. Зазначимо, що на той час механіко-математичний факультет був найчисельнішим в університеті. Визрівала ідея утворення окремого факультету.

Тоді в основному усі кадрові та організаційні питання вирішувались на партійних зборах.

Й мудро на припинено поступив на зборах тодішній проректор по навчальній роботі (колишній декан факультету) Валентин Федорович Рогаченко, який підтримав ідею створення нового факультету. Зокрема йому належить таке порівняння: нова спеціальність в надрах факультету є аналогом нової сім'ї, яка не хоче чи не може жити зі старою. Тому нехай ідуть на свої хліби. Його виступ став вирішальним в дискусії про утворення нового факультету.

Подібне траплялось також з виконавцями договірних тем яких на той час було немало. Ситуація змінилась значно пізніше.

Отже, недооцінка роботи програмістів класичними математиками в першу чергу, та потреба розвитку програмування в другу чергу призвела в 1975 році до створення нового факультету. Ним став факультет прикладної математики та механіки.

Базовими кафедрами новоствореного факультету стали:

1. обчислювальної математики: заснована в 1960 році, завідувач кафедри – професор Костовський Олександр Микитович;

2. прикладної математики: утворена в 1963 році як кафедра загальної механіки та гідромеханіки й перейменована в 1970 році, завідувач кафедри – професор Флейшман Нахман Пінкасович;
3. механіки: заснована в 1939 році, завідувач кафедри – професор Гриліцький Дмитро Володимирович;
4. теорії оптимальних процесів: створена у 1973 році, до 1975 року її очолював доцент Мельник Зіновій Остапович, а з 1975 року доцент Бартіш Михайло Ярославович;

Природньо, що першим деканом утвореного факультету обрано професора Костовського Олександра Микитовича. Це насамперед його незаперечний авторитет в царині обчислювальної математики та програмування, а також досвід деканування на мехматі (1968-1970 рр.).

Однак в 1977 році за станом здоров'я Олександр Микитович виходить на пенсію. Тому новим деканом стає професор Гриліцький Дмитро Володимирович (1977-1987).

З 1987 року по 1996 рік деканом факультету обирають доцента Бартіша Михайла Ярославовича. При ньому змінюється структура та назва факультету. У 1988 році кафедра механіки повертається на математичний факультет й наш факультет набуває сучасної назви: прикладної математики та інформатики.

В 1989 році кафедра обчислювальної математики виокремлює кафедру програмування. Кафедрою обчислювальної математики завідує доцент Людкевич Йосиф Васильович, а кафедру програмування очолив професор Войтович Микола Миколайович.

В 1995 році засновується кафедра інформаційних систем. Завідує кафедрою професор Шинкаренко Георгій Андрійович.

Отже кількість кафедр зростає до п'яти.

В 1996 році на посаду декана обирають професора Савулу Ярему Григоровича, який керує факультетом по цей час.

При ньому в 2000 році утворюється кафедра математичного моделювання соціально-економічних процесів. Від заснування кафедрою завідує професор цегелик Григорій Григорович.

А в 2004 році створено кафедру дискретного аналізу та інтелектуальних систем. Завідує кафедрою професор Притула Микола Миколайович.

Отже, на сьогодні на факультеті маємо уже сім кафедр.

УДК 532.5

В.О. Катан

(Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара)

**ЗАСТОСУВАННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ
В СЕНСІ СКІНЧЕНОЇ ЧАСТИНИ ЗА АДАМАРОМ
ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ УДАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛА
ТА РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ**

Розглянуто загальну постановку задачі гідродинамічного удару для циліндричного тіла, що плаває на вільній межі і має довільний контур (плоска постановка) [6]. Вказана задача за допомогою конформного відображення області гідродинамічної течії на верхню півплощину зводиться до класичної змішаної задачі Келдиша-Седова для характеристичної аналітичної функції течії. Наводиться загальна формула розв'язку задачі Келдиша-Седова в квадратурах [4].

На основі варіаційного принципу Огазо запропоновано підхід визначення положення граничних точок зон відриву рідини від поверхні тіла.

У випадку однієї зони відриву застосування принципу Огазо до розв'язку, отриманого у вигляді квадратур, приводить до певного трансцендентного рівняння для визначення деякого числового параметра, що характеризує положення кінцевої точки відриву (друга точка знаходиться на вільній межі). Це рівняння містить сингулярні інтеграли у сенсі скінченної частини за Адамаром [1, 5].

На прикладі найбільш простої задачі удару по горизонтальній пластинці з обертанням, розв'язок якої відомий, дано детальний аналіз запропонованого автором підходу щодо зведення задач удару до проблеми Келдиша-Седова та щодо використання нового способу визначення зони відриву за допомогою апарату сингулярних квадратур у сенсі скінченної частини за Адамаром.

Всебічно досліджено задачі про удар пластинки з обертанням, яка попередньо занурена у рідину у вертикальному або в горизонтальному положенні. Залежність параметра, що визначає положення зони відриву, та між деяким кінематичним параметром ретельно проаналізована: проведені обчислення і порівняння з відповідною залежністю, визначеною аналітичними розв'язками вказаних задач. Співпадання результатів задовільне [2-3].

Запропонований підхід застосовано до розв'язку задачі про удар похилої пластинки з обертанням. Отримано рівняння з інтегралами в сенсі Адамара, що визначає положення точки відриву залежно від кута нахилу похилої пластинки до вільної поверхні рідини та деякого кінематичного параметру. Обчислення інтегралів в сенсі Адамара виконувалось за

відомою процедурою Адамара-Манглера в додатковій модифікації: ці інтеграли, крім особливості типу Адамара на одному кінці інтегрування, на іншому кінці інтервалу інтегрування мають інтегровані за Ріманом особливості, які доводилось аналітично інтегрувати в малому околі цієї точки. Для обчислення інтегралів в сенсі головного значення використовувалась стандартна процедура; правда, ця процедура означена тільки для внутрішніх точок інтервалу інтегрування; для кінцевих точок інтегралів в сенсі Коші, як виявилось, переходять в інтегралів в сенсі Адамара, для обчислення яких використовувалась відповідна процедура

Використовуючи відповідні процедури обчислення інтегралів різної сингулярності, визначені розподіли імпульсивного тиску на поверхні пластинки, нормальної та дотичної складової швидкості на поверхні пластинки, в зоні відриву та вільній поверхні рідини, а також, розраховані коефіцієнти приєднаних мас та моментів в залежності від кута нахилу пластинки до вільної поверхні рідини.

Таким чином запропонований новий підхід до визначення місцезнаходження зон відриву рідини від поверхні тіла (однієї або декількох) на основі використання трансцендентних рівнянь з сингулярними інтегралами в сенсі скінченої частини за Адамаром, отриманих за принципом Огазо. Зазначений підхід в принципі можна застосовувати до розв'язання будь-якої плоскої ударної задачі. Загальна постановка такої плоскої задачі для тіла будь-якого профілю за допомогою конформного відображення зводиться до змішаної задачі Келдиша-Седова і представляється у вигляді загальновідомих квадратур. Саме на цей вид загального розв'язку і орієнтовано запропонований автором спосіб визначення місця розташування зон відриву.

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. / Ж.Адамар – М.: Наука. – 1978. – 352 с.
2. Гоман О.Г. Ударное взаимодействие несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности, в условиях образования одной зоны отрыва и наличия вращения / О. Г. Гоман, В. А. Катан // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2013. – № 5(21). – Вип. 17, Т. 1. – С. 191 – 205.
3. Катан В.А. Об одном способе определения положения зоны отрыва течения приударном взаимодействии твердого тела и жидкости / В.А. Катан // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2014. – № 5(22). – Вип. 18, Т.1. – С. 63-71.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили – М.: Наука. – 1966. – 707с.
5. Общая теория аэродинамики больших скоростей под редакцией У.Р. Сирса – М.: Воениздат. – 1962. – 300 с.
6. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. / Л. И. Седов – М.: Наука. – 1980. – 448 с.

УДК 519.21

А.В. Кінаш, Я.М. Чабанюк**, У.Т. Хімка**

(* Національний університет «Львівська політехніка»,

** Львівський національний університет ім. І. Франка)

ГРАНИЧНИЙ ГЕНЕРАТОР ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ В СХЕМІ АСИМПТОТИЧНО МАЛОЇ ДИФУЗІЇ

Розглянемо стохастичний дифузійний процес в схемі асимптотично малої дифузії [1], який визначається рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = C\left(u^\varepsilon(t); x\left(\frac{t}{\varepsilon^3}\right)\right)dt + \varepsilon^{-1}C_0\left(u^\varepsilon(t); x\left(\frac{t}{\varepsilon^3}\right)\right)dt + \\ + \varepsilon^{1/2}\sigma\left(u^\varepsilon(t); x\left(\frac{t}{\varepsilon^3}\right)\right)dw(t),$$

де $u^\varepsilon(t), t \geq 0$ - випадкова еволюція, $u \in R^d$; $C_0(u; x)$ - сингулярне збурення функції регресії $C(u; x)$; $w(t)$ - вінерівський процес; $\sigma(u, x)$ - дифузія.

Марковський процес $x(t) > 0$ визначений в стандартному просторі станів $(X, \mathbf{X})$ зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathbf{X}$ [2].

Генератор марковського процесу $x(t)$ задається співвідношенням

$$\mathcal{Q}\phi(x) = q(x) \int_{\mathbf{X}} \mathcal{Q}(x, dy) [\phi(y) - \phi(x)].$$

Для генератора $\mathcal{Q}$ визначено потенціал $\mathbf{R}_0 = \Pi - (\Pi + \mathcal{Q})^{-1}$, де $\Pi\phi(x) = \int_{\mathbf{X}} \pi(dx)\phi(x)$ - проектор на підпростір нулів оператора

$$\mathcal{Q}: N_{\mathcal{Q}} = \{\phi: \mathcal{Q}\phi = 0\}.$$

Нехай також виконується умова балансу

$$\int_{\mathbf{X}} \pi(dx) C_0(u; x) \equiv 0.$$

Лема 1. Генератор двокомпонентного марковського процесу

$$u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon = x\left(\frac{t}{\varepsilon^3}\right), t \geq 0$$

в банаховому просторі $\mathbf{B}(R^d, X)$ дійснозначних функцій $\phi(u, x) \in C^{2,0}(R^d, X)$ визначається рівністю

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-3} Q \varphi(u, x) + \varepsilon^{-1} C_0(x) \varphi(u, x) + A_1(x) \varphi(u, x),$$

де

$$A_1(x) \varphi(u, x) = C(u, x) \varphi'(u, x) + \frac{1}{2} \varepsilon \sigma^2(u, x) \varphi''(u, x),$$

$$C_0(x) \varphi(u) = C_0(u, x) \varphi'(u, x).$$

Лема 2. Граничний генератор L на збуреній тест-функції

$$\varphi^\varepsilon(u, x) = \varphi(u) + \varepsilon^2 \varphi_2(u, x) + \varepsilon^3 \varphi_3(u, x), \varphi(u) \in C^4(R^d)$$

визначено розв'язком проблеми сингулярного збурення

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-1} [Q \varphi_2(u, x) + C_0 \varphi(u)] + [Q \varphi_3(u, x) + A_1(x) \varphi(u)] + \varepsilon \theta^\varepsilon(x),$$

де залишковий член $\theta^\varepsilon(x)$ має представлення

$$\theta^\varepsilon(x) = C_0(x) \varphi_2(u, x) + \varepsilon C_0(x) \varphi_3(u, x) + \varepsilon A_1(x) \varphi_1(u, x) + \varepsilon^2 A_1(x) \varphi_3(u, x).$$

Лема 3. Розв'язок проблеми сингулярного збурення для генератора L^ε на збуреній функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u, x) = V(u) + \varepsilon^2 V_2(u, x) + \varepsilon^3 V_3(u, x), V(u) \in C^4(R^d)$$

визначається співвідношенням

$$L^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) = LV(u) + \varepsilon \theta_1^\varepsilon(x) V(u),$$

де граничний генератор L має вигляд

$$LV(u) = C(u) V'(u) + \frac{1}{2} \varepsilon B(u) V''(u)$$

і залишковий член $\theta_1^\varepsilon(x)$ визначається рівністю

$$\theta_1^\varepsilon(x) = C_0(x) R_0 C_0(x) + \varepsilon C_0(x) R_0 \tilde{L}(x) + \varepsilon A_1(x) R_0 C_0(x) + \varepsilon^2 A_1(x) R_0 \tilde{L}(x).$$

Оператор $\tilde{L}(x)$ має вигляд

$$\tilde{L}(x) V(u) = [C(u) - C(u, x)] V'(u) + \varepsilon \left[B(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u, x) \right] V''(u).$$

1. Korolyuk V.S. Random evolutions with locally independent increments on increasing time intervals / V.S. Korolyuk. // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. –179, No 2. – 273-289 pp.
2. Korolyuk V.S. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V.S. Korolyuk, N. Limnios. – World Scientific Publishing, 2005. – 331 pp.

**ЗАСТОСУВАННЯ КУСКОВО-СТЕПЕНЕВИХ АПРОКСИМАЦІЙ
МСЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ
АДВЕКЦІЇ-ДИFUЗІЇ-РЕАКЦІЇ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ**

Моделювання міграції домішок [2] у неоднорідному пористому середовищі є важливою проблемою, яка виникає в багатьох інженерних задачах: видобуток нафти, прогнозування землетрусів, захоронення ядерних відходів, моделювання водоносного горизонту ґрунтових вод, тощо [1]. У цих задачах, розрахункова область часто складається з декількох областей, у яких фізичні властивості істотно відрізняються. У математичній моделі, це описується диференціальними рівняннями з розривними коефіцієнтами. Фізичні, геологічні та хімічні властивості середовища можуть призвести до виродження коефіцієнта дифузії у математичних рівняннях, що описують модель.

Класичні обчислювальні схеми породжують нестійкість розв'язку навіть у невинному випадку, коли коефіцієнт дифузії є достатньо малим у порівнянні з коефіцієнтом адвекції. У такій ситуації відношення коефіцієнта адвекції до коефіцієнта дифузії є достатньо великим, що спричиняє гіперболічну поведінку розв'язку, а наближений розв'язок, при цьому, не здатен відтворити феномен примежового шару, і, як наслідок, виникають неприродні осциляції розв'язку.

Для сингулярно-збуреної крайової задачі для рівняння адвекції-дифузії-реакції з розривними коефіцієнтами запропоновано схему методу скінченних елементів з кусково-степеневими базисними функціями. Визначено значення параметра стабілізації варіаційної задачі та подані рекомендації для відшукування параметра стабілізації. Наведено результати обчислювальних експериментів та проаналізовано її переваги над схемами методу скінченних елементів з кусково-лінійними апроксимаціями для цього класу задач.

1. *Gander M.J.* Optimized schwarz methods for a diffusion problem with discontinuous coefficient / M.J. Gander, O. Dubois // Numer. Algorithms, 2014.
2. *Karlsen K.H.* Upwind difference approximations for degenerate parabolic convection-diffusion equations with discontinuous coefficient / K.H. Karlsen, N.H. Risebro, J.D. Towers // IMA, Journal of Numerical Analysis, 2002. – Vol. 22. – P. 623–664.

УДК 519.6:621.396

Л. М. Клакович, Л.Б. Галамага

(Львівський національний університет ім. Івана Франка)

ЗАДАЧА АНАЛІЗУ АНТЕННИХ РЕШІТОК З ПЛОСКИХ ПРЯМОКУТНИХ ВИПРОМІНЮВАЧІВ

При формулюванні обернених задач електродинаміки, зокрема задач синтезу антенних решіток, використовуються різні за точністю математичні моделі. Більш точні моделі включають розв'язки задач аналізу, що враховують взаємний вплив випромінювачів в решітці та зводяться до розв'язування зовнішніх граничних задач електродинаміки. У залежності від типу і конфігурації випромінювачів, їх кількості, геометрії випромінюючої системи і характеру навколишнього середовища задача аналізу антенної решітки може бути зведена до розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь певного типу.

У даній роботі побудовано чисельний алгоритм розв'язування задачі аналізу антенної решітки з плоских прямокутних випромінювачів, математична модель якої враховує взаємний вплив випромінювачів.

Розглядається антенна решітка, що складається з плоских прямокутних випромінювачів, розміщених в безмежному однорідному ізоотропному середовищі із постійними значеннями діелектричної та магнітної проникностей (Рис.1).

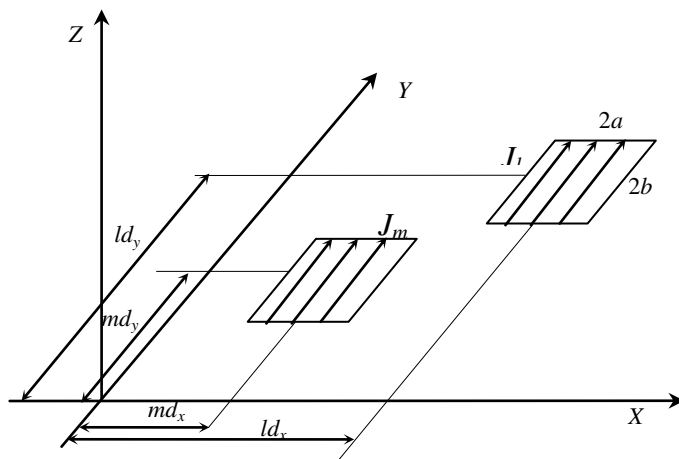


Рисунок 1. Антенна решітка з плоских прямокутних випромінювачів

Випромінювачі розміщені на площині XOY, сторони є паралельні до координатних осей, відстані між випромінювачами dx (по осі OX) та dy

(по осі ОУ), розмір випромінювача $2a \times 2b$. Антенна решітка збуджується стороннім електричним полем $\vec{E}^{ext}$, яке генерує струми на випромінювачах.

Задача аналізу антенних решіток – задача знаходження електромагнітного поля випромінюючої системи в будь-якій точці простору, з врахуванням взаємного впливу випромінювачів, з допомогою методу граничних інтегральних рівнянь, зводиться до системи інтегральних рівнянь [1]

$$\left[\left[\vec{n}_m \times (\text{grad div} + k^2) \sum_{n=-N}^N \iint_{S_n} \vec{J}_n(Q) G(P, Q) dS_n \right] \times \vec{n}_m \right] = -i\omega\epsilon \left[\left[\vec{n}_m \times \vec{E}_m^{ext}(P) \right] \times \vec{n}_m \right], \quad m = \overline{-N, N} \quad (1)$$

де $\vec{J}_n(Q)$ – вектор електричного струму на поверхні S_n n-ого випромінювача, $G(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-ikR_{nm})}{R_{nm}}$ – функція Гріна вільного простору, $2N+1$ – кількість випромінювачів в решітці, R_{nm} – відстань між точками на поверхні n-ого та m-ого випромінювачів.

Систему (1) можна представити у вигляді [2]

$$\sum_{n=-N}^N \int_{S_n} J_n^y(Q) K_{nm}(P, Q) dS_n = U_m^{ext}, \quad m = \overline{-N, N} \quad (2)$$

де K_{nm} – ядра інтегральних рівнянь, U_m^{ext} – розподіл тангенціальної складової зовнішнього електричного поля на поверхні m-ого випромінювача.

Для чисельного розв'язування системи (2) використовується метод Гальоркіна. Струм на кожному випромінювачі представляють як лінійну комбінацію базисних функцій:

$$J_n^y(Q) = \sum_{\nu=1}^M I_{n\nu} \psi_\nu(Q), \quad n = \overline{-N, N} \quad (3)$$

де $\psi_\nu(Q)$, $\nu=1, \dots, M$ – просторові гармоніки, частина системи лінійних незалежних функцій, $I_{n\nu}$ – комплексні амплітуди просторових гармонік.

Застосувавши метод Гальоркіна до системи (2), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь [3]

$$\sum_{n=-N}^N \sum_{\nu=1}^M I_{n\nu} Z_{n\nu, m\mu} = U_{m\mu}, \quad m = \overline{-N, N}, \quad \mu = \overline{1, M} \quad (4)$$

де коефіцієнти $Z_{n\nu, m\mu}$ – це взаємні опори, які залежать лише від розміщення n-ого та m-ого випромінювачів та номерів просторових

гармонік струму, і не залежать від кількості та розміщення решти випромінювачів в решітці.

Взаємні опори можуть бути обчислені за формулою [1]:

$$Z_{nv,m\mu} = -\frac{1}{I_{nv}I_{m\mu}^*} \int E_t \{I_{nv}\psi_v\} I_{m\mu}^* \psi_\mu^* dS_m, \quad (5)$$

де $E_t \{I_{nv}\psi_v\}$ – лінійний оператор для обчислення тангенціального електричного поля, що створюється струмом в n-у випромінювачі на поверхні m-ого випромінювача.

Формули (4)-(5), до яких звелася задача аналізу антенної решітки, не залежать від типу випромінювачів у решітці та типу джерел збудження. Тому можуть бути використані для аналізу випромінюючих систем різної конфігурації.

Для випадку антенної решітки з плоских прямокутних випромінювачів, приймається припущення [1], що струми на випромінювачах напрямлені вздовж осі ОУ і мають ненульову лише у компоненту. Тоді складова електричного поля обчислюється за формулою

$$E_y(x, y) = -i\omega\mu \int_S J_y(x', y') G(P, P') dx' dy' + \\ + \frac{1}{i\omega\varepsilon} \int_S J_y(x', y') \frac{\partial^2}{\partial y'^2} G(P, P') dx' dy'. \quad (6)$$

а вираз для обчислення взаємних опорів (5) набуде вигляду

$$Z_{nv,m\mu} = \frac{-1}{i\omega\varepsilon} \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \psi_\mu^*(x, y) \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \psi_v(x', y') \left\{ k^2 G(P_n, P'_m) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} G(P_n, P'_m) \right\} dx' dy' dx dy. \quad (7)$$

Матриця системи (4) є блочно-Теплицевою матрицею, кожен блок якої є також блочно-Теплицевою матрицею. Для розв'язування такого типу систем зручно користуватися методом Гауса-Жордана.

Таким чином, задача аналізу антенної решітки з плоских прямокутних випромінювачів зведена до розв'язування системи (4) – (7) відносно невідомих коефіцієнтів розподілу струму на випромінювачах I_{nv} .

Після знаходження розподілу струму на випромінювачах за формулою (3), компоненти векторної діаграми напрямленості $\vec{f}(\vartheta, \varphi) = f_\vartheta(\vartheta, \varphi) \vec{i}_\vartheta + f_\varphi(\vartheta, \varphi) \vec{i}_\varphi$ антенної решітки, що характеризує розподіл електромагнітного поля у дальній зоні, обчислюються за формулами [4]:

$$f_{\vartheta}(\vartheta, \varphi) = \cos \vartheta \sin \varphi \sum_{n=-N}^N \int_{S_n} J_n^y(x, y) e^{ik(ndx \sin \vartheta \cos \varphi + ndy \sin \vartheta \sin \varphi)} dS_n,$$

$$f_{\varphi}(\vartheta, \varphi) = \cos \varphi \sum_{n=-N}^N \int_{S_n} J_n^y(x, y) e^{ik(ndx \sin \vartheta \cos \varphi + ndy \sin \vartheta \sin \varphi)} dS_n, \quad (8)$$

Запропонований чисельний алгоритм розв'язування задачі аналізу застосовано для дослідження електромагнітного поля антенних решіток з плоских випромінювачів різної геометрії та різного типу джерел збудження.

Для прикладу, розглянемо антенну решітку з 9 плоских прямокутних еквідистантних випромінювачів (випромінювачі розміщені в вузлах сітки 3x3) зі сторонами 0,5 і відстанню між випромінювачами 0,8 (по осі OX) та 0,6 (по осі OY). Центральний випромінювач збуджується розподілом напруг U, решта випромінювачів – пасивні. На Рис. 2 показано отриманий розподіл амплітуди струму на поверхні одного з пасивних випромінювачів.

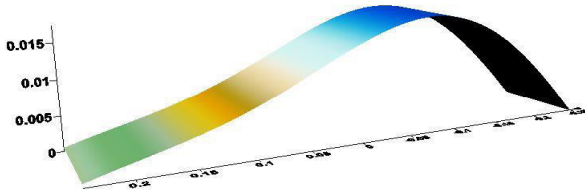


Рисунок 2. Розподіл амплітуди струму на одному з пасивних випромінювачів антенної решітки

Результати числових експериментів підтверджують ефективність розробленого методу. Отриманий розв'язок задачі аналізу у строгій математичній постановці надалі може бути використаний у формулюванні задачі синтезу, що дасть змогу отримати більш точну математичну модель.

1. Марков Г.Т. Распространение электромагнитных волн / Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. – Москва. 1983. — 300 с.
2. Клакович Л. Дослідження задачі аналізу лінійної антенної решітки // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Львів. – 2008. – Т. 7. – С. 79-87.
3. Тихонов А. Метод расчета распределения тока в системе линейных вибраторов и диаграмма направленности системы / Тихонов А., Дмитриев В. // Численные методы и программирование. МГУ. – 1968. – Т. 10. – С. 3-8.
4. Klakovich L. Synthesis of antenna system of parallel cylindrical radiators according to the given amplitude directivity pattern / L. Klakovich, O. Helei // Proc. of XVIII-th International Seminar/Workshop on DIPED-2013, Lviv, Ukraine. – 2013. – 110–113 pp.

(Дніпропетровський національний університет імені О. Гончара)

**ПРО ЕФЕКТИВНИЙ ПІДХІД ЩОДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ**

Викладено структурне розв'язання лінійних задач нестационарної теплопровідності. Розглянута задача визначення температурного поля однорідного стрижня обмеженої довжини при циклічному навантаженні.

Математичне формулювання задачі нестационарної теплопровідності після деяких перетворень наведено в безрозмірній формі [1 - 3]:

$$\frac{\partial^2 T(z, Fo)}{\partial z^2} = \frac{\partial T(z, Fo)}{\partial Fo} + LT(z, Fo) + w(z, Fo), \quad 0 \leq z \leq 1, \quad Fo > 0, \quad (1)$$

$$w(z, Fo) = -L\varphi(z) - q(z, Fo)\frac{l^2}{\lambda},$$

із початковими і граничними умовами у вигляді:

$$T(z, Fo)\Big|_{Fo=0} = \varphi(z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(z, Fo)}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad (3)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial T(z, Fo)}{\partial z}\Big|_{z=1} = \varepsilon_2 Bi_2 [f(Fo) - \varepsilon_3 T(z, Fo)]_{z=1},$$

де $T(z, Fo)$ – температура стрижня; $z = x/l$ – безрозмірна координата; l – довжина стрижня; $Fo = a\tau/l^2$ – безрозмірний час (критерій Фур'є); τ – час; a – коефіцієнт теплопровідності; $Bi_1 = \alpha_1 h/\lambda$ та $Bi_2 = \alpha_2 h/\lambda$ – критерії Біо; α_1, α_2 – коефіцієнти тепловіддачі із бокової поверхні і з торців стрижня в навколишнє середовище; h – відношення площі перетину стрижня до периметра перетину; λ – коефіцієнт теплопровідності; $L = Bi_1 l^2 / h^2$; $\varphi(z)$ – початковий розподіл температури; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – коефіцієнти, що приймають значення ± 1 або 0 .

В залежності від сполучень значень ε_i на торці стрижня задаються граничні умови 1, 2 і 3 роду, а функція $f(Fo)$ при цьому приймає значення температури поверхні торця стрижня, теплового потоку або температури навколишнього середовища. Для розв'язання лінійних задач

теплопровідності використано операційний метод, який базується на інтегральному перетворенні Лапласа [2].

Отримано розв'язок задачі теплопровідності в оригіналах. Введені в структуру розв'язку компоненти впливу $g_i(Fo)$ на граничних поверхнях залежать від граничних функцій теплообміну та від часткових розв'язків задачі $\Gamma^*(z, Fo)$. Для найбільш характерних змін компонент впливу $g_i(Fo)$ і функцій $\varphi(z)$, $w(z, Fo)$ отримані аналітичні вирази [3].

У випадку кусково-однорідного стрижня (набір однорідних стрижнів, з'єднаних послідовно) аналогічно математичному формулюванню попередньої задачі, в рівнянні теплопровідності із відповідними уніфікованими граничними і початковими умовами тепловий ефект дисипативного розігріву враховано у виді джерела тепла

Отриманий розв'язок дозволяє визначити температурне поле кусково-однорідних стрижнів в залежності від умов нестационарного теплообміну з навколишнім середовищем, на границях стику стрижнів і нерівномірного початкового розподілу температури стрижня по довжині.

Обчислювальний алгоритм, оснований на структурному розв'язку лінійних задач нестационарної теплопровідності, на відміну від відомих розв'язків, одержаних операційним методом, має наступні переваги:

- розв'язок задач одержано в структурному вигляді (для кусково-однорідного стрижня з m частин – це $2m$ розв'язки);
- введені компоненти дії $g(Fo)$ на граничних поверхнях, які залежать від граничних нестационарних функцій теплообміну, умов неідеального теплового контакту та від часткових розв'язків задачі $\Gamma^*(z, Fo)$;
- для кусково-однорідного стрижня компоненти дії доповнюються функціями неідеального теплового контакту в різній фізичній реалізації;
- компоненти дії є функціями часу і квазістационарна частина розв'язку представлена у виді ряду, що дозволяє уникнути застосування інтегралу Дюамеля.

1. *Веселовский В.Б.* Тепловые режимы составных элементов конструкций летательных аппаратов / В. Б. Веселовский // Теплообмен. – Вычислительный эксперимент в задачах 1996. – Т.9. – С. 37–41.
2. *Веселовский В.Б.* Разогрев ограниченного стержня при высокочастотном нагружении / В.Б. Веселовский, В.Ю. Клим // Вісник Дніпропетровського національного університету. Механіка. – Вып. 6.– Т. 2.– 2002. – С. 27–34.
3. *Веселовский В.Б.* Температурные поля элементов конструкций, разогревающихся вследствие высокочастотного нагружения / В. Б. Веселовский, В. Ю. Клим // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки, 2003. – Вип. 1.– С. 127–130.

УДК 539.3: 519.6

*В.Д. Клименко³, М.В. Марчук^{1,2}, В.С. Пакош¹,
В.М. Харченко³, М.М. Хом'як^{1,4}*

⁽¹⁾Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

²Національний університет "Львівська політехніка",

³Державне підприємство "Конструкторське бюро "Південне"
ім. М. К. Янгеля",

⁴Львівський національний університет імені Івана Франка)

ОСОБЛИВОСТІ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНКУ СТИКІВ ВІДСІКІВ КОРПУСІВ РАКЕТ

Розрахунок на міцність вузлів стиків конструктивних елементів корпусів ракет у звичайній інженерній практиці проводять за методиками, що не враховують залежності фізико-механічних характеристик використовуваних шаруватих композитів від напрямків армування [2]. Одним з широко застосовуваних конструктивних елементів є штифтово-шпилькові з'єднання (ШШЗ) та штифтово-болтові з'єднання (ШБЗ). Вони дають змогу з достатньою точністю і надійністю фіксувати з'єднувані деталі конструкцій. Технологічні особливості виготовлення конструкцій з намоточних композиційних матеріалів (таких як скло- та вуглепластики) [1] передбачають одночасне формування як самої структури композита, а отже, і його механічних властивостей [3], так і імплементацію в них з'єднувальних елементів, що є однією з причин концентрації напружень. Тому для стиків ракетних конструкцій із шаруватих композиційних матеріалів та суміжних елементів конструкції виникають особливості розрахунку на міцність, що зумовлені контрастом механічних властивостей ШШЗ та армованого шаруватого полімерного композиту (ПКМ), а також наявністю концентраторів напружень в ПКМ та контактної взаємодії елементів між собою.

Складність математичної постановки задачі виключає можливість отримання аналітичних розв'язків. Тому існуючі інженерні методики враховують низку спрощуючих гіпотез [2]. З іншого боку, відомі достатньо універсальні методи розрахунку, такі як метод скінченних елементів (МСЕ) та відповідні програмні пакети, що дають змогу моделювати поведінку складних конструкцій при заданих умовах навантаження.

Дана робота присвячена розрахунку на основі МСЕ на міцність стиків ракетних конструкцій із шаруватих ПКМ. Особливу увагу приділено виявленню локальних ефектів концентрації напружень та областей можливого руйнування, що виникають в околі вузла з'єднань і можуть суттєво вплинути на міцність усієї конструкції.

Розглянуто конструктивний елемент (рис. 1) у вигляді тонкої пластини 1, що кріпиться за допомогою регулярно розміщеної системи штифтово-шпилькових з'єднань 2. Згідно з методикою субмоделювання, виділено типовий субелемент, який містить окреме з'єднання, у вигляді прямокутної пластини з наскрізним отвором для штифта та поздовжнім отвором для шпильки. Навколо ШШЗ очікуються зони концентрації напружень, що виникають внаслідок складної просторової геометрії з'єднань (рис. 2). Ці зони частково перекриваються, що зумовлює тривимірний характер НДС та унеможливорює коректне застосування теорії пластин. Отримання достовірних результатів залежить від адекватних крайових та контактних умов. У разі субмоделювання, коли окреме з'єднання розглядається як частина більш загальної постановки для усієї конструкції, на краях пластини з ШШЗ відомі компоненти вектора переміщень. З іншого боку, практично важливі результати можна отримати, враховуючи симетрію властивостей, геометрії та специфіку навантаження.

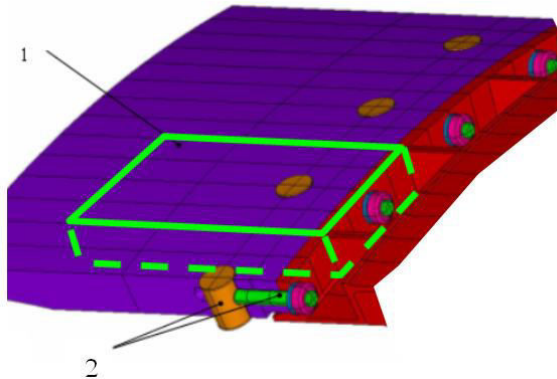


Рисунок 1. Типовий елемент з'єднання

З використанням просторових ізопараметричних елементів (з 8-ми та більше вузлами) розроблене та верифіковане програмне забезпечення для реалізації описаної вище ідеї. Це забезпечення містить створену оригінальну діалогово-орієнтовану програму, написану в середовищі **Delphi** для вводу основних геометричних та фізико-механічних характеристик та навантажень.

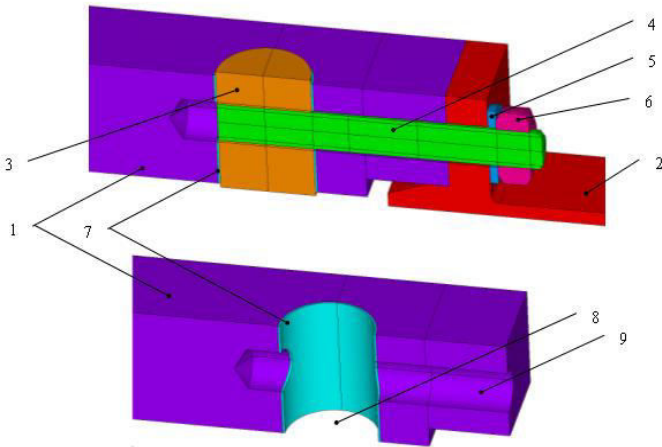


Рисунок 2. Фрагмент конструктивної схеми ШПЗ

1 – елемент шпангоута корпусу; 2 – елемент суміжного відсіку ракети; 3 – штифт; 4 – шпилька; 5 – шайба; 6 – гайка; 7 – клейовий шар; 8 – отвір в шпангоуті для штифта; 9 – отвір в шпангоуті для шпильки

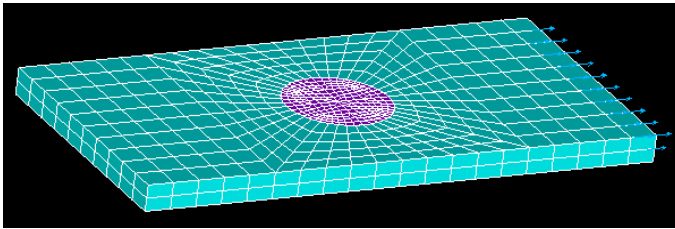


Рисунок 3. Просторова скінченно-елементна модель з'єднання у вигляді тонкої пластини зі штифтом

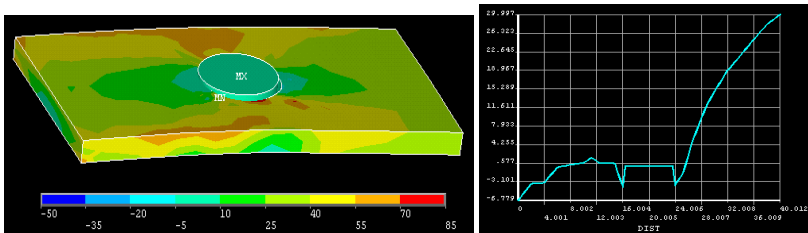


Рисунок 4. Розподіл напружень σ_{xx} вздовж осі OX

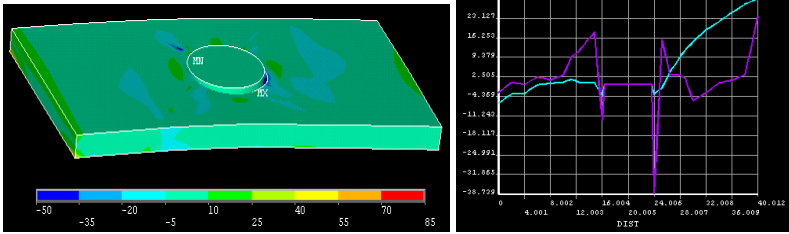


Рисунок 5. Розподіл напружень σ_{yy} вздовж осі OX

Досліджено тривимірний НДС пластини в умовах розтягування, з урахуванням контакту з ШШЗ (рис. 3 – 5). Зауважимо, що зона контакту і контактні тиски знаходяться в процесі розв’язування, що робить задачу нелінійною навіть у випадку малих деформацій та переміщень. Наявність контактної пари «штифт – пластина з ПКМ» спричиняє суттєвий перерозподіл параметрів НДС в порівнянні з класичною задачею про розтяг пластини з отвором чи жорстким включенням.

1. Композиционные материалы: Справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др. – М.: Машиностроение, 1990 – 512 с.
2. Прочность ракетных конструкций / Под ред. В.И. Моссаковского. – М.: Высшая школа, 1990.
3. *Christensen R.M.* Mechanics of composite materials. – New York: J. Wiley & Sons, 1979. – 348 p.

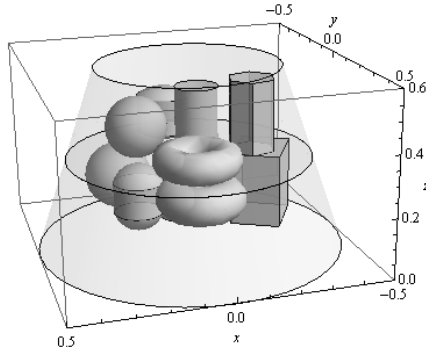
ЗАДАЧА БАЛАНСНОГО КОМПОНУВАННЯ 3D ОБ'ЄКТІВ З УРАХУВАННЯМ МІНІМАЛЬНО ТА МАКСИМАЛЬНО ДОПУСТИМИХ ВІДСТАНЕЙ

Оптимізаційні задачі балансного компоунування (BLP) 3D об'єктів з'являються при проектуванні ракетно-космічної техніки [3]. Відмінною рисою даних задач є необхідність урахування обмежень поведінки (behavior constraints) супутникової системи. Обмеження поведінки задають вимоги на такі механічні властивості системи як рівновага, інертність, стійкість тощо. Багато публікацій присвячено дослідженню задач компоунування обладнання в модульних відсіках космічних кораблів та супутників, наприклад, [4, 7]. Такі задачі відносяться до класу NP-складних [1].

Для побудови адекватних математичних моделей задач оптимального компоунування у вигляді задач математичного програмування є актуальним аналітичне описання обмежень розміщення (неперетин об'єктів, приналежність об'єктів контейнеру з урахуванням мінімально та максимально допустимих відстаней) та обмежень поведінки (обмежень рівноваги, моментів інерції, стійкості системи).

Відомо, що потужним засобом математичного моделювання відношень геометричних об'єктів в класі задач розміщення є метод ϕ -функцій Стояна. Метод ϕ -функцій дозволяє використовувати для вирішення оптимізаційних задач розміщення методи негладкої оптимізації [5] та нелінійного програмування [8].

В даній роботі розглядається задача BLP у наступній постановці: розмістити 3D об'єкти на опорних стелажах (bearing plates) контейнера з урахуванням обмежень розміщення та обмежень поведінки так, щоб цільова функція досягала екстремуму. В якості контейнеру обирається циліндр, параболоїд обертання або прямий усічений конус. Серед об'єктів розміщення розглядаються шари, прямі кругові циліндри, тори, сфероциліндри, прямі прямокутні паралелепіпеди та прямі правильні призми. Цільова функція визначається як розмір контейнера, відхилення центра мас системи від заданого положення або як згортка осьових моментів інерції системи.



Мета даної роботи – розробка конструктивних засобів аналітичного описання обмежень розміщення у вигляді класів псевдонормалізованих ϕ -функцій [2] та псевдонормалізованих квазі- ϕ -функцій [6], які є необхідними для побудови математичних моделей задач балансного компоновання 3D об'єктів у вигляді задач нелінійного програмування. Вивчаються різні види математичних моделей задач BLP, які породжуються різноманіттям просторових форм об'єктів і контейнерів, видом функції цілі, а також наявністю обмежень, вказаних вище. Обговорюються методи пошуку локально оптимальних рішень задачі BLP з використанням r -алгоритму Шора, методу мултистарт та прискореного перебору вершин дерева рішень. Наводяться результати чисельних експериментів. На малюнку показано локально оптимальне розміщення об'єктів з урахуванням мінімально та максимально допустимих відстаней між ними за умови рівноваги системи.

1. Chazelle B., Edelsbrunner H., Guibas L.J. The complexity of cutting complexes. – Discrete & Computational Geometry. – 1989. – Vol. 4, № 2, – P. 139–181.
2. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. – Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – Vol. 43, № 5. – P. 533-553.
3. Fasano G., Pinter J.D. Modeling and Optimization in Space Engineering. Series: Springer Optimization and Its Applications // Problems and Applications. Publisher Springer New York. – New York. – 2013. – V. 73, XII. 404 p. – Online ISBN 978-1-4614-4469-5, Print ISBN 978-1-4614-4468-8.
4. Lei K. Constrained Layout Optimization Based on Adaptive Particle Swarm Optimizer. – Advances in Computation and Intelligence. Series: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Zhihua C., Zhenhua L., Zhuo K., Yong L. (Eds.). – 2009. – № 1. – P. 434-442.
5. Shor N.Z., Stetsyuk P.I. Modified r -algorithm to find the global minimum of polynomial functions. – Cybernetics and Systems Analysis. – 1997. – Vol. 33, № 4. – P. 482-497.

6. *Stoyan Y, Pankratov A, Romanova T.* (2015). Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. DOI: 10.1007/s10898-015-0331-2.
7. *Sun Z., Teng H.* Optimal layout design of a satellite module. – *Engineering optimization*. – 2003. – Vol. 35, № 5. – P. 513-530.
8. *Wachter A., Biegler L.T.* On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. – *Mathematical Programming*. – 2006. – Vol. 106, № 1, P. 25-57.

УДК 519.6

О.В. Ковальчук

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ОГЛЯД ТРИКРОКОВИХ МЕТОДІВ НА ОСНОВІ МЕТОДУ НЬЮТОНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо задачу розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$P(x) = 0, \quad P: R^n \rightarrow R^n \quad (1)$$

Одним із відомих методів для розв'язування (1) є метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - [P'(x_k)]^{-1} P(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

В [3] був запропонований трикроковий метод наступного вигляду

$$\begin{aligned} u_k &= x_k - P'(x_k)^{-1} P(x_k) \\ v_k &= x_k - \beta_k P'(x_k)^T P(x_k) \\ x_{k+1} &= \arg \min \|P(u_k + \lambda_k (v_k - u_k))\| \end{aligned} \quad (3)$$

$$\beta_k > 0, \quad \lambda \in R, \quad k = 0, 1, \dots$$

Доведено, що швидкість збіжності методу (3) є не менша ніж швидкість збіжності базового методу (2).

Пропонується розглянути модифікацію методу (2), для ефективнішого використання матриці Якобі яку отримуємо на попередньому кроці, а саме використовувати матрицю повторно на наступному кроці обчислення.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - [P'(x_0)]^{-1} P(x_0) \\ u_k &= x_k - [P'(x_k)]^{-1} P(x_k) \\ v_k &= x_k - \beta_k [P'(x_{k-1})]^{-1} P(x_k), \\ x_{k+1} &= \arg \min \|P(u_k + \lambda_k (v_k - u_k))\|, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

де β_k вибирається так, щоб $\|P(v_k)\| < \|P(x_k)\|$, $\lambda \in R$, $k = 0, 1, \dots$

Наступна теорема доводить, що швидкість збіжності методу (4) є не менша ніж швидкість збіжності базового методу (2), а практичні експерименти показують, що кількість обчислень вектор функції $P(x)$ вже є меншою ніж в методі (3).

Теорема 1. Нехай x^* - розв'язок задачі (1). Якщо

- 1) $P(x)$ – неперервно-диференційована в області $D \subset R^n$;

$$D = \{x \in R^n : \|x - x_0\| \leq 2B\|P(x_0)\|\}$$

- 2) $\forall x \in D \quad \|P'(x)\| \leq M_1$,

- 3) $\forall x, y \in D \quad P'(x)$ задовольняє умові Ліпшиця $\|P'(x) - P'(y)\| \leq L\|x - y\|$;

- 4) $\forall x \in D$ існує обернений оператор $[P'(x)]^{-1}$, причому $\|[P'(x)]^{-1}\| \leq B$;

- 5) початкове наближення x_0 вибрано так, що $q = B^3 M_1 L \|P(x_0)\| < 1$,

Тоді послідовність $\{x_k\}$, яка побудована за (4) є коректно визначена, збігається і має місце оцінка

$$\|P(x_k)\| \leq \left(\prod_{i=0}^{k-2} \mu_{k-i}^{2^i} \right) q^{2^{k-1}} \|P(x_0)\|, \quad \text{де } 0 < \mu_k \leq 1.$$

Використовуючи ідею двокрокового методу, який був запропонований в [1], пропонуємо трикроковий метод із швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$ [2].

$$x_1 = x_0 - [P'(\theta_0)]^{-1} P(x_0) \quad \theta_0 = x_0$$

$$u_k = x_k - [P'(\theta_k)]^{-1} P(x_k), \quad \theta_k = \frac{v_k + x_k}{2} \quad (5)$$

$$v_k = x_k - [P'(\theta_{k-1})]^{-1} P(x_k),$$

$$x_{k+1} = \arg \min \|P(v_k + \lambda(u_k - v_k))\|,$$

де $\lambda \in R$, $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 2 Нехай

1. $P(x)$ – двічі неперервно-диференційований нелінійний оператор, визначений в опуклій області $D = \{x \in X, \|x - x_0\| \leq 2BM_1\|P(x_0)\|\}$

$$\forall x \in D \quad \|P'(x)\| \leq M_1, \quad \|P''(x)\| \leq M_2 ;$$

2. $\forall x, y \in D \quad P''(x)$ задовольняє умові Ліпшиця $\|P''(x) - P''(y)\| \leq L\|x - y\|$

3. $\forall x \in D$ існує оператор $[P'(x)]^{-1}$, причому $\|[P'(x)]^{-1}\| \leq B$;

4. в D існує точка x^* , яка є розв'язком задачі (1)

5. початкове наближення x_0 вибрано так, що

$$q = \max \left\{ M_1 B^3 M_2, \sqrt{C M_1 B^3} \right\} \|P(x_0)\| < 1,$$

$$\text{де } C = B^2 M_2^2 \left(1 + \frac{1}{2} B M_1\right) + B L \left(\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2} B M_1\right)^2\right).$$

Тоді послідовність $\{x_k\}$, яка побудована за (5), коректно визначена та збігається до x^* і має місце оцінка

$$\|P(x_{k+1})\| \leq \left(\prod_{i=1}^k \mu_i^{t_{k-i+1}} \right) q^{D_{k+1}} \|P(x_0)\|,$$

де

$$D_{k+1} = 2D_k + D_{k-1} + 2, \quad D_{-1} = -1, \quad D_0 = 0, k = 0, 1, \dots, \quad \mu_i \in (0; 1],$$

$$t_k = 2t_{k-1} + t_{k-2}, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2, k = 3, 4, \dots$$

Проводячи чисельні експерименти із даними методами, можна стверджувати, що трикрокові методи є набагато ефективнішими коли задача яку нам потрібно розв'язати має певні особливості, наприклад вироджений Якобіан в точці розв'язку.

Приклад 1. Розширена сингулярна система Пауелла

$$P_{4k-3}(x) = x_{4k-3} + 10x_{4k-2};$$

$$P_{4k-2}(x) = \sqrt{5}(x_{4k-1} - x_{4k});$$

$$P_{4k-1}(x) = (x_{4k-2} - 2x_{4k-1})^2;$$

$$P_{4k}(x) = \sqrt{10}(x_{4k-3} - x_{4k})^2;$$

$$1 \leq k \leq \frac{n}{4};$$

$$x_0 = (3; -1; 0; 1; \dots; 3; -1; 0; 1); \quad x^* = (0; \dots; 0).$$

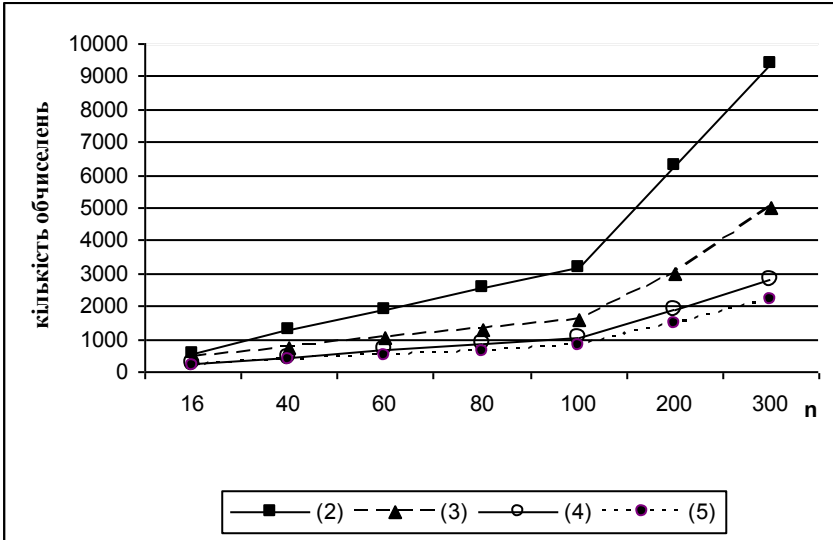


Рисунок 1. –Залежність кількості обчислень від розмірності задачі для прикладу 1.

Як видно з Рис. 1 трикрокові методи здійснюють меншу кількість обчислень вектор функції $P(x)$, на відміну від методу Ньютона (2). Ця перевага трикрокових методів збільшується із збільшенням розмірності системи.

1. *Бартіш М.Я.* Про один ітераційний метод розв'язання функціональних рівнянь / Бартіш М.Я. // Доп. АН УРСР. Сер. А. –1968. – 5. – С.387-391.
2. *Бартіш М.* Про один трикроковий метод з порядком $1+\sqrt{2}$ для розв'язування систем нелінійних функціональних рівнянь / Бартіш М., Ковальчук О.//XXII International Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU -2013) Yalta-Foros, Ukraine, September 23-27. – 2013., с. 42-43
3. *Бартіш М.* Трикрокові ітераційні алгоритми розв'язування систем нелінійних рівнянь / М. Бартіш, Н. Огородник // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 12. – С. 23-31.

Я.В. Коковська, П.С. Венгерський

(Львівський національний університет ім. І.Франка)

ПРО ПОРІВНЯННЯ ДВОХ ПІДХОДІВ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ РУСЛОВОГО СТОКУ РІДИНИ

В цій роботі розглядається модель руслового стоку рідини у гідродинамічному та кінематичному наближеннях.

В основі гідродинамічного підходу лежать два основних фактори – перевага горизонтальних масштабів руху над вертикальними та гідростатичний закон для тиску. Процеси, що лежать в основі цієї теорії носять хвильовий характер з довжиною хвилі набагато більшою вертикальних масштабів руху. В результаті такого підходу із системи рівнянь Нав'є-Стокса була отримана наступна система рівнянь, що описує рух рідини у відкритому псевдопризматичному руслі[2]:

$$\frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = q;$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\alpha}{g} U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\alpha-1}{g} \frac{U}{F} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{U^2}{C^2 R} = i, \quad (1)$$

де U – швидкість потоку та F - площа поперечного перерізу потоку; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – прискорення сили тяжіння; $C = \text{const}$ – коефіцієнт Шезі; $i = \sin \delta$ – нахил лінії дна; $B = b_- + b_+$ – ширина вільної поверхні; $R = \text{const}$ – гідрравлічний радіус русла; α – відомий у гідрравліці коректив середньої швидкості; $q = q(x; t)$ – бічний притік.

Доповнимо ці рівняння початковими $U|_{t=0} = u_0(x)$, $F|_{t=0} = f_0(x)$ на $[0, L]$ та крайовими умовами $U(t, 0) = 0$, $F(t, 0) = 0$ і отримаємо початково-крайову задачу знаходження невідомих – швидкості потоку U та площі поперечного перерізу F .

Для даної моделі була побудована варіаційна задача, яка розв'язувалася методом скінченних елементів. Для неї була проведена дискретизація за часовою та просторовою змінними. При напівдискретизації за просторовою змінною базисні функції вибирались у вигляді кусково-лінійних та кусково-квадратичних поліномів[3].

Ця математична модель залежить від багатьох факторів, які можуть достатньо швидко змінюватися, тому така модель повинна бути стійкою до зовнішніх та внутрішніх впливів, які суттєво модифікують розв'язок задачі. Так як задача нелінійна, то розв'язок набуває великих додатних та від'ємних значень, особливо при різких перепадах рельєфу дна потоку. Тому збільшено порядок апроксимацій шуканого розв'язку і показано доцільність такого підходу на різних тестових прикладах.

Та важливою властивістю цих моделей є те, що переміщення водних мас відбувається в умовах рівноваги сили опору та сили земного тяжіння. Рівняння, які описують ці процеси отримуються із системи рівнянь у гідродинамічному наближенні і називаються кінематичними рівняннями.

Спрощені рівняння стоку води у вигляді рівнянь кінематичної хвилі набудуть вигляду:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{3}{2} C \sqrt{iF} \frac{\partial F}{\partial x} = Bq,$$

Для регуляризації розв'язку в попередньому рівнянні введемо доданок з другою похідною по площі поперечного перерізу потоку, в результаті отримаємо

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{3}{2} C \sqrt{iF} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = Bq,$$

де $F = F(x, t)$ – площа поперечного перерізу; $B = b(x, y) - a(x, y)$ – ширина русла; q – бічний притік; Re – число Рейнольдса; i – нахил лінії дна.

Доповнимо отримане рівняння такими початковими та крайовими умовами:

$$\begin{aligned} F_{t=0} &= F_0, \\ \left(-\beta \frac{\partial F}{\partial x} + (1 - \beta) F \right) \Big|_{x=0} &= 0, \\ \left(\gamma \frac{\partial F}{\partial x} + (1 - \gamma) F \right) \Big|_{x=L} &= 0, \quad \gamma, \beta > 0. \end{aligned}$$

Аналогічно як і у гідродинамічному підході для даної моделі була побудована варіаційна задача, яка розв'язувалася методом скінченних елементів. Проведена дискретизація за часовою змінною та просторовою з використанням лінійних апроксимацій.

Для даних моделей було проведено порівняння результатів на основі тестових прикладів та обчислені порядки збіжності.

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – Мир, 1977. – 622 с.
2. Венгерський П.С. Один з підходів моделювання процесів руслового стоку рідини / Венгерський П.С., Коковська Я.В. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – Вип.15. – 2009. – С.178-195.
3. Коковська Я.В. Використання лінійних і квадратичних апроксимацій для розв'язування задач руслового стоку рідини // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – Вип. 18– 2012. – С. 165-175

УДК 517.988

С. В. Колосова, В. С. Луханін, М. В. Сидоров

(Харківський національний університет радіоелектроніки)

ПРО ПОБУДОВУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Відомо [1], що крайовій задачі

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(\lambda, x, u) \quad \forall x \in \Omega, \\ u &> 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

на класі неперервних у Ω функцій можна поставити у відповідність операторне рівняння

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, s) f(\lambda, s, u(s)) ds, \quad (2)$$

яке розглядатимемо на конусі K невід'ємних у $C(\Omega)$ функцій. У (2) $G(x, s)$ – функція Гріна оператора $-\Delta$ першої крайової задачі в області Ω , $x = (x_1, \dots, x_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, λ – числовий параметр.

Наведемо деякі попередні відомості [1].

Визначення 1. Замкнену опуклу множину $K \subset E$ (E – банахів простір) називають конусом, якщо з $u \in K$, $u \neq 0$, випливає $au \in K$, $a > 0$, та $-u \notin K$.

Визначення 2. Конус K називають нормальним, якщо існує число $N(K)$, що з $0 \leq u \leq v$ випливає $\|u\| \leq N(K)\|v\|$ (нерівність $v \geq u$ означає, що $v - u \in K$).

Відомо, що сукупність невід'ємних в $C(\Omega)$ функцій є нормальним конусом [1, с. 17].

Далі вважатимемо, що функція $f(\lambda, x, u)$ невід'ємна та за змінною u угнута в узагальненому сенсі: якщо $u > 0$ та $t \in (0, 1)$, тоді

$$f(\lambda, x, tu) - tf(\lambda, x, u) > 0 \quad (x \in \Omega). \quad (3)$$

Якщо виконується умова (3), то оператор

$$Tu = \int_{\Omega} G(x, s) f(\lambda, s, u(s)) ds, \quad D(T) = K, \quad (4)$$

називають u_0 -угнутим, де $u_0(x) = \int_{\Omega} G(x, s) ds$, за припущенням, що $\forall u \geq 0$ та $u \neq 0$ виконуються нерівності $\alpha u_0(x) \leq Tu \leq \beta u_0(x)$, $\alpha, \beta > 0$.

Визначення 3. Множину елементів $u \in K$, $v_0 \leq u \leq w_0$, називають конусним відрізком та позначають $\langle v_0, w_0 \rangle$.

Якщо монотонний на $\langle v_0, w_0 \rangle$ оператор T перетворює $\langle v_0, w_0 \rangle$ у себе (тобто $Tv_0 \geq v_0$, $Tw_0 \leq w_0$), конус K є нормальний, оператор T є цілком неперервний, тоді існує хоча б одна нерухома точка у оператора T [1, с. 129].

Якщо до того ж оператор T є u_0 -угнутим, то рівняння $u = Tu$ має єдиний невід'ємний нетривіальний розв'язок [1, с. 283].

У випадку, якщо оператор T є монотонний та u_0 -угнутий, конус K є нормальний, тоді послідовні наближення $u_n = Tu_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ збігаються до ненульового розв'язку u^* у нормі простору $C(\Omega)$, яким би не було обрано ненульове початкове наближення [1, с. 206].

Якщо для операторного рівняння вдається побудувати інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, тоді, обираючи за початкові наближення кінці конусного відрізка v_0 , w_0 , отримаємо двобічні наближення

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0,$$

де u^* – точний розв'язок рівняння (2).

Розглянемо наступні дві крайові задачі [3]:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda + u^p \quad \forall x \in \Omega, \\ u &> 0 \text{ у } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\lambda > 0, p > 0) \end{aligned} \quad (5)$$

та [4]

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u^q + u^p \quad \forall x \in \Omega, \\ u &> 0 \text{ у } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\lambda > 0, 0 < q < 1 < p). \end{aligned} \quad (6)$$

Відповідними операторними рівняннями для (5) та (6) є

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, s) [\lambda + u^p(s)] ds, \quad (7)$$

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, s) [\lambda u^q(s) + u^p(s)] ds. \quad (8)$$

На конусі K невід'ємних у $C(\Omega)$ функцій вводимо у розгляд оператори

$$Au = \int_{\Omega} G(x, s) [\lambda + u^p(s)] ds, \quad Bu = \int_{\Omega} G(x, s) [\lambda u^q(s) + u^p(s)] ds.$$

Вочевидь, що оператори A , B за умови $p > 0$, $q > 0$ є монотонні, бо $\forall u, v \in K$ таких, що $u \leq v$, виконуються нерівності $Au \leq Av$, $Bu \leq Bv$.

Побудуємо інваріантні конусні відрізки для A та B . У [1] для випадку монотонно зростаючої за u функції $f(\lambda, x, u)$ пропонується обирати $v_0 = 0$.

Для оператора A схема послідовних наближень $u_n = Au_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$,

якщо взяти $w_0 = \beta = \text{const} > 0$, вимога $Aw_0 \leq w_0$ приводить до умови

$$\max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} G(x, s) ds \leq \frac{\beta}{\lambda + \beta^p}. \quad (9)$$

Отже, для A інваріантним конусним відрізком є $\langle v_0, w_0 \rangle$, де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, при цьому параметри λ , p задачі (5) та введений параметр β пов'язані умовою (9).

Для оператора B при виборі $v_0 = 0$ маємо елемент $v_1 = \int_{\Omega} G(x, s) [\lambda v_0^q + v_0^p] ds = 0$, тобто лівий кінець конусного відрізка при застосуванні схеми послідовних наближень $u_n = Bu_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, залишається нерухомим і замість двобічних наближень отримаємо лише наближення зверху. Нами запропоновано покласти $v_0 = \varepsilon \omega(x)$, де $\omega(x) > 0$ у Ω , $\omega(x) = 0$ на $\partial\Omega$, $\varepsilon = \text{const} > 0$. Функцію $\omega(x)$ з вказаними властивостями можна побудувати практично для будь-якої області, використовуючи конструктивний апарат теорії R -функцій [2]. З нерівності $v_1 \geq v_0$ отримали умову

$$\max_{x \in \Omega} \omega^2(x) \leq \varepsilon^{2(q-1)} M \int_{\Omega} [\lambda \omega^q(s) + \varepsilon^{p-q} \omega^p(s)]^2 ds, \quad (10)$$

де позначили $M = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} G^2(x, s) ds$. Для відшукування w_0 покладемо $w_0 = \gamma = \text{const} > 0$ та скористаємося нерівністю $w_1 \leq w_0$ згідно з визначенням конусного відрізка. Це приводить до умови

$$\max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} G(x, s) ds \leq \frac{\gamma}{\lambda \gamma^q + \gamma^p}. \quad (11)$$

Отже, умови (10) та (11) пов'язують параметри задачі (6) λ , p , q і введені параметри ε та γ .

Дослідження операторів A та B на угнутість та u_0 -угнутість приводить до умов:

– для оператора A

$$\lambda > \max \left\{ \beta^p (p-1), \frac{\beta^p (t_* - t_*^p)}{1 - t_*} \right\}, \quad (12)$$

$t_* \in (0, 1)$ – корінь рівняння $1 + t^p (p-1) = p t^{p-1}$;

– для оператора B

$$\lambda > \max \left\{ \gamma^{p-q} \frac{p(p-1)}{q(q-1)}, \gamma^{p-q} \frac{t_* - t_*^p}{t_*^q - t_*} \right\}, \quad (13)$$

$t_* \in (0,1)$ – корінь рівняння $(1 - pt^{p-1})(t^q - t) - (qt^{q-1} - 1)(1 - t^p) = 0$.

Для рівняння (7) обчислювальний експеримент проведено у області $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 > 0\}$ при значеннях $\beta = 0,9$, $\lambda = 2$, $p = 3$. Вони задовольняють умовам (9) та (12).

Для рівняння (8) обчислювальний експеримент проведено у області $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ при значеннях $\lambda = 3$, $p = 2$, $q = 0,5$, $\varepsilon = 0,5$ та $\gamma = 1,5$. Вони задовольняють умовам (10), (11) та (13).

В таблиці 1 наведено значення наближень $v_3(\mathbf{x})$, $w_3(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 , наближень $v_{18}(\mathbf{x})$, $w_{18}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,1i$, $\varphi_j = 0,1j\pi$, $i = 2,5,8$, $j = 1,3,5$.

Таблиця 1 – Значення наближень $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ для рівняння (7), $v_{18}(\mathbf{x})$ та $w_{18}(\mathbf{x})$ для рівняння (8)

Ф		Ω_1			Ω_2		
		ρ			ρ		
		0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8
$\frac{\pi}{10}$	w_n	0,0466	0,0875	0,0680	0,4191	0,3100	0,1339
	v_n	0,0465	0,0874	0,0679	0,4190	0,3099	0,1338
$\frac{3\pi}{10}$	w_n	0,1100	0,1726	0,1098	0,4191	0,3099	0,1331
	v_n	0,1097	0,1721	0,1096	0,4190	0,3098	0,1330
$\frac{\pi}{2}$	w_n	0,1304	0,1939	0,1185	0,4192	0,3105	0,1358
	v_n	0,1301	0,1933	0,1182	0,4191	0,3105	0,1357

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. 394 с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
3. Ambrosetti A., Brezis H. G. Cerami. Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems // Journal of Functional Analysis. 1994. – V. 122, № 2. – P. 519–543.
4. Baraket S., Dong Ye. Singular Limit Solutions for Two-Dimensional Elliptic Problems with Exponentially Dominated Nonlinearity // Chinese Annals of Mathematics. Series B. 2001. – V. 22, № 03. – P. 287–296.

УДК 519.8

Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко***

(*Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет»,
 ** Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара)

ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З ОБМЕЖЕННЯМИ

Неперервними задачами мультиплексного розбиття множин називаються задачі розбиття обмежених множин з простору E_n на підмножини, кожна з яких охоплює точки, що мають одні й ті самі k найближчі сусідні точки з N існуючих (або можливих), що зветься центрами [1]. Оптимізаційний характер такі задачі набувають, коли шукане розбиття має забезпечити якомога найкраще значення деякого критерію якості.

Представимо загальну математичну постановку неперервної лінійної задачі оптимального мультиплексного розбиття множини, в якій порядок розбиття необхідно знайти невідомі координати центрів з урахуванням їх «потужностей», методу розв'язання якої присвячена дана робота.

Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом замкнена множина у просторі E_n , $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$, $i = \overline{1, N}$, – деякі точки («центри»).

Введемо позначення: $N = \{1, 2, \dots, N\}$ – множина всіх індексів центрів; $M(N, k)$ – множина всіх k - елементних підмножин множини N , $|M(N, k)| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, \dots, j_k^l\}$, $l = \overline{1, L}$, – елементи множини $M(N, k)$.

З кожним елементом $\sigma_l \in M(N, k)$ будемо асоціювати підмножину Ω_{σ_l} точок із Ω , $l = \overline{1, L}$, а з Ω_{σ_l} будемо пов'язувати набір центрів $\{\tau_{j_1^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$.

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$ з Ω назвемо розбиттям k -го порядку множини Ω на її підмножини, що не перетинаються, якщо $\bigcup_{i=1}^L \Omega_{\sigma_i} = \Omega$, $\text{mes}(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}) = 0$, $\sigma_i, \sigma_j \in M(N, k)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, L}$, де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$ множини Ω назвемо підмножинами k -го порядку цієї множини. Нехай $\Sigma_{\Omega}^{N, k}$ – клас всіх можливих розбиттів k -го порядку множини Ω на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються.

Введемо у розгляд функціонал

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{l=1}^L \int \sum_{\Omega_{\sigma_l}} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) dx,$$

де $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; функції $c(x, \tau_i)$ – обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні по x при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ для всіх $i = \overline{1, N}$; координати $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центру τ_i , $i = 1, \dots, N$, наперед невідомі; $\rho(x)$ – обмежена, вимірна, невід’ємна на множині Ω функція; $w_i > 0$, $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$, – задані числа.

Неперервною лінійною задачею оптимального розбиття k -го порядку множини $\Omega \subset E_n$ на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються і серед яких можуть бути порожні, при обмеженнях у формі рівностей і нерівностей із розміщенням центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ є наступна

Задача А- k . $F(\bar{\omega}, \tau^N) \rightarrow \min_{\substack{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega, k}^N \\ \tau^N \in \Omega^N}},$ за умов

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma'_i \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma'_i \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}, \quad (1)$$

де коефіцієнти γ'_j такі, що для всіх $j = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$:

$$0 \leq \gamma'_j \leq 1, \quad \gamma'_{j'_1} + \gamma'_{j'_2} + \dots + \gamma'_{j'_k} = 1.$$

Пару $(\bar{\omega}^*, \tau^N_*) = (\{\Omega_{\sigma_1}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\}, \{\tau_1^*, \dots, \tau_N^*\})$, що забезпечує мінімальне значення функціоналу F і задовольняє обмеження (1), будемо називати оптимальним розв’язком задачі А- k .

Схема розв’язання задачі А- k наступна: за допомогою певного прийому вихідна нескінченновимірна задача оптимізації зводиться до допоміжної скінченновимірної негладкої задачі максимуму, для наближеного розв’язання якої можуть застосовуватися різні модифікації субградієнтних методів. При цьому для розв’язку вихідної задачі вдається отримати аналітичний вираз, що містить параметри, які є оптимальним розв’язком вищезгаданої допоміжної скінченновимірної задачі оптимізації з недиференційовною цільовою функцією.

1. *Коряшкіна Л.С.* Розширення одного класу нескінченновимірних оптимізаційних задач // *Л.С. Коряшкіна // Вісн. Черкаського ун-ту. Сер. Прикл. матем. Інф.* – 2015. – № 18 (351). – С. 3-15.

УДК 519.673

Т.В. Кравчук

(Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького)

ПРОГНОЗУВАННЯ ФОРМИ І ОБ'ЄМУ ПОКЛАДІВ КОРИСНИХ КОПАЛИН З ДОПОМОГОЮ БІКУБІЧНОГО СПЛАЙНА

Термін «сплайн» з'явився в середині минулого століття і в перекладі з англійської означає — лінійка, що гнеться [1]. Сплайн-функції зарекомендували себе, як ефективний метод наближення при розв'язуванні інтерполяційних задач. Багато вчених і науковців використовують саме метод сплайн-функцій при розв'язуванні тих чи інших задач, в яких передбачається апроксимація функцій по заданих числових значеннях [2, 3, 4, 5]. Особливо широке застосування сплайни отримали в техніці як апарат для математичного моделювання поверхонь деталей, а також для прогнозування геологічних об'єктів [2, 4, 5]. Розглянемо задачу, щодо прогнозування об'єму і форми залягання корисних копалин.

В місці залягання корисних копалин пробурили свердловини (Рис. 1), для заміру розміщення породи. Нехай є набір числових значень ω_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, 3$) глибини розміщення передбачуваної корисної копалини. Аналогічно задані і значення найближчих до поверхні покладів.

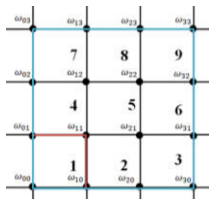


Рисунок 1. — Схема буріння свердловин

Необхідно зробити прогноз щодо форми і об'єму покладів даної породи. Для цього застосуємо бікубічний сплайн [6,7]:

$$S_{ij} = \sum_{n,k=0}^3 c_{nk} \xi^n \eta^k, \text{ де } \xi = x - x_i, \eta = y - y_j \quad (i, j = 0; 1; 2; 3) \quad (1)$$

В результаті, використавши наперед задані числові значення, маємо наступний вигляд залягання покладів корисної породи, в заданій області буріння свердловин (Рис. 2).

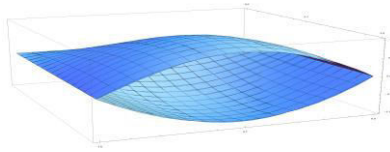


Рисунок 2. – Прогнозована форма залягання корисних копалин

Оскільки для перевірки точності застосування даного методу з використанням бікубічного сплайну (1), для побудови використані числові значення наперед заданої функції, що дає можливість зробити висновок про точність наближення, а також порівняти об'єм інтерпольованої поверхні з наперед заданою.

Отже, в результаті проведених обчислень, найбільша похибка між заданою та інтерпольованою поверхнею склала 0,001%. Різниця між об'ємами дорівнює 0,0312 куб. одиниць, що говорить про високу точність даного методу. Тому використаний бікубічний сплайн (1) доречно застосовувати на практиці при знаходженні математичних моделей поверхонь та прогнозуванні різноманітних геологічних об'єктів, таких, наприклад, як поклади нафти та інших корисних копалин.

1. *Завьялов Ю.С.* Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко – М. : Наука, 1980. – 352 с.
2. *Зеленский А.С.* Автоматизированная оценка пространственной изменчивости показателей руды с использованием сплайнов на рудных карьерах / А.С. Зеленский, С.С. Пуханов // ВЕСТН. ХНТУ. – 2011. – Вип. №2(41). – с.56-62
3. *Кравчук Т.В.* Застосування сплайн-функцій до прогнозування форми поверхонь/ Т.В.Кравчук, П.О.Стеблянко. – Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: матеріали XIX Всеукр. наук. конф., (3-4 жовтня 2013р., м. Львів) / М-во освіти і науки України, Львівський нац. ун-т ім. І. Франка. – Львів, 2013. – с. 82-83.
4. *Стеблянко П.А.* Применение напряженных сплайнов при построении решения задачи для цилиндрической оболочки вращения с переменной жесткостью / П.А. Стеблянко, А.П. Дзюба, О.О. Сафронов // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011, вип. 15. – с.170-182.
5. *Стеблянко П.А.* Применение двухмерного кубического сплайна для описания геометрических объектов // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 3 (44) .- Дніпропетровськ, 2006.- С. 107-111.
6. *Стеблянко П.О.* Аналіз розходжень між стикованими сплайн-поверхнями / П.О.Стеблянко, Т.В.Кравчук // Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. - 2013р. –Вип. №38 (291). – с. 41-48.
7. *Стеблянко П.О.* Побудова та аналіз стикування поверхонь, побудованих за допомогою двовимірних сплайн-функцій / П.О. Стеблянко, Т.В. Кравчук // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету: (технічні науки): тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки» / Дніпродзержинськ ДДТУ. – 2013. – В. 2(22). – с.75-82.

УДК 519.63:[531.314.2+536.242+532.516.5]

К.С. Красніков

(Дніпродзержинський державний технічний університет)

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАСВОЄННЯ ПОРОШКОВОГО ДРОТУ У РОЗПЛАВІ СТАЛІ ПІД ЧАС ПРОДУВАННЯ НА УСТАНОВЦІ КІВШ-ПІЧ

Введення порошкового дроту у розплав є сучасним методом позапічної обробки сталі. У даній роботі запропоновано математичну модель для чисельних досліджень на комп'ютері.

Для побудови моделі розв'язано наступні задачі:

1) визначення траєкторії тривимірного руху порошкового дроту, як системи твердих стрижнів. Тривимірний розв'язок необхідний для визначення координат вивільнення порошку або відплавлених частини дроту;

2) моделювання одновимірного плавлення дроту із появою кірки розплаву для визначення моменту вивільнення порошку. Враховуючи невеличку товщину дрової оболонки (~ 1 мм), одновимірної моделі достатньо;

3) розрахунок тривимірного руху розплаву і порошкового усереднення в ньому. Різні розташування та різна кількість фурм продування зумовлюють тривимірне визначення швидкісного поля розплаву.

Дріт представлено ланцюгом стрижней. Вважається, що стрижні мають постійну однакову довжину й зв'язки між ними – ідеальні. Враховано згин дроту, а його кручення можна нехтувати.

Динаміка системи стрижней визначається рівняннями Лагранжа другого роду з урахуванням потенційних і дисипативних сил [1]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial K}{\partial q_b} = - \frac{\partial P}{\partial q_b} + \tilde{F}_b \quad b = \overline{1, S}$$

де K і P – відповідно кінетична і потенційна енергії системи стрижней, $\tilde{F}_b$ – дисипативні сили гідродинамічного опору, q_b - узагальнені координати, S – число ступенів свободи $2N+3$ (де N – кількість стрижнів у ланцюгу, а додаткові три ступеня введено для врахування вільного руху відплавленої частини дроту). Узагальненими координатами обрано: кути сферичної системи координат (зенітний – θ_k та азимутальний – φ_k) і декартові координати початку ланцюга (x_0, y_0, z_0) на випадок вільного руху.

Кінетична енергія системи стрижней визначається за допомогою швидкостей їх центрів мас, виражених через узагальнені координати θ_k і φ_k :

$$v_k^x = v_0^x + \sum_{j=1}^k l_{jk} (\omega_j \cos \theta_j \cos \varphi_j - \sigma_j \sin \theta_j \sin \varphi_j),$$

$$v_k^y = v_0^y + \sum_{j=1}^k l_{jk} (\omega_j \cos \theta_j \sin \varphi_j + \sigma_j \sin \theta_j \cos \varphi_j),$$

$$v_k^z = v_0^z - \sum_{j=1}^k l_{jk} \omega_j \sin \theta_j,$$

$$K = \sum_{k=1}^N \left[\frac{m_k}{2} (v_k^{x^2} + v_k^{y^2} + v_k^{z^2}) + \frac{l^2 m_k}{24} (\omega_k^2 + \sigma_k^2 \sin^2 \theta_k) \right],$$

де v_k^x, v_k^y, v_k^z – декартові компоненти швидкості, ω_k і σ_k – кутові швидкості, що відповідають кутам θ_k і φ_k , m_k – маса k -го стрижня, N – поточна кількість стрижнів у ланцюгу. Коефіцієнт l_{jk} має вигляд:

$$l_{jk} = \begin{cases} l, & j < k \\ \frac{l}{2}, & j = k \end{cases}$$

Потенційна енергія системи стрижней має вигляд:

$$P = \sum_{k=1}^N \left[g \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_k} \right) m_k z_k + \frac{\kappa_k}{2} (\Delta_k - \psi_k)^2 \right],$$

де g – прискорення вільного падіння, ρ_0 і ρ_k – густина розплаву і середня густина k -го стрижня, ψ_k – кути залишкової деформації, κ_k – коефіцієнт пружності в з'єднанні $(k-1)$ -го та k -го стрижнів, Δ_k – кути між ними ($\Delta_k^2 = \Delta \theta_k^2 + \Delta \varphi_k^2 \sin^2 \theta_k$, де $\Delta \theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$, $\Delta \varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$). Коефіцієнт пружності κ_k лінійно залежить від середньої температури сусідніх стрижней із коефіцієнтом ξ і дорівнює $\kappa_k^0 (1 - \xi \Delta T)$, аби при зростанні температури коефіцієнт κ_k прямував до нуля.

Сили гідродинамічного опору з боку розплаву, які діють на стрижні, визначаються так:

$$\vec{F}_b = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i},$$

де $\vec{r}_k$ – радіус-вектори центрів мас стрижнів:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \vec{l}_j + \frac{1}{2} \vec{l}_k,$$

де $\vec{l}_j$ – напрямки j -го стрижня:

$$\vec{l}_j^x = l \sin \theta_j \cos \varphi_j; \quad \vec{l}_j^y = l \sin \theta_j \sin \varphi_j; \quad \vec{l}_j^z = l \cos \theta_j;$$

Нехай $\vec{w}_k$ – швидкість центру мас k -го стрижня відносно розплаву (рис. 2). Якщо напрямки швидкості $\vec{w}_k$ співпадає з напрямком стрижня

$\vec{l}_k$, то опором рухові k -го стрижня можна знехтувати. Таким чином сила опору залежить від перпендикулярній стрижню складовій швидкості:

$$\vec{f}_k = -C_x \frac{\rho w_k^\perp \vec{w}_k^\perp}{2} A, \\ \vec{w}_k^\perp = \vec{w}_k - (\vec{l}_k \cdot \vec{w}_k) \vec{l}_k / l^2,$$

де C_x – безрозмірний коефіцієнт опору, ρ – густина розплаву, A – площа поздовжнього розрізу стрижня (діаметр помножений на довжину).

Кожен стрижень плавиться згідно із математичною моделлю, яка ґрунтується на методі кінцевих об'ємів у циліндричній системі координат [2], в якій вважається, що під час плавлення у дроті виникають ділянки з однорідним по характеристикам матеріалом. Всі ділянки складаються з кінцевих об'ємів, на гранях яких визначаємо потоки тепла. Введено наступні припущення: тепловий потік уздовж дроту нехтується і враховано тільки радіальний потік; розриви кірки під внутрішнім тиском і можливі від'єднання кусків кірки нехтуються; рух речовини в межах дроту нехтується; рідкий матеріал комірок змішується з розплавом сталі миттєво.

Теплоту фазового переходу матеріалу комірки враховано в ефективній теплоємності [10]. З часом температура комірок кірки досягає температури плавлення і розплав сталі заповнює ці комірки.

Після розплавлення оболонки дроту порошкоподібна начинка потрапляє у сталь, де збільшується концентрація у відповідній комірці ковша, а відповідний стрижень видаляється. Якщо стрижень відплавився у середині ланцюга, тоді від'єднуємо частину ланцюга і її обчислення ведемо з урахуванням вільного руху.

Розрахунок руху розплаву сталі та усереднення матеріалу домішки ведеться у циліндричних координатах із такими припущеннями:

- розплав сталі – однорідна в'язка нестислива Ньютонівська рідина;
- ківш має форму усіченого конуса;
- поверхня розплаву сталі гладка;
- нехтується вплив руху порошку і дроту на гідродинаміку розплаву;

Для чисельного розв'язку використовується трьохетапний метод розщеплення за фізичними факторами Білоцерковського [3] та етап розрахунку конвекційно-дифузійного рівняння:

I) на основі відомого поля швидкості розраховується нове поле швидкості без урахування тиску

$$\vec{v}^* = \vec{v}^n + \Delta t \left(-(\vec{v}^n \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}^n + \nu \Delta \vec{v}^n \right),$$

II) розраховується поле тиску на основі нового поля швидкості

$$\Delta p' = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^* / \Delta t,$$

III) нове поле швидкості виправляється, використовуючи поле тиску (виконується рівняння $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$)

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^* - \Delta t \vec{\nabla} p',$$

IV) визначається нове поле концентрації на основі попереднього

$$c^{n+1} = c^n + \Delta t (\vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} c^n) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}^{n+1} c^n))$$

де $\vec{v}$ – поле швидкості, $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона, Δ – оператор Лапласа, Δt – крок між часовим шаром n і $n+1$, v – коефіцієнт кінематичної в'язкості, p' – поле тиску, розділене на густину розплаву, c – поле концентрації порошку, D – коефіцієнт дифузії речовини домішки у розплаві сталі.

Для полів швидкості, тиску та концентрації на межі розрахунковій області встановлено граничні умови:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_{\parallel} \big|_s &= 0, & \vec{v}_{\perp} \big|_s &= 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{\nabla} p' \big|_s &= 0, & \vec{n} \cdot \vec{\nabla} c \big|_s &= 0, \end{aligned}$$

Шар заграничних комірок оточує розрахункову область, чим полегшує встановлення граничних умов.

Умовою закінчення моделювання є зменшення коефіцієнту варіації порошкової концентрації в розплаві сталі до 2%.

Таким чином, розв'язано задачі нелінійної динаміки системи твердих тіл у змінних Лагранжа та нелінійної динаміки суцільного середовища у змінних Ейлера, а також розв'язано задачу плавлення циліндру із урахуванням кірки розплаву. Побудовано математичну модель засвоєння порошкового дроту у розплаві сталі, яку можна реалізувати у комп'ютерній програмі.

1. *Красніков К. С.* Комп'ютерне моделювання тривимірного руху сталевго дроту в розплаві на установці ківш-піч / *К. С. Красніков, С. Є. Самохвалов, В. П. Піптюк* // Математичне моделювання. – ДДТУ, Дніпродзержинск. – 2013. – №2(29). – С. 95-98.
2. *Красніков К. С.* Математична модель несиметричного плавлення легкоплавкої домішки / *К. С. Красніков, С. Є. Самохвалов, В. П. Піптюк, Г. А. Андрієвський* // Математичне моделювання. – ДДТУ, Дн-жинск. – 2014. – №2(31). – С. 47-50.
3. *Огурцов А. П.* Методы расщепления в задачах гидродинамики и тепломассопереноса / *А. П. Огурцов, С. Е. Самохвалов, Т. Ж. Надрыгаило* // Днепропетровск: Системные технологии, 2003. – С. 174.

УДК 519.7, 519.8

Р.П. Краснюк, Г.Г. Цегелик

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОГО РОЗПОДІЛУ
ЗАВДАНЬ У ВУЗЛАХ КОМП'ЮТЕРНИХ МЕРЕЖ**

Обчислювальна техніка є основою науково-технічного прогресу суспільства. Незважаючи на широке впровадження обчислювальної техніки, на даний час залишаються актуальними проблеми створення та використання високо-продуктивних комп'ютерів та мереж. Одним із шляхів скорочення часу розв'язку наукових, інженерних та прикладних завдань є розробка ефективних алгоритмів і створення на їх основі інтелектуального програмного забезпечення. Ефективність є поняття багатопланове, зокрема, це зручність використання комп'ютерної техніки та програмного забезпечення, наявність необхідного користувацького інтерфейсу, проста процедура доступу та багато іншого. Але головним є досягнення близької до пікової продуктивності комп'ютерів. Цей фактор є настільки важливим, що весь розвиток інформаційних технологій можна описати, як історію пошуку найвищої ефективності розв'язку задач.

Під ефективним алгоритмом розв'язку прикладної задачі розуміється алгоритм, що дозволяє отримати достовірне вирішення задачі з мінімальним використанням оперативної пам'яті за можливо мінімальний час. Ефективність алгоритмів у значній мірі визначається збалансованістю заваження вузлів мереж, що загалом визначається способами розподілу завдань між вузлами, збереження та обробки масивів даних задач, які розв'язуються. При цьому необхідно прагнути до рівномірного завантаження усіх вузлів комп'ютерної мережі у кожен момент часу, мінімізуючи час перебування вузлів у стані очікування.

Проблемі формування паралельних алгоритмів для задач обчислювальної математики присвячена значна кількість робіт. Проведений авторами [1] аналіз показує, що для формування ефективних алгоритмів необхідно враховувати архітектури комп'ютерів мережі, а дослідження алгоритмів необхідно проводити з врахуванням реальних обчислювальних ресурсів (обмежена кількість процесорів, врахування часу обміну даними, часу синхронізації, наявних об'ємів пам'яті, тощо). Навіть в одному класі комп'ютерів з паралельною організацією обчислень, програмна реалізація повинна враховувати особливості архітектури комп'ютерів і їх міжпроцесорних з'єднань.

Для оцінки якості алгоритмів паралельного розв'язку задач використовують критерій ефективності. Розробка паралельних алгоритмів з високим коефіцієнтом ефективності неможлива без виконання умов

мінімізації комунікаційних втрат, тобто очікувань, пов'язаних з припиненням обчислень і обміном даними.

Якщо ввести наступні позначення:

n - число комп'ютерів у розподіленій мережі;

T_n - час розв'язку задачі у розподіленій мережі при використанні n комп'ютерів;

T_1 - час розв'язку тієї ж задачі на одному комп'ютері,

то коефіцієнт ефективності обчислюється за формулою $c_n = S_n/n$, де $S_n = T_1/T_n$ є коефіцієнтом прискорення. Як легко бачити, максимум коефіцієнтів прискорення та ефективності досягається за мінімального часу T_n . Щоб отримати T_n необхідна апріорна інформація, яка визначаються експериментальним шляхом.

В літературі наводяться методи розрахунку коефіцієнтів ефективності алгоритмів, зокрема, в роботі [3] наведено формулу для цього коефіцієнта алгоритму LDL^T -розладу симетричної стрічкової матриці.

За умови наявності m різних завдань $(z_1, z_2, \dots, z_m)$, що мають бути розподілені серед n комп'ютерів мережі при обчисленій ефективності c_{ij} розв'язування задачі z_i на комп'ютері вузла j можна сформулювати оптимізаційну задачу ефективного розподілу завдань у вузлах комп'ютерних мереж (кластерів, *GRID*-систем):

$$L = \sum c_{ij}x_{ij} \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, m; x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

де

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо на } i - \text{му комп'ютері розв'язується } j - \text{те завдання } z_j \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

За умови неоднорідності завдань, тобто виділення груп завдань декількох типів, оптимізаційна задача набуває наступного вигляду: необхідно розв'язати задачі (1) за умови

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = m_i, i = 1, 2, \dots, m; x_{ij} \in \{0, 1, \dots, m_i\}, \quad (3)$$

де m_i - кількість завдань i -го типу.

Сформульована задача є класичною задачею про призначення і для її розв'язування можна скористатися угорським методом [4] або методом потенціалів, [5] що застосовується для розв'язування транспортних задач. Однак, застосування точних методів може бути ускладнене за розв'язування задачі великої розмірності, оскільки призводить до значних часових витрат. Як показали числові експерименти, задовільні для практичного використання результати можна отримати при застосуванні «жадібного» алгоритму [2].

Оцінка точності розв'язку з використанням «жадібного» алгоритму здійснювалась за формулою:

$$W = L_a/L_g * 100\%, \quad (4)$$

де L_a - екстремальне значення цільової функції, отримане з використанням наближеного методу, L_g - екстремальне значення цільової функції, що одержане точним методом.

Оцінка точності використання «жадібного» алгоритму задачі ефективного розподілу завдань в вузлах комп'ютерних мереж, розрахована як середнє значення за сто розв'язками поставленої задачі оптимізації, показала, що середній коефіцієнт точності $W = 90\%$ за дев'яти задач, розв'язки яких не було знайдено. Це показує достатню для практичного використання ефективність евристичних методів числового розв'язку оптимізаційної задачі.

Таким чином, введення в розгляд коефіцієнту ефективності розв'язку задачі дозволяє сформулювати оптимізаційну задачу збалансованого навантаження розподіленої обчислювальної системи, з розв'язку якої можемо отримати максимальне значення загальної ефективності комп'ютерної мережі, що дозволяє здійснювати оптимальне планування завантаження вузлів мережі. Тобто, наявні обчислювальні ресурси можуть бути суттєво оптимізовані, що загалом повинно привести до зменшення об'єму використання вузлів та затрат на їх підтримку. Крім того, невикористане обладнання може бути задіяне для отримання додаткового прибутку.

1. Михалевич В.С., Бик Н.А., Брусникин Б.Н., Химич А.Н. и др. Численные методы многопроцессорного вычислительного комплекса ЕС. – М.: Издательство ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского, 1986. – 401 с.
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2011. – 526 с.
3. Попов А.В., Химич А.Н., Паралельный алгоритм решения системы алгебраических уравнений с ленточной симметричной матрицей // Компьютерная математика. -2005. - №2. – с.52-59
4. Цегелик Г.Г. Математичне програмування: навч. посібник. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 338 с.
5. Цегелик Г.Г. Сіткові моделі, математичні моделі розкрою матеріалів, матричні ігри. Текс. Лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2014. – с.102-103.

ПРО ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У НЕКЛАСИЧНИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ

Контактні задачі є традиційною темою досліджень у механіці деформівного твердого тіла. Особливе місце серед контактних задач займають задачі руху уздовж поверхонь. Більшість способів руху пов'язана з наявністю сили тертя, що виникає за дії притискального навантаження. Поряд з цим деякі біологічні об'єкти рухаються уздовж довільно орієнтованих поверхонь за рахунок періодичного зчеплення частин поверхні тіла з контактною поверхнею та роз'єднання з нею. За такого способу руху відбувається деформування рухомого тіла. Це дозволяє розглядати етапи руху уздовж поверхні як послідовність контактних задач механіки деформівного твердого тіла. Серед особливостей цього класу задач зазначимо заздалегідь невідомі ділянки контакту; нелінійні умови взаємодії тіла з поверхнею в зоні зчеплення; можливість деформування шару, що забезпечує зчеплення.

Математична модель квазістатичного руху пружних тіл уздовж твердих поверхонь запропонована в [1]. Для урахування умов взаємодії контактуючих тіл використані нерівності. Однак наявність нерівностей є причиною нелінійності контактних задач навіть для лінійно-пружних тіл. Крім того, задача має сенс тільки для тіл скінченних розмірів. Через ці особливості застосування традиційних аналітичних підходів стає неможливим.

Числове дослідження базується на варіаційному формулюванні задачі. Здійснено формулювання задачі у вигляді варіаційної нерівності та у вигляді еквівалентної екстремальної варіаційної задачі:

$$\inf_{\mathbf{u}^* \in V} \left\{ J(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^*) d\Omega - \int_{\Omega} Q_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_a} \sigma_m |u_v^*| d\Gamma + \int_{\Gamma_a} \tau_m |\mathbf{u}_\tau^*| d\Gamma \right\},$$

$$\forall \mathbf{u}^* \in V,$$

де V – множина допустимих переміщень;

$\mathbf{u}^*$ – можливі переміщення;

ε_{ij}^* – компоненти можливого тензора деформацій;

$W(\varepsilon_{ij}^*)$ – питома потенціальна енергія деформацій;

Γ_a – частина поверхні тіла, на якій задано умови зчеплення;

σ_m – максимально припустимі значення нормальних напружень;

τ_m – максимально припустимі значення контактних напружень.

Слід зазначити, що в інтеграли по поверхні Γ_a входять множники $|u_v^*|$ і $|\mathbf{u}_\tau^*|$, тобто функціонал $J(\mathbf{u}^*)$ не є диференційовним. Виконана регуляризація задачі за рахунок заміни функцій $|u_v^*|$ і $|\mathbf{u}_\tau^*|$ близькими, але вже диференційовними функціями

$$\omega_\varepsilon(|u_v^*|) = \begin{cases} |u_v^*| - \frac{\varepsilon}{2}, & |u_v^*| > \varepsilon, \\ \frac{u_v^* u_v^*}{2\varepsilon}, & |u_v^*| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad \text{і} \quad \omega_\varepsilon(|\mathbf{u}_\tau^*|) = \begin{cases} |\mathbf{u}_\tau^*| - \frac{\varepsilon}{2}, & |\mathbf{u}_\tau^*| > \varepsilon, \\ \frac{\mathbf{u}_\tau^* \mathbf{u}_\tau^*}{2\varepsilon}, & |\mathbf{u}_\tau^*| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Для дискретизації варіаційної задачі застосовано метод скінченних елементів. Щоб розглянути особливості постановки задачі та методи її розв'язання, але не ускладнювати розрахунки, обрано прямокутні скінченні елементи з білінійною функцією форми.

У наслідок скінченноелементної дискретизації виникає задача пошуку мінімуму функції багатьох змінних за додаткових умов у вигляді нерівностей. Відмітимо, що кількість змінних дискретної задачі дуже велика, але ці змінні слабо пов'язані між собою.

Ефективне розв'язання задачі можливе у разі використання методів, що істотно враховують особливості даного класу задач. Вказані вимоги задовольняє метод послідовної верхньої релаксації, модифікований для урахування обмежень у вигляді нерівностей. Ітераційний процес будується таким чином, щоб функція багатьох змінних $J_h^K(w)$ зменшувалася, а значення вузлових переміщень не виходили за межі допустимої множини.

Вважаємо, що поверхня Γ , яка обмежує тіло, складається з чотирьох частин, які не перетинаються $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma_c \cup \Gamma_a$. На поверхні Γ_u задані переміщення. Поверхня Γ_σ вільна від навантажень. На Γ_c задано умови неповного контакту. Через Γ_a позначено ділянку зчеплення.

Зазначимо, що умови на Γ_u задовольняються відразу, і відповідні вузлові переміщення виключаються з числа невідомих. Нехай q_r - деякий вузол скінченноелементної сітки. Одноразовий обхід усіх вузлів скінченноелементної сітки утворює одну ітерацію. Опишемо послідовність дій при виконанні деякої s -ї ітерації.

1. Якщо вузол q_r є внутрішнім або знаходиться на Γ_σ , то виконується одновимірна мінімізація функції $J_h^K(w)$ за усіма компонентами $u_{ih}^*(q_r)$. За чергове наближення обирається значення

$u_{ih}^{(s)} = u_{ih}^{(s-1)} + w(v_{ih} - u_{ih}^{(s-1)})$, де v_{ih} – розв’язок задачі одновимірної мінімізації; w – параметр релаксації.

2. Якщо вузол q_r належить поверхні Γ_u ніякі дії не виконуються.
3. Якщо вузол q_r знаходиться на Γ_c , то вектор $u_h^*(q_r)$ перетворюється до нормальних $u_{vh}^*(q_r)\mathbf{v}$ і дотичних $\mathbf{u}_{th}^*(q_r)$ складових. Після цього виконується одновимірна безумовна мінімізація за компонентами вектора $\mathbf{u}_{th}^*(q_r)$. Далі здійснюється мінімізація за $u_{vh}^*(q_r)$. Якщо для отриманого розв’язку $v_{ih}(q_r)$ умова непроникання порушується $u_{vh}^*(q_r) < 0$, то приймаємо $u_{vh}^*(q_r) = 0$.
4. Якщо вузол q_r належить поверхні Γ_a , то вектор $u_h^*(q_r)$ перетворюється до нормальних $u_{vh}^*(q_r)\mathbf{v}$ і дотичних $\mathbf{u}_{th}^*(q_r)$ складових. За результатами попередньої ітерації приймається гіпотеза про вид функцій $\omega_\varepsilon(|u_{vh}^*|)$ і $\omega_\varepsilon(|\mathbf{u}_{th}^*|)$. Виконується одновимірна мінімізація за компонентами вектора $\omega_\varepsilon(|\mathbf{u}_{th}^*|)$ і за $\omega_\varepsilon(|u_{vh}^*|)$. Якщо отримане значення не відповідає гіпотезі, що прийнята, то приймається інша гіпотеза і дії пункту 4 повторюються.

Ітераційний процес продовжується доки середньквдратичне відхилення переміщень на двох сусідніх ітераціях не буде менше заданої припустимої похибки.

Описаний алгоритм застосовано для аналізу напружено-деформованого стану пружного тіла у разі руху уздовж поверхонь. Розглянуто задачі руху уздовж плоскої горизонтальної поверхні, плоскої вертикальної поверхні і горизонтальної поверхні з нерівностями.

1. Кузьменко В. І. Контактні задачі руху пружних тіл уздовж твердих поверхонь / В. І. Кузьменко, Г. Й. Михальчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 1. – С. 84–93.

О.Ю. Кучанський, В.В. Мазурак

(Київський національний університет будівництва і архітектури)

ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ ІНТЕРНЕТ-БАНКІНГУ В УКРАЇНІ

З розвитком банківської системи та інформаційних технологій з 90-х років минулого століття почався інтенсивний розвиток дистанційного банківського обслуговування клієнтів. Під дистанційним банківським обслуговуванням розуміють сукупність засобів та технологій, які дозволяють надати необхідні послуги клієнтам без їх безпосереднього візиту до банку. Засобами доступу клієнта до дистанційного обслуговування є персональний комп'ютер, смартфон, мобільний телефон або банкомат. Виділяють такі види дистанційних банківських послуг [2]: інтернет-банкінг, мобільний банкінг, sms-банкінг, відео-банкінг тощо. Інтернет-банкінг надає можливість клієнтам користуватися такими послугами та операціями: переказ коштів між власними рахунками, переказ коштів на інші рахунки, конвертації валют, здійснення SWIFT-переказів, оплата комунальних послуг, робота з депозитними та кредитними рахунками тощо. Різні банки запроваджують все нові послуги, які дозволяють залучити все більше клієнтів і пожвавити обіг коштів.

Дослідження в даній сфері проводились різними вченими, економістами, аналітиками. До них можна віднести: В. М. Кравця, О. О. Гаврилову, О. Д. Вовчака, О. О. Чуба, Л. Ю. Одегову, А. М. Новицького та ін. [2 – 4]

Першим в Україні банком, котрий запровадив в себе систему дистанційного обслуговування є ПриватБанк (1998 р.). До банків, які вважаються лідерами у впровадженні даної системи та активно просуваються в цьому напрямку можна назвати: ПриватБанк, Райффайзен Банк Аваль, ПУМБ, Idea, УкрСиббанк, ОTR Bank, Альфа-Банк та ін. За даними різних досліджень, зокрема досліджень, що проводились відомими компаніями GFK Ukraine [3] та Touchpool [4] приріст клієнтів, які користуються інтернет-банкінгом, і взагалі користувачів Інтернет, які обирають даний вид обслуговування становить приблизно 2%. А кількість користувачів Інтернету, що вже користувались ним раніше становить більше 30%.

Дослідження свідчать, що розвиток інтернет-банкінгу в Україні відбувається швидкими темпами. Не дивлячись на це, існують причини, які в свою чергу гальмують його:

- недоліки та недостатня гнучкість законодавства для впровадження окремих видів послуг;
- консервативність, необізнаність та страх клієнтів;

- недостатня кількість користувачів мережею Інтернет в сільських населених пунктах та її нерівномірне покриття;

Перелічені проблеми постійно знаходяться на контролі. Банки залучають маркетологів та менеджерів для їх вирішення, адже розширення послуг дистанційних систем мають значні переваги: можливість автоматизувати роботу операціоністів банку, зменшити собівартість послуг, зменшити об'єм паперової роботи, підвищити якість обслуговування.

Проведені дослідження в галузі розвитку інтернет-банкінгу дають змогу зробити такі висновки: дана система обслуговування є дуже перспективною на території України, системи інтернет-банкінгу на даний момент надають майже весь спектр послуг, які доступні безпосередньо через відділення, система зручна для багатьох клієнтів, враховуючи сучасний ритм життя.

Дослідження спрямоване на побудову системи дистанційного банківського обслуговування, яка б дозволяла не тільки керувати рухом коштів клієнта, але й дозволяла б оформляти аналітичні звіти, проводити аналіз обігу коштів і рекомендувати клієнту власні пропозиції щодо зменшення витрат і, взагалі, оптимізації процесу управління власним капіталом. Серед важливих функцій системи має бути прогнозування руху фінансових ресурсів клієнта [5], планування надходжень та витрат та підтримка прийняття рішень клієнта щодо виконання дій спрямованих на збільшення капіталу [1].

1. *Берзлев (Кучанський) О.Ю.* Інформаційна система для прогнозування і прийняття рішень у фінансовій сфері [Текст] / О.Ю. Берзлев, А.О. Білошицький // Управління розвитком складних систем. – Київ, 2014. – Вип. 18. – С. 106-111.
2. *Вовчак О.Д.* Платіжні системи: [навч. посіб.] / О. Д. Вовчак, Г.Є. Шпаргало, Г.Я. Андрейків. – К.: Знання, 2008. – 341 с.
3. *Новицький А.М.* Електронний банкінг (організаційно-правове забезпечення): монографія / А.М. Новицький, Г.О. Усатий, В.С. Цимбалюк. – Ірпінь : Національний університет ДПС України, 2008. – 294 с.
4. *Одегова Л.Ю.* Понятие Интернет-банкинга и его значение для гражданских правоотношений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://archive.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/Pchdu/2011_1/010.pdf.
5. *Vercellis C.* Business intelligence: data mining and optimization for decision making [Текст] / C. Vercellis. – Cornwall: John Wiley & Sons Ltd. Publication, 2009. – 417 p.

УДК 517.518.949

С.М. Левицька, А.Т. Дудикевич

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ
НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ**

Процеси теплопередачі грають винятково велику роль як у природі, так і в сучасній техніці. За останні десятиліття інтерес до математичного моделювання складних фізичних процесів помітно зріс. Цьому значною мірою сприяє прогрес в розвитку комп'ютерної техніки, чисельних методів розв'язання всіх типів задач математичної фізики і реалізованих на цій основі математичних моделей.

Для знаходження розв'язку диференціальних рівнянь параболічного типу існує декілька підходів до їх чисельного розв'язання на комп'ютерах. Виділимо наступні два, які розглядаються в даній роботі:

- метод скінченних різниць;
- метод інтегральних рівнянь.

Існують переваги і недоліки цих чисельних методів. Метод скінченних різниць має найбільшу швидкість реалізації у розумінні побудови системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР). Метод інтегральних рівнянь знімає всі обмеження щодо області шуканої функції та ще й знижує розмірність задачі на одиницю. І якби не великі ускладнення щодо обчислення елементів СЛАР, то метод інтегральних рівнянь міг би стати найкращим варіантом для розв'язування рівнянь теплопровідності.

Розглянемо задачу нестационарної теплопровідності в безрозмірному вигляді

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad \tau \in [0, t], \quad (1)$$

з початковою

$$T(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in R^2 \setminus S, \quad (2)$$

та крайовою умовами

$$T(x, y, \tau) = \varphi(x, y, \tau), \quad (x, y) \in S, \quad \tau > 0. \quad (3)$$

Тут $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$, S_i – незамкнуті лінії, задані параметрично

$$\begin{cases} x = x_i(v) \\ y = y_i(v) \end{cases}, \quad v \in [-1, 1], \quad i = \overline{1, N}.$$

Шукаємо розв'язок в довільній області, обчислюючи його значення на контурі за допомогою методу потенціалів, а всередині області – за допомогою методу сіток.

Згідно методу потенціалів [1], розв'язок поставленої задачі шукаємо у вигляді теплового потенціалу простого шару

$$T(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int_S q(s, \tau) \sigma(r, t, \tau) ds, \quad (4)$$

де $\sigma(r, t, \tau) = e^{\frac{-r^2}{4(t-\tau)}} / (4\pi(t-\tau))$ – функція впливу теплового джерела, $r^2 = (x - \bar{x}_i)^2 + (y - \bar{y}_i)^2$ – віддаль між точкою інтегрування і точкою спостереження, $q(s, \tau)$ – невідома густина.

Для знаходження невідомої функції задовільняємо граничну умову (3). Отримаємо інтегральне рівняння Вольтерове за часом і Фредгольмове першого роду за просторовими координатами

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_S q(s, \tau) \frac{e^{\frac{-r^2}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)} ds d\tau = \varphi(\bar{x}, \bar{y}, t), \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in S. \quad (5)$$

Розглянемо методику розв'язування цього рівняння. Розіб'ємо проміжок $[0, t]$ точками $\tau_k, k \in [0, n]$ на малі проміжки і на кожному з них вважаємо густину сталою за часом. Змінимо порядок інтегрування та винесемо густину з-під знаку інтегрування за τ . Інтеграли, залежні від часу, обчислюємо аналітично. Якщо густина для попередніх моментів часу $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ знайдена, то для часу $t = \tau_n$ отримаємо послідовність рекурентних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{p^{(n)}(v)}{\sqrt{1-v^2}} (-Ei(\frac{-r^2}{4h})) dv = \varphi(\bar{v}, \tau_n) - \\ - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{-1}^1 \frac{p^{(k)}(v)}{\sqrt{1-v^2}} (Ei(\frac{-r^2}{4h(j+1)}) - Ei(\frac{-r^2}{4h(j)})) dv. \end{aligned} \quad (6)$$

Послідовність (6) можна розв'язати, використовуючи метод механічних квадратур. При цьому отримана послідовність СЛАР має постійну матрицю, а на кожному кроці за часом перераховуються лише праві частини. Застосована методика виділення логарифмічних особливостей в матриці рекурентної послідовності СЛАР, яка виникає за рахунок співпадіння точок інтегрування і точок спостереження. СЛАР розв'язується ітераційним методом Зейделя [3]. Фактично методом інтегральних рівнянь теорії потенціалу замикається область пошуку розв'язку, а всередині цієї області застосовується метод сіток.

Перший варіант різницевого рівняння, що апроксимує вихідне (1), матиме вигляд [2]

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta y^2}. \quad (7)$$

Нижні індекси відповідають осям x та y , а верхні – осі часу. Рівняння (7) називається явною різницевою схемою, оскільки в ньому всього одна невідома величина $u_{i,j}^{k+1}$, яка може бути обчислена явним чином.

Другий варіант різницевого рівняння, яке апроксимує вихідне, це неявна схема вигляду

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta y^2}. \quad (8)$$

Для того, щоб отримати значення розв'язку в приграничних вузлах сіткової області, використовується багаточлен Лагранжа і отримуються формули апроксимації розв'язку в точках, зображених на рисунку червоним кольором [1].

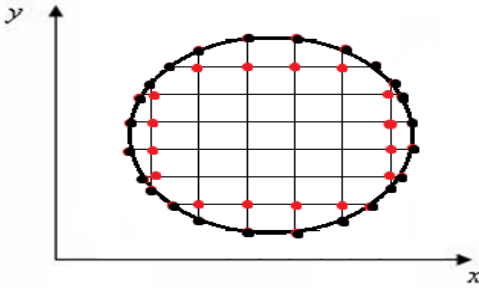


Рисунок. – Приграничні вузли сітки.

Запропонований підхід був апробований на модельному прикладі:

Нехай маємо зовнішню крайову задачу для рівняння нестационарної теплопровідності

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad \tau \in [0, t], \quad t \in [0, 1]; \quad T(x, y, 0) = 0; \quad T(x, y, \tau) = 3t^2 x - 0,15x^3 t;$$

$$S: x(v) = 2v + 1; \quad y(v) = v + 3.$$

Розв'язок задачі шукається в області $x^2 + y^2 = 9$.

В таблиці наведено частину значень розв'язку у внутрішніх вузлах сітки, отриманих за допомогою явної схеми (7). Червоним кольором позначено розв'язки в приграничних вузлах, отримані за формулами Лагранжа, що використовують значення розв'язку на границі з методу інтегральних рівнянь.

Таблиця. – Значення розв'язку у внутрішніх вузлах сітки, явна схема

x y	-3	-2,7	-2,4	-2,1	-1,8	-1,5	-1,2	-0,9	-0,6	-0,3	0	0,3	0,6
-3	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2,7	0	0	0	0	0	0	0,991	0,899	0,834	0,794	0,781	0,794	0,834
-2,4	0	0	0	0	0	0,925	0,807	0,715	0,649	0,61	0,597	0,610	0,649
-2,1	0	0	0	1,097	0,926	0,781	0,663	0,571	0,506	0,466	0,453	0,466	0,506
-1,8	0	0	0	0,989	0,818	0,674	0,555	0,463	0,398	0,358	0,345	0,358	0,398
-1,5	0	0	1,108	0,911	0,741	0,596	0,478	0,386	0,32	0,281	0,268	0,281	0,32
-1,2	0	1,279	1,056	0,859	0,689	0,544	0,426	0,334	0,268	0,229	0,216	0,229	0,268
-0,9	0	1,248	1,025	0,828	0,657	0,513	0,394	0,303	0,237	0,198	0,184	0,198	0,237
-0,6	0	2,7	1,009	0,812	0,641	0,497	0,378	0,286	0,221	0,181	0,168	0,181	0,221
-0,3	0	0	1,003	0,806	0,635	0,491	0,372	0,28	0,215	0,175	0,163	0,175	0,215
0	0	1,225	1,002	0,805	0,634	0,490	0,371	0,28	0,214	0,175	0,162	0,175	0,214
0,3	0	1,224	1,001	0,804	0,634	0,489	0,371	0,279	0,213	0,174	0,161	0,174	0,213
0,6	0	1,218	0,995	0,798	0,628	0,483	0,365	0,273	0,207	0,168	0,155	0,168	0,207
0,9	0	1,202	0,979	0,782	0,611	0,467	0,348	0,257	0,191	0,152	0,139	0,152	0,191
1,2	0	1,17	0,947	0,751	0,58	0,436	0,317	0,225	0,16	0,12	0,107	0,12	0,16
1,5	0	0	0,896	0,699	0,528	0,384	0,265	0,173	0,108	0,068	0,055	0,068	0,108
1,8	0	0	0	0,621	0,451	0,306	0,188	0,096	0,03	-0,008	-0,021	-0,008	0,03
2,1	0	0	0	0,513	0,342	0,198	0,08	-0,011	-0,077	-0,116	-0,129	-0,116	-0,077
2,4	0	0	0	0	0	0,055	-0,063	-0,155	-0,22	-0,26	-0,273	-0,26	-0,22
2,7	0	0	0	0	0	0	-0,247	-0,339	-0,405	-0,444	-0,457	-0,444	-0,405
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Отже, для розв'язування зовнішньої задачі нестационарної теплопровідності використовувався комбінований метод інтегральних рівнянь і метод сіток. Значення розв'язку на границі довільної області знаходились методом потенціалів, а у внутрішніх вузлах сітки – за явною і неявною різницеви́ми схемами. Для апроксимації розв'язку в приграничних вузлах сітки отримано нову формулу на основі багаточлена Лагранжа. Проведено тестові розрахунки, які підтверджують достовірність запропонованої методики.

1. Дудикевич А.Т. Про один спосіб апроксимації граничних умов розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона. / Дудикевич А.Т., Кардаш А.І., С.М.Левицька // Вісн. Вінницького політехнічного інституту. – 2011. – № 3. – С. 245-249.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. Москва: Наука, 1971. – 553 с.
3. Цегелик Г.Г. Чисельні методи: Підручник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, 2004. – 408 с.

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАПІЗНЮЮЧОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Запізнюючі потенціали використовують для інтегрального подання класичних ([7]) і узагальнених [1,2,9] розв'язків мішаних задач для хвильового рівняння в областях загального вигляду. Вони дають змогу замінити мішані задачі для хвильового рівняння еквівалентними залежними від часової змінної граничними інтегральними рівняннями (ЧГІР), у яких невідомі величини – густини потенціалів – визначаються в кожен момент часу лише на межі області [3,10,8].

Відзначимо, що існування та єдиність розв'язків ЧГІР, які отримують у випадках крайових умов Діріхле і Неймана, досліджено в працях [1,2] з використанням перетворення Лапласа за часовою змінною у широких функційних просторах. Там же обґрунтовано метод Гальоркіна для чисельного розв'язування таких інтегральних рівнянь. Разом з тим, в працях [3,11] відзначено складність алгоритмів реалізації. Причиною є складна залежність густин потенціалів від часової і просторових координат. Тому поширеними є підходи, коли за просторовими змінними використовують традиційну дискретизацію (наприклад, метод граничних елементів), а для врахування залежності від часу використовують допоміжні задачі. Зокрема, це так званий метод квадратури згортки (convolution quadrature) [10]. Він базується на використанні стійких методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. У даній роботі розглянемо поєднання перетворення Лагера за часовою змінною і методу граничних елементів при розв'язуванні мішаних задач для однорідного хвильового рівняння за допомогою запізнюючих поверхневих потенціалів.

Розглянемо схему зведення мішаної крайової задачі для хвильового рівняння до нескінченної послідовності ГІР. Нехай Ω – область в $\mathbb{R}^3$ з ліпшицевою компактною межею Γ . Позначимо $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $Q := \Omega \times \mathbb{R}_+$ і $\Sigma := \Gamma \times \mathbb{R}_+$.

Розглянемо задачу: знайти функцію $u(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q}$, яка задовольняє (в певному сенсі) однорідне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \Delta u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

однорідні початкові умови

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

і крайову умову Діріхле

$$u(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma. \quad (3)$$

Тут Δ – диференціальний оператор Лапласа, g – задана функція.

Розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді запізнюючого потенціалу простого шару

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y, t - |x - y|)}{|x - y|} d\Gamma_y, \quad (x, t) \in \bar{Q}, \quad (4)$$

де густина потенціалу μ – невідома функція.

Перш за все зауважимо, що якщо густина $\mu(y, \tau)$, $(y, \tau) \in \Gamma \times \mathbb{R}$, є достатньо гладкою функцією і $\mu(y, \tau) = 0$ при $\tau \leq 0$, то запізнюючий потенціал задовольняє в класичному сенсі хвильове рівняння (1) і початкові умови (2) [7]. Залишається визначити функцію μ так, щоб потенціал задовольняв також крайову умову (3). З цією метою спрямуємо точку спостереження x на граничну поверхню Γ . Тоді з умови (3) отримаємо таке ЧГПР:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y, t - |x - y|)}{|x - y|} d\Gamma_y = g(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma. \quad (5)$$

Розвинемо густину μ в ряд Фур'є-Лагера

$$\mu(y, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j(y) L_j(\sigma\tau), \quad y \in \Gamma, \tau \in \mathbb{R}_+, \quad (6)$$

де $\mu_j(y) := \sigma \int_{\mathbb{R}_+} \mu(y, s) L_j(\sigma s) e^{-\sigma s} ds$, L_j – поліноми Лагера, $j \in \mathbb{N}_0$. Тут і далі $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\sigma > 0$ – параметр, (поки що) довільне дійсне число. Підставимо тепер у ЧГПР (5) замість заданої функції g її розвинення в ряд Фур'є-Лагера

$$g(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x) L_j(\sigma t), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (7)$$

а також розвинення густини і порівняємо вирази при поліномах Лагера з однаковими номерами. Тоді отримаємо нескінченну трикутну систему ГПР

$$\int_{\Gamma} \sum_{i=0}^j \mu_{j-i}(y) e_i(|x - y|) d\Gamma_y = g_j(x), \quad (8)$$

$$x \in \Gamma, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

де

$$e_i(z) := (4\pi z)^{-1} (L_i(\sigma z) - L_{i-1}(\sigma z)) e^{-\sigma z}, \quad z > 0, \quad i \in \mathbb{N}_0. \quad (9)$$

Зокрема, для значення $j = 0$ матимемо перше рівняння цієї системи

$$\int_{\Gamma} \mu_0(y) e_0(|x - y|) d\Gamma_y = g_0(x), \quad x \in \Gamma. \quad (10)$$

Якщо його розв'язати відносно μ_0 , то в наступному рівнянні системи вираз з цією густиною можна перенести у праву частину і розглядати його як рівняння для знаходження μ_1 . Продовжуючи цей процес далі, для довільного значення $j \in \mathbb{N}$ отримаємо ГР відносно функції μ_j

$$\int_{\Gamma} \mu_j(y) e_0(|x-y|) d\Gamma_y = \tilde{g}_j(x), \quad x \in \Gamma, \quad (11)$$

де

$$\tilde{g}_j(x) := g_j(x) - \int_{\Gamma} \sum_{i=0}^{j-1} \mu_{j-i}(y) e_i(|x-y|) d\Gamma_y, \quad (12)$$

$$j \in \mathbb{N}.$$

Як бачимо, кожне з рівнянь (10), (11) – це рівняння Фредгольма першого роду.

Отже, систему (8) будемо трактувати як послідовність ГР, які мають вигляд (11) і відрізняються лише правими частинами. Відомо [4,5], що такі рівняння мають єдиний розв'язок у просторі $H^{-1/2}(\Gamma)$. Знайшовши $\mu_0, \mu_1, \dots$, розв'язок задачі (1)-(3) можна подати у такому вигляді

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \sum_{i=0}^j \mu_{j-i}(y) \zeta_i(\sigma|x-y|) \frac{e^{-\sigma|x-y|}}{|x-y|} d\Gamma_y L_j(\sigma t), \quad (x, t) \in \bar{Q}. \quad (13)$$

Частинну суму цього розвинення розглядатимемо як чисельний розв'язок задачі (1)-(3).

Для знаходження чисельних розв'язків послідовності інтегральних рівнянь (11) використаємо метод граничних елементів (див., наприклад, [6] і наведені там посилання). З цією метою граничну поверхню Γ наблизимо трикутними граничними елементами і використаємо послідовність скінченно-вимірних апроксимаційних просторів з базисами, які складаються з кусково-сталих на функцій. Результати серії обчислювальних експериментів по знаходженню чисельних розв'язків модельних мішаних крайових задач демонструють ефективність підходу, оснований на поєднанні перетворення Лагера за часовою змінною і методу граничних елементів.

1. Bamberger A., Ha-Duong T. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retarde de la diffraction d'une onde acoustique (I) // Math. Methods Appl. Sci., 8(1986): pp. 405-435.
2. Bamberger A., Ha-Duong T. Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide // Math. Methods Appl. Sci., vol. 8(1986): pp. 598 - 608.

3. *Ha Duong T.* On retarded potential boundary integral equations and their discretization // In Davies, P.; Duncan, D.; Martin, P.; Rynne, B. (eds.): Topics in computational wave propagation. Direct and inverse problems. Springer-Verlag(2003): pp. 301-336.
4. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results.//SIAM J.Math.Anal. 1988. Vol.19. P.613-626.
5. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* Boundary Integral Equations // Springer-Verlag, Berlin, 2008.
6. *Schteinbakh O.* Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems. Finite and Boundary Elements.//Springer Science, 2008.
7. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики // М: Наука. 1964.
8. *Laliena A.R., Sayas F.-J.* A distributional version of Kirchhoff's formula // J. Math. Anal. Appl. 359 (2009) 197-208.
9. *Dominguez V., Sayas F.-J.* Some properties of layer potentials and boundary integral operators for wave equation // Journal of Integral Equations and Applications 25 (2013) no 2, pp. 253 - 294.
10. *Lubich Ch.* On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations // *Numer. Math.* 1994; 67: 365-389.
11. *Banjai L.* Time-domain Dirichlet-to-Neumann map and its discretization // Preprint February 2012.

АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ НОВОЇ ЙМОВІРНІСНОЇ МОДЕЛІ ОЦІНКИ СТАНУ ВАЛЮТНОГО РИНКУ

Торгівля на біржі фінансів і цінних паперів в Україні набрала величезної популярності за останні роки у вигляді ринку Forex. В умовах зростання обсягів операцій, збільшення кількості гравців, скорочення часу розповсюдження інформації і здійснення угод, зростає попит на автоматизовані технології технічного аналізу стану ринку, які дозволяють проводити поглиблений аналіз ринкових показників, контролювати і мінімізувати торговельні ризики, забезпечуючи зменшення фінансових втрат.

В попередніх працях [1,2] авторами даної праці була запропонована модель ймовірнісної оцінки стану фінансового ринку і засновані на ній обчислювальні схеми функцій ризику розладнання статистичних характеристик часового ряду валютних котирувань.

В той час, як торговельні системи визначають моменти відкриття і закриття угод, вибір кількісних показників угоди, таких як величини тейк-профіт і стоп-лосс зазвичай залишається на розгляд трейдера. Виключенням є деякі системи, засновані на японських свічках або графіках барів (різновиди представлень числового ряду валютних котирувань, як правило з кроком 1 день, в яких кожна точка несе додаткову інформацію про період часу, відображаючи ціну на початку та наприкінці періоду, а також мінімуми і максимуми), але так працюють далеко не всі системи.

Для переважної більшості систем методологія вибору величин тейк-профіт і стоп-лосс носить або рекомендаційний характер, або взагалі відсутня, зводячись до використання загальних правил, неспецифічних для даної конкретної системи і таких, що носять нечіткий характер.

Для формалізації вибору цих величин з імовірнісних міркувань пропонуються наступні функції.

1) максимізація математичного очікування прибутку від угоди:

$$takeprofit = \arg \max_{y_{cp} \in (y_{st}, \infty)} \left\{ \begin{cases} (y_{cp} - y_{st})P_{ne}, & y_{st} < y_{cp} \\ (y_{st} - y_{cp})P_{ne}, & y_{st} > y_{cp} \end{cases} \right. \quad (1)$$

де y_{st} – значення ціни в момент очікуваного розладнання, y_{st} – приріст ціни з моменту останнього розладнання, P_{ne} – ймовірність неперевищення ціною заданого значення до моменту розладнання.

2) maximizing the mathematical estimation of the next change-point price level:

$$takeprofit = \arg \max_{y_{cp} \in (y_{st}; y_{\max})} \left\{ \begin{array}{l} (y_{cp})P_{ne}, y_{st} < y_{cp} \\ (-y_{cp})P_{ne}, y_{st} > y_{cp} \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Функція (1) призначена для збільшення максимальних прибутків від угод за рахунок кількості прибуткових угод, в той час як (2) максимізує співвідношення кількості прибуткових угод до збиткових.

Дані, отримані в результаті серії тестів, у яких логіка роботи торговельних систем з використанням обчислювальних схем (1) і (2) була ідентичною до такої, що використовується при здійсненні реальної торгівлі (таблиця 1), показали збільшення ефективності отриманих торговельних систем згідно набору критеріїв прибутковості торговельних систем (фактор прибутковості, фактор відновлення, максимальний наростаючий внутрішньоденний збиток, кількість прибуткових і збиткових угод, тощо), порівняно з цими ж системами, але без застосування ймовірнісної оптимізації кількісних показників угод.

Таблиця 1. – Відносна зміна ефективності тестованих систем в %

	Кількість угод	Фактор прибутковості	Максимальний наростаючий внутрішньоденний збиток	Кількість прибуткових угод	Кількість збиткових угод
2 хвилини					
MACD	-9,0950	14,3434	-0,1340	19,1974	-25,1510
Diver	-7,7821	8,1515	-14,0780	-0,8929	0,0000
Bagovino	2,3707	18,6175	-31,5410	41,5954	-36,1440
RSI	-8,8170	6,2566	21,6740	-3,7743	-13,5840
1 година					
MACD	-0,9360	24,7560	-32,5800	-7,2590	5,1587
Diver	-16,3200	10,3230	-24,5000	-36,7300	2,9390
Bagovino	1,7516	7,4120	-29,3700	28,2660	-29,4400
RSI	-20,2100	0,4222	24,0070	-16,9100	-23,7100
6 годин					
MACD	-3,0451	25,4483	-19,0668	19,2577	-17,8425
Diver	-2,8503	47,3533	-39,2438	1,6082	-3,1915
Bagovino	3,5901	14,3854	0,5360	32,5475	-34,4444
RSI	-8,4511	3,9604	48,0511	1,1062	-17,6025

Деталізований аналіз показників ефективності показав, що зростання прибутку відбувається за рахунок покращення співвідношення між кількістю прибуткових і збиткових операцій. В залежності від методу і масштабу часу це просліджується як у вигляді збільшення кількості прибуткових угод при зменшенні збиткових, так і у вигляді зменшення кількості як прибуткових, так і збиткових операцій, але при більш значному зменшенні кількості останніх. При цьому, середній збиток від однієї угоди в частині випадків збільшувався, що, однак, не перевищувало позитивний ефект від інших чинників. Результатом було збільшення фактору прибутку (profit factor), в тому числі автентичного (з виключенням при розрахунках найприбутковішої угоди).

В якості супроводжуючого ефекту в більшості випадків спостерігалось незначне, але закономірне зменшення кількості укладених угод, що пояснюється збільшенням часу дії частини угод при наявності ймовірнісної оптимізації за рахунок більш вдалої постановки межі тейк-профіт.

Величина максимального внутрішньоденного збитку (MIDD) в процесі тестування відхилялася в обидві сторони: з одного боку, мінімізація збитків призводила до зменшення впадин на графіку функції прибутку, з іншого величина максимальної просадки була більшою за контрольний метод, що пояснюється збільшенням пікових значень прибутку.

Для встановлення впливу запропонованих обчислювальних схем на ефективність торгівлі в умовах відсутності впливу всіх параметрів налаштування крім оптимізованих величин була проведена друга серія тестів, при якій з систем були виключені механізми плаваючого стопу і закриття угод за сигналами індикаторів, так що ефективність систем залежала лише від величин, що оптимізувалися. Отриманий під час цієї серії тестів результат підтвердив попередні результати (таблиця 2).

Таблиця 2. – Відносна зміна ефективності тестованих систем в %, плаваючий стоп відключений

	Кількість угод	Фактор прибутковості	Максимальний наростаючий внутрішньоденний збиток	Кількість прибуткових угод	Кількість збиткових угод
2 хвилини					
MACD	-18,3770	61,6616	-17,8450	5,3922	-26,2780
Diver	-16,1020	43,4769	-39,0240	13,3333	-26,1360
Bagovino	-16,8160	7,8185	-22,8750	-1,5126	-24,2370
RSI	-28,1610	23,6682	1,5630	-4,3883	-38,0660

Продовження таблиці 2

	Кількість угод	Фактор прибутко- вості	Максимальний наростаючий внутрішньоден- ний збиток	Кількість прибутко- вих угод	Кількість збитко- вих угод
1 година					
MACD	-32,9300	20,8460	45,9430	-34,0300	-30,7100
Diver	-11,9300	35,7910	-45,1900	8,5659	-20,3100
Bagovino	-13,9000	9,7619	-20,5400	14,4230	-25,0900
RSI	-6,8270	11,3450	-28,4100	6,6524	-12,1800
6 годин					
MACD	6,9804	19,9499	6,9685	29,9242	-3,8816
Diver	-6,7805	63,2319	-41,3767	25,6494	-21,5933
Bagovino	-3,7823	10,4241	-1,9845	13,3776	-16,0256
RSI	-31,3514	30,0889	1477,0440	-16,6667	-37,4046

Таким чином, запропонована авторами модель імовірнісного аналізу стану ринку є адекватною, а запропоновані на її основі обчислювальні схеми функцій ризику здатні ефективно застосовуватися в процесі торгівлі на фінансовому ринку.

На базі запропонованої моделі і обчислювальних схем було створено інформаційну систему підтримки прийняття рішень на базі запропонованих методів і технологій для вирішення задачі оцінки ризиків при торгівлі на валютній біржі, що дозволяє розраховувати оптимальні параметри тейк-профіт і стоп-лосс для угоди як в поточний момент часу, так і в будь-який момент часу з завантаженої вибірки в минулому. Також користувачу надається можливість розрахувати ймовірність розладнання на заданій величині інтервалу часу в майбутньому і наочно побачити функцію ймовірності такої події від обраних моменту часу і горизонту прогнозування.

1. *Lutsenko O.* Model of probabilistic assessment of trend stability at financial market / O. Lutsenko, O. Baybuz // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2013. – Vol. 6, N 3(66). – P. 50–54.
2. *Луценко О.П.* Оцінка функцій ризику розладнання процесу коливань валютних курсів з застосуванням байєсівської оцінки параметру функції умовного розподілу / О.П.Луценко, О.Г. Байбуз // The European Scientific and Practical Congress «Global scientific unity 2014», (Prague (Czech Republic), 26-27 September 2014), Prague, 2014. – С. 126 – 132.

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИХ ПРОЦЕСІВ В ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТАХ, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВІВ ТА СТИСНЕННЯ

Проблема побудови моделей термопружних процесів у тонкостінних елементах, яка дозволяє враховувати довільну геометрію, залишається актуальною як з теоретичного так і з практичного боку [1]. Одним із підходів до вирішення даних завдань є пониження вимірності моделей та побудова проєкційно-сіткових методів для визначення температурного поля, квазістатичного термопружного стану, спричиненого температурним розподілом та силовими навантаженнями в оболонках та пластинах [1].

Початково-крайова задача термопружності гнучкого тіла, один із характерних розмірів значно менший від інших і займає у просторі $\mathbb{R}^3$ обмежену область D з неперервною за Ліпшицем границею $S = \partial D$ є вихідною для побудови адекватної моделі термопружних процесів. Вважається, що на тонкостінний елемент діють масові сили $\{F_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$, поверхневі навантаження $\bar{\sigma} = \{\bar{\sigma}_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$ на $S_\sigma \subset S$, внутрішні джерела тепла $g = g(\mathbf{x}, t)$ і тепловий потік $\bar{q} = \bar{q}(\mathbf{x}, t)$ на границі $S_q \subset S$, під впливом яких виникають пружні переміщення $\mathbf{U} = \{U_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$ та приріст температури $\theta(\mathbf{x}, t)$ відносно початкової температури $\theta_0(\mathbf{x})$. Таким чином формулюється задача:

$$\rho U_i'' - \partial_k \sigma_{ki} = \rho F_i, \quad (1)$$

$$c_\varepsilon \theta' - \partial_i (\lambda_{ij} \partial_j \theta) + \theta_0 \beta_{ij} \mathcal{E}_{ij}(\mathbf{U}') = g \text{ в } D \times (0, T], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{U}, \theta) &:= \sigma_{ij}^e(\mathbf{U}) + \sigma_{ij}^v(\mathbf{U}') + \sigma_{ij}^t(\theta) \\ &= c_{ijk} \mathcal{E}_{km}(\mathbf{U}) + a_{ijk} \mathcal{E}_{km}(\mathbf{U}') - \beta_{ij} \theta, \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0, \quad \partial_t \mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{V}_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \text{ в } D, \quad (4)$$

$$\mathbf{U} = 0 \text{ на } S_u \times [0, T], \quad S_u \subset S, \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{\sigma}_i \text{ на } S_\sigma \times [0, T], \quad S_\sigma = S \setminus S_u, \quad (5)$$

$$\theta = 0 \text{ на } S_\theta \times [0, T], \quad -\lambda_{ij} n_j \partial_i \theta = \kappa \theta + \bar{q} \text{ на } S_q \times [0, T], \quad S_q = S \setminus S_\theta. \quad (6)$$

Тут $\partial_i v := \partial v / \partial x_i$, $v' := \partial v / \partial t$, $v'' := \partial^2 v / \partial t^2$, а $\mathcal{E}_{ij}$ — компоненти тензора деформацій Гріна, які розглядаються у такому наближенні:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{11} &= E_{11} + \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_3^2), & \mathcal{E}_{12} &= E_{12} - \omega_1 \omega_2, \\
\mathcal{E}_{22} &= E_{22} + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_3^2), & \mathcal{E}_{13} &= E_{13} - \omega_1 \omega_3, \\
\mathcal{E}_{33} &= E_{33} + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2), & \mathcal{E}_{23} &= E_{23} - \omega_2 \omega_3,
\end{aligned} \tag{7}$$

і визначають деформації елемента гнучкого тіла через видовження E_{ii} , зсуви E_{ij} ($i \neq j$) та кути поворотів ω_k ,

$$E_{ij}(\mathbf{U}) := \frac{1}{2}(\partial_i U_j + \partial_j U_i), \quad \omega_k(\mathbf{U}) := \frac{1}{2}(\partial_i U_j - \partial_j U_i), \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Властивості матеріалу пружного тіла характеризуються густиною маси $\rho = \rho(\mathbf{x})$, коефіцієнтом питомої теплоємності при сталих деформаціях $c_\varepsilon = c_\varepsilon(\mathbf{x})$; теплові та механічні характеристики описуються такими коефіцієнтами: температурних напружень $\beta_{ij} = c_{ijkm} \alpha_{km}$, пружності c_{ijkm} , та в'язкості a_{ijkm} , теплового розширення α_{km} , які володіють такими властивостями симетрії та еліптичності

$$\begin{cases} c_{ijkm} = c_{jikm} = c_{kmij}, & c_{ijkm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{km} \geq c_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad c_0 = \text{const} > 0, \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in \mathbb{R}, \\ a_{ijkm} = a_{jikm} = a_{kmij}, & a_{ijkm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{km} \geq a_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad a_0 = \text{const} > 0, \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in \mathbb{R}; \\ \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, & \alpha_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha_0, \quad \alpha_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_i \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{9}$$

Зробивши декомпозицію системи фундаментальних рівнянь, приймаючи $\beta_{ij} = 0$ у рівнянні (2) та нехтуючи в рівняннях руху (1) інерційними членами $\rho U''$, отримаємо послідовно розв'язувані задачі: теплопровідності незалежної від напруженого стану тіла та квазістатичну задачу термопружного деформування. Оскільки геометрію тонкостінних елементів зручно описувати у криволінійних координатах, тоді маємо:

$$D := \{\mathbf{r} = (\alpha, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, \alpha_3 \in (-\frac{1}{2}h, +\frac{1}{2}h)\} \equiv \Omega \times (-\frac{1}{2}h, +\frac{1}{2}h),$$

$$\partial D \equiv S := \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Sigma, \quad \Omega_\pm := \Omega \times \{\pm h/2\}, \quad \Gamma := \partial \Omega, \quad \Sigma := \Gamma \times (-h/2, h/2).$$

Розглядаючи в цій системі координат початково-крайову задачу теплопровідності візьмемо за основу її варіаційне формулювання:

$$\begin{cases} \text{дано } \theta_0 \in Z := L^2(D); \\ \text{знайти } \theta \in L^2(0, T; G) \text{ таку, що} \\ s(\theta'(t), \xi) + \Lambda(\theta(t), \xi) = \langle r(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ s(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in G := H^1(D). \end{cases} \tag{10}$$

Зважаючи на малість товщини h , вибираються підпростори апроксимацій

$$G_{n-1} := \left\{ \xi \in G = H^1(D) : \xi(\mathbf{a}, \alpha_3) = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{a}) \alpha_3^{i-1}, \xi_i \in H^1(\Omega) \right\}, \quad n=1,2,\dots \quad (11)$$

і наближені розподіли температури шукають у вигляді розвинень з відокремленою змінною α_3

$$\theta_n(\mathbf{a}, \alpha_3, t) = \sum_{i=1}^n \theta_i(\mathbf{a}, t) \alpha_3^{i-1} \in G_{n-1}. \quad (12)$$

Тоді процедура Гальоркіна приводить (10) до такої частково дискретизованої варіаційної задачі

$$\begin{cases} \text{дано } \boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbf{Z} := [L^2(\Omega)]^n; \text{ знайти } \boldsymbol{\theta} = \{\theta_i\}_{i=1}^n \in L^2(0, T; \mathbf{G}) \text{ таке, що} \\ \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}'(t), \boldsymbol{\xi}) + \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\xi}) = \langle \mathcal{R}(t), \boldsymbol{\xi} \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{G} := [H^1(\Omega)]^n, \end{cases} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) &:= \sum_{i,j=1}^n \iint_{\Omega} \phi^{i+j-2} c_v \rho \theta_i \xi_j A_1 A_2 d\mathbf{a} \quad \forall \boldsymbol{\theta} = \{\theta_i\}_{i=1}^n, \quad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_j\}_{j=1}^n \in \mathbf{G}, \\ \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) &:= \sum_{i,j=1}^n \left(\iint_{\Omega} \left\{ \lambda \left[\sum_{k=1}^2 \frac{\chi_k^{i+j-2}}{A_k^2} \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_k} + (ij - i - j + 1) \phi^{i+j-4} \theta_i \xi_j \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\kappa^+ + \kappa^-) \phi^{i+j-2} \theta_i \xi_j \right\} A_1 A_2 d\mathbf{a} + \int_{\Gamma} \kappa \phi^{i+j-2} \theta_i \xi_j d\gamma \right) \quad \forall \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi} \in G_{n-1}, \\ \langle \mathcal{R}, \boldsymbol{\xi} \rangle &:= \sum_{i,j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \phi^{i+j-2} g_i \xi_j A_1 A_2 d\mathbf{a} + \int_{\Gamma} \phi^{i+j-2} q_i \xi_j d\gamma \right] + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (q^+ + q^-) \phi^{i-1} \xi_i A_1 A_2 d\mathbf{a} \\ &\quad \forall \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{G}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^n(\boldsymbol{\alpha}) &:= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3^n (1 + \alpha_3 k_1(\boldsymbol{\alpha})) (1 + \alpha_3 k_2(\boldsymbol{\alpha})) d\alpha_3, \\ \chi_m^n(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_3)^n \frac{[1 + \alpha_3 k_1(\boldsymbol{\alpha})][1 + \alpha_3 k_2(\boldsymbol{\alpha})]}{[1 + \alpha_3 k_m(\boldsymbol{\alpha})]^2} d\alpha_3, \quad m=1,2. \end{aligned}$$

Тут κ^+, κ^- – коефіцієнти теплообміну на відповідних поверхнях Ω_+, Ω_- , q^+, q^- – теплові потоки, відповідно.

Доведено теорему про коректність частково дискретизованої задачі теплопровідності (13). У випадку стаціонарного розподілу температури доведена оптимальність апроксимації Гальоркіна θ_n у вибраному просторі апроксимацій G_{n-1} . Із врахування інтерполяційних

властивостей просторів G_{n-1} знайдено апіорні оцінки похибки часткової дискретизації.

Для чисельного розв'язування задачі (13) вжито проекційно-сітковий метод, який містить дискретизацію за просторовими змінними МСЕ та покрокову дискретизацію в часі, які приводять до однокрокової рекурентної схеми, яка за такого вибору її параметра $\pi \in [1/2, 1]$ є безумовно стійкою відносно вибору кроку інтегрування Δt , а з $\pi = 1/2$ має другий порядок збіжності.

ОРС програмно реалізована з використанням квадратичних серендипових апроксимацій МСЕ на поділах з чотирикутними елементами. За її допомогою проаналізовано розв'язки ряду тестових задач теплопровідності; зокрема, на прикладі частково дискретизації з лінійним та квадратичним наближенням розподілу температури наближеної пластини, вибір квадратичного способу пониження вимірності приводить до кращих апроксимацій значень температури в околі лицьових поверхонь пластини (рис. 1).

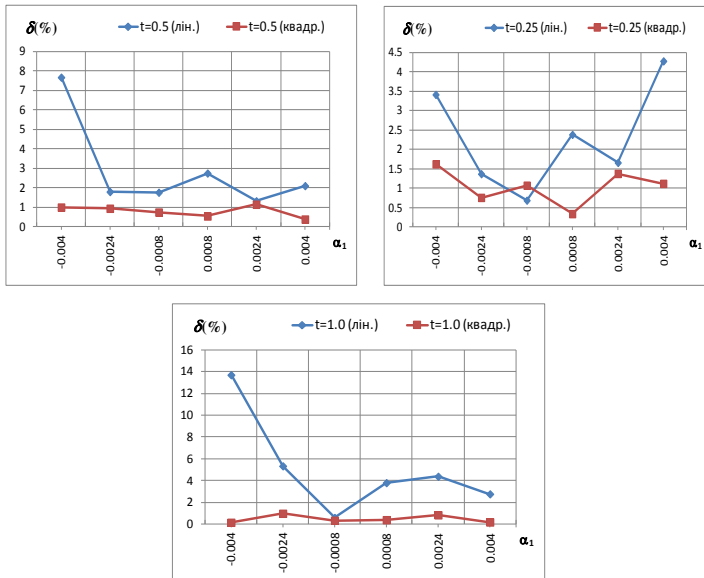


Рисунок 1 – Відносна похибка $\delta = \frac{\theta - \tilde{\theta}}{\theta} \cdot 100\%$ температури у моменти часу: а) $t = 0.25$ c, б) $t = 0.5$ c, в) $t = 1.0$ c.

1. Hetnarski R.B. Encyclopedia of Thermal Stresses / R.B.Hetnarski, ed.-Dortrecht: Springer, 2014.

УДК 532.526

Вал. Мамчук, К. Гомон***

(*Національний авіаційний університет,

**Львівський національний університет імені Івана Франка)

ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ПІДЙОМНОЇ СИЛИ КРИЛА ЛІТАКА ПІД ЧАС ОБТІКАННЯ ЙОГО ПЛОСКИМ НЕСТИСЛИВИМ ПОТОКОМ З ВИКОРИСТАННЯМ ЧИСЕЛЬНО- КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Процес чисельної побудови загальної системи криволінійних координат, зв'язаної з тілом, з використанням методу чисельно-конформних відображень двозв'язних областей довільної геометричної форми на канонічний прямокутник, наведено у праці [1]. Як складники, що породжують таке відображення, уперше запропоновано розв'язки системи двох рівнянь стосовно невідомих функцій, що задовольняють умови Д'Аламбера-Ейлера. У праці [2] розроблено методику побудови поля швидкостей профілів крила на малих кутах атаки з використанням зазначеного методу. Чисельне моделювання процесу обтікання проводилося на малих кутах атаки, оскільки при цих значеннях спостерігається безвідривне обтікання, яке надає можливості для використання такої моделі фізичного процесу.

Отримавши поле розподілу швидкості на крилі літака, віднесені значення тиску у точках задання профілю знаходимо аналітично так:

$$\bar{p} = \sqrt{1 - \bar{v}^2}.$$

У цій праці пропонується методика чисельного розрахунку коефіцієнта підйомної сили крила літака з використанням зазначених методу відображення фізичної площини на перетворену та відповідного типу обтікання.

Знаючи поле розподілу тиску на криловому профілі, коефіцієнт підйомної сили C_y знаходимо у результаті чисельного інтегрування, а саме:

$$C_y = \int_0^1 (\bar{p}_n - \bar{p}_e) dx, \quad (1)$$

де $\bar{p}_n$ – значення тиску у точках нижньої частини контуру, $\bar{p}_e$ – значення тиску у відповідних точках верхньої частини контуру. Межі інтегрування визначаються у залежності від розміщення внутрішнього контуру двозв'язної області у прямокутній декартовій системі координат. У (1) межі інтегрування визначені так, бо лінійні розміри віднесені до

довжини хорди профілю крила, передня крайка співпадає з початком координат, а задня – розміщена у точці (1;0).

Якщо кути атаки α малі, то коефіцієнт підйомної сили C_y та величина α перебувають у функціональній залежності $C_y = f(\alpha)$, де $f(\alpha)$ – прямо-пропорційна функція і, обчисливши значення C_y для одного з кутів α , будуюмо у системі координат (αOC_y) пряму указанної функціональної залежності, за якою графічно визначаємо значення C_y для інших кутів атаки.

Створено універсальний програмний комплекс для автоматичної побудови системи криволінійних координат у фізичній площині та одночасного розрахунку аеродинамічних характеристик крилових профілів у перетвореній площині на параметричному прямокутнику.

Отримані у процесі чисельних розрахунків результати добре співставляються з експериментальними даними, взятими з [3], та здобутими графічним способом.

1. Мамчук Вал.І. До побудови системи криволінійних координат з використанням чисельно-конформних відображень // Прикладна гідромеханіка. – 2000. – Т. 2. (74). – С. 110-114.
2. Мамчук Вал. І. Побудова поля швидкостей крилових профілів на малих кутах атаки з використанням числово-конформних відображень // Тези доп. XIV Всеукраїн. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики." – Львів, 2007.– С.99-100.
3. Атлас аэродинамических профилей. – М.: Оборонгиз, 1941. – 362 с.

УДК 519.633.2

Н. В. Медвідь, П. М. Мартинюк(Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне, Україна)**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ ЧЕРЕЗ
ГРУНТОВУ ГРЕБЛЮ З ВОДОВОДОМ ТА ЗОНОЮ ВИМИВУ В
УМОВАХ ВПЛИВУ ТЕХНОГЕННИХ ФАКТОРІВ**

Математична модель тривимірної задачі фільтрації через тіло ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву з врахуванням впливу тепло-солеперенесення містить наступні рівняння [1,2]:

$$\operatorname{div}(\mathbf{K}(c, T) \nabla h) - \operatorname{div}(\mathbf{K}_c \nabla c) - \operatorname{div}(\mathbf{K}_T \nabla T) = \beta \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}_T^{(c)} \nabla T) + \operatorname{div}(\mathbf{D}_c \nabla c) - (\mathbf{u}, \nabla c) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(c, T) \nabla h + \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

які доповнюються граничними та початковими умовами для відповідних функцій. Значення коефіцієнтів вищенаведених рівнянь залежать від області Ω_1 або Ω_2 , в яку попадає точка $\mathbf{X}$.

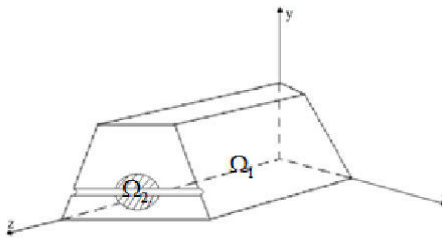


Рис. 1. Тіло ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву

Для відшукування наближеного розв'язку відповідної крайової задачі використано метод скінченних елементів (МСЕ). Задача розв'язана в середовищі FreeFem++[3]. FreeFem++ являє собою безкоштовне програмне забезпечення для розв'язування крайових задач МСЕ. Проведено ряд чисельних експериментів. Досліджено вплив зони вимиву, водоводу та тепло-солеперенесення на розподіл напорів в греблі. Отримані значення температури, концентрації солей та напорів на момент часу 360 діб, наприклад, відображені на графіках 2-4.

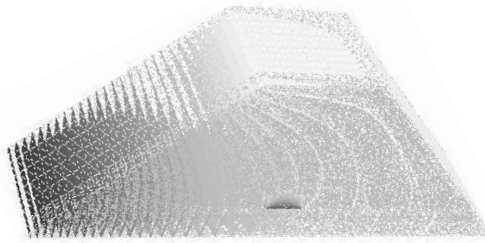


Рис.2. Розподіл надлишкових напорів (в тілі греблі $\min=0.00024782$, $\max=30$; в зоні вимиву $\min=6$, $\max=27.2898$)

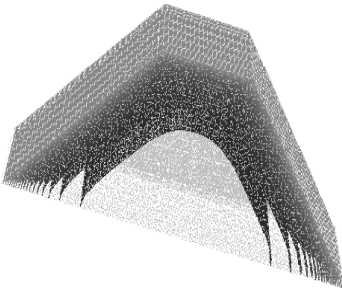


Рис.3. Розподіл температури (в тілі греблі $\min=4.0073$, $\max=30$; в зоні вимиву $\min=4.00766$, $\max=4.07633$)

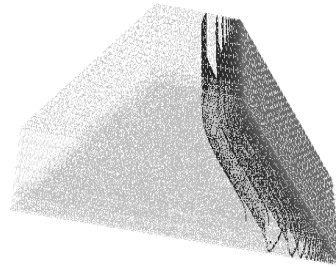


Рис.4. Розподіл концентрації солей (в тілі греблі $\min=7.25354$, $\max=160$; в зоні вимиву $\min=8.00668$, $\max=8.33077$)

1. *Власюк А.П.* Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій/ А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277с.
2. *Медвідь Н.В.* Математичне моделювання впливу на надлишкові напори наявності зони вимиву в ґрунтовій греблі з водоводом /Н.В. Медвідь, П.М. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – Випуск 10. – С.101-112.
3. FreeFem++. Third Edition / F. Hecht, S. Auliac, O. Pironneau, J. Morice, A. Le Hyaric, K.Ohtsuka. – Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris. – 378 p (режим доступу: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>).

УДК 627.324.2/3:532.72

О.Р. Мічута, П.М. Мартинюк, В.А. Герус(Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне)**ПРО МАТЕМАТИЧНУ МОДЕЛЬ ЗАГАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ
ВПЛИВУ АДСОРБЦІЇ (ДЕСОРБЦІЇ) НА ПРОЦЕСИ
КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТІВ**

Математична модель задачі консолідації ґрунту в області Ω під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження з урахуванням впливу адсорбції (десорбції) та неізотермічних умов на основі робіт [1, 2] в загальноприйнятих позначеннях може бути описана наступною крайовою задачею:

$$\mu_e \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, c, T) \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D(x, c, T) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) - u \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, c, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c \rho u \frac{\partial T}{\partial x} = c T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

$$u = ev - k(x, c, T) \frac{\partial h}{\partial x} + v(x, c, T) \frac{\partial c}{\partial x} + \mu(x, c, T) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma_1 (c\sigma - \alpha N), \quad (5)$$

$$h(0, t) = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (6)$$

$$c(0, t) = C_m, \quad \left(D(x, c, T) \frac{\partial c}{\partial x} + D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0 \quad (7)$$

$$T(0, t) = T_1(t), \quad T(l, t) = T_2(t), \quad (8)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x). \quad (9)$$

Чисельний розв'язок вищенаведеної нелінійної крайової задачі знайдено методом скінченних різниць. При проведенні і аналізі чисельних результатів було враховано ряд експериментальних та теоретичних залежностей. Зокрема, в таблиці наведено врахована залежність концентрації граничного насичення солі C_m від температури.

Таблиця. Залежність $C_m(T)$

$T, ^\circ C$	0...19	20...24	25...29	30...39	40...50
$C_m(T), \text{г/л}$	357	359	360	361	364

Прийнята наступна залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину [3]:

$$k(c, T) = a_5 \cdot \left(\frac{c}{C_m(T)} \right)^5 + a_4 \cdot \left(\frac{c}{C_m(T)} \right)^4 + a_3 \cdot \left(\frac{c}{C_m(T)} \right)^3 + a_2 \cdot \left(\frac{c}{C_m(T)} \right)^2 + a_1 \cdot \left(\frac{c}{C_m(T)} \right) + a_0,$$

де $a_5 = 0,042557151$, $a_4 = -0,12857957$, $a_3 = 0,140291508$,
 $a_2 = -0,0643274$, $a_1 = 9,345668647 \cdot 10^{-3}$, $a_0 = 0,0010339$.

Кінетичний коефіцієнт α визначається за формулою (див. роботи Верігіна М.М.):

$$\alpha(T) = \frac{C_m(T) n_0}{N_{\max}}.$$

Окрім цього враховано залежність коефіцієнта дифузії речовин від швидкості фільтрації у формі:

$$D(x, c, T) = D_0 + \alpha_0 |u|,$$

де α_0 - параметр, що відображає залежність коефіцієнта конвективної дифузії від швидкості фільтрації, D_0 - початкове значення коефіцієнта конвективної дифузії.

Виявлено, що врахування процесів адсорбції (десорбції) сповільнює розсіювання надлишкових напорів, а, отже, може змінити прогнозні розрахунки просідання ґрунту

1. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах / А.П.Власюк, П.М.Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
2. Мичуга О. Р. Математическое моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неізотермических условиях / О. Р. Мичуга, А. П. Власюк, П. Н. Мартинюк // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 2. – С. 3-18.
3. Мичуга О. Р. Математичне моделювання фільтраційної консолідації засолених ґрунтів при залежності концентрації граничного насичення від температури / О. Р. Мичуга, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник НУВГП. Сер. технічні науки. – 2010. – Вип. 4 (52). – С. 194-201.

УДК 519.8

О.О. Михальова, Л.С. Коряшкіна***

(* Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
 ** Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет»)

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО БАГАТОКРАТНОГО КУЛЬОВОГО ПОКРИТТЯ ТА МУЛЬТИПЛЕКСНЕ РОЗБИТТЯ МНОЖИН

Про актуальність досліджень і методів розв'язання неперервних задач кульового покриття свідчить, наприклад, перелік практичних їх застосувань, наведений в [1]. Математично задача про мінімальне k -кратне кульове покриття обмеженої множини $\Omega \subset E_n$ записується у такий спосіб: потрібно визначити величину радіуса оптимального покриття

$$R(\tau_*^N) = \inf_{\tau^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i)$$

та вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, на якому досягається значення $R(\tau_*^N)$ за умов виконання для кожної точки $x \in \Omega$ включення

$$x \in \bigcap_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, R), \quad k \leq l \leq N, \quad i_j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

де $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n : c(x, \tau_i) \leq R\}$; $c(x, \tau_i)$ – деяка квазіметрика.

В [2,3] описані конструктивні алгоритми розв'язання задач багатократного покриття, які засновані на дискретизації області, що покривається, та застосуванні g -алгоритму Шора для пошуку мінімуму недиференційовної функції $R(\tau^N)$. Особливістю реалізації одного з алгоритмів є той факт, що для обчислення компонент узагальненого градієнта цільової функції використовується діаграма Вороного k -го порядку, генерована вектором $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$.

Виявляється, що діаграми Вороного вищих порядків, як звичайні, так і узагальнені, можна отримувати, розв'язуючи так звані неперервні лінійні задачі оптимального мультиплексного розбиття множин з відповідними критеріями оптимальності розбиття і, при потребі, додатковими умовами на «потужність» центрів або області їх розміщення [3].

Далі наведемо математичну модель задачі про оптимальне мультиплексне розбиття множини $\Omega \subset E_n$ із заданими центрами, розв'язком якої є звичайна діаграма Вороного k -го порядку.

Задача А1- k . Неперервна лінійна задача оптимального розбиття k -го порядку множини $\Omega \subset E_n$ на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_k}$, що не перетинаються (серед яких можуть бути порожні), з фіксованими

координатами центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ без обмежень. Нехай $\Omega \subset E_n$ – обмежена, вимірنا за Лебегом замкнена множина; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$, $i = \overline{1, N}$, – задані точки; $N = \{1, 2, \dots, N\}$ – множина всіх індексів заданих центрів; $M(N, k)$ – множина всіх k -елементних підмножин множини N , $|M(N, k)| = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$, $l = \overline{1, L}$, – елементи множини $M(N, k)$. З кожним елементом σ_l множини $M(N, k)$ будемо асоціювати деяку підмножину Ω_{σ_l} точок із Ω , $l = \overline{1, L}$, з якою, у свою чергу, будемо пов'язувати набір центрів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$.

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$ з $\Omega \subset E_n$ називається **розбиттям k -го порядку** множини Ω на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються, якщо $\bigcup_{i=1}^L \Omega_{\sigma_i} = \Omega$, $\text{mes}(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}) = 0$, $\sigma_i \in M(N, k)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, L}$, де $\text{mes}(\cdot)$ – міра Лебега. Нехай $\Sigma_{\Omega}^{N, k}$ – клас всіх можливих **розбиттів k -го порядку** множини Ω . Потрібно

$$F(\{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}) \rightarrow \min_{\{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\} \in \Sigma_{\Omega}^{N, k}}, \quad F(\{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}) = \sum_{l=1}^L \int \sum_{i \in \sigma_l} c(x, \tau_i) dx,$$

де $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$, координати $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центра τ_i , $i = \overline{1, N}$, фіксовані.

Розбиття k -го порядку $\bar{\omega}^* = \{\Omega_{\sigma_1}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\}$, що забезпечує мінімальне значення функціоналу F , і є оптимальним розв'язком задачі **A1-k**.

Якщо в задачі **A1-k** координати центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ невідомі заздалегідь, та їх необхідно визначити поряд з розбиттям k -го порядку $\bar{\omega}^* = \{\Omega_{\sigma_1}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\}$ множини Ω , то отримаємо задачу оптимального мультиплексного розбиття множини з розміщенням центрів [3].

Отже, на кожній ітерації субградієнтного методу розв'язання дискретизованого аналогу задачі про оптимальне багатократне кульове покриття можна застосовувати алгоритми оптимального мультиплексного розбиття множин при фіксованих центрах.

На Рис. 1 та Рис. 2 відповідно представлено дуплексне розбиття квадрату $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ з фіксованими та оптимально розташованими тринадцятьма центрами із зазначенням радіусу відповідного двократного покриття; на Рис. 3 – мінімальне двократне покриття квадрату [4].

Обчислений радіус двократного покриття для наведених прикладів дорівнює: $R=0.4706$ (Рис. 1), $R=0.2961$ (Рис. 2), $R=0.2911$ (Рис. 3).

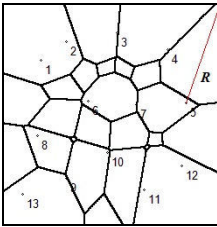


Рисунок 1. –
Дуплексне розбиття
 Ω з фіксованими
центрами.

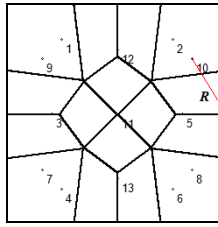


Рисунок 2. –
Дуплексне розбиття
 Ω з оптимальним
розміщенням центрів.

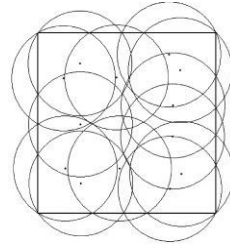


Рисунок 3. –
Мінімальне двократне
покриття.

Подальше дослідження неперервних задач мінімального багатократного кульового покриття обмежених множин пов'язане с питаннями про схожість та відмінність їх з неперервними задачами оптимального розбиття множин з розміщенням центрів. Наприклад, цікавим є випадки, коли оптимальне розташування центрів в обох задачах однакове або відрізняється лише їх нумерацією. Постають питання: як має бути записаний цільовий функціонал задачі про оптимальне мультиплексне розбиття множини з розміщенням центрів або якими мають бути множина, що розбивається, та метрика на ній, щоб описана вище ситуація мала місце?

1. Михалева А.А. Непрерывные задачи оптимального шарового покрытия и их практические приложения. // Тези доповідей III Міжнародного форуму студентів, аспірантів і молодих учених / ред. кол. М.В. Поляков та ін. – Д.: ДНУ, 2015. – С. 504-505.
2. Киселева Е.М. Непрерывная задача многократного шарового покрытия с ограничениями и метод ее решения / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, А.А. Михалева // Системні технології. Дніпропетровськ. – 2015. – №1. – С. 165-179.
3. Киселева Е.М. Конструктивные алгоритмы решения непрерывных задач многократного покрытия / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, А.А. Михалева // Системні технології. Дніпропетровськ. – 2014. – Вып. 4 (93). – С. 3-16.
4. Коряшкіна Л.С. Розширення одного класу нескінченновимірних оптимізаційних задач / Л.С. Коряшкіна // Вісн. Черкаського ун-ту. Сер. Прикл. матем. Інф. – 2015. – № 18 (351). – С. 3-15.
5. Галиев Ш.И. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами / Ш. И. Галиев, М. А. Карпова // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 2010. – Т. 50, № 4. – С. 757–769.

**ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ
ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ ТРИКУТНОЇ СИСТЕМИ ЕЛІПТИЧНИХ
РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ
З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЙ ГРІНА**

Застосування різноманітних підходів щодо врахування залежності від часової змінної в еволюційних задачах приводить до необхідності дослідження та чисельного розв'язування крайових задач для нескінченних систем еліптичних рівнянь [1]. При цьому, побудова інтегрального зображення розв'язків досліджуваних задач [2] зумовлює універсальність отриманого методу граничних елементів щодо областей, в яких шукаємо розв'язок. Зокрема, такий підхід застосовний також у випадку областей із включенням.

Нехай $\Omega_0 \in \mathbb{R}^3$ – деяка область, яка має ліпшицеву межу Γ_0 , і $\Omega_1 \in \Omega_0$ – довільна область-включення, яка обмежена ліпшицевою поверхнею Γ_1 , причому $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. В області $\Omega := \Omega_0 \setminus \overline{\Omega_1}$ розглянемо задачу Діріхле

$$\mathbf{G}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \gamma_{0,i}\mathbf{u} = \mathbf{h}_i \text{ на } \Gamma_i, \quad (1)$$

де $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^\infty$ – нескінченна послідовність невідомих функцій, $\mathbf{G}$ – матричний оператор, який задає нескінченну трикутну систему еліптичних рівнянь (див. [2]), $\gamma_{0,i}$ – оператор сліду послідовності $\mathbf{u}$ на відповідній поверхні Γ_i , $i = 0, 1$, $\mathbf{h}_i \in (H^{1/2}(\Gamma_i))^\infty$ – задані на Γ_i послідовності граничних значень. У праці [3] було запропоновано інтегральне подання узагальненого розв'язку задачі (1) з використанням відповідних функцій Гріна. Тут розглянемо особливості реалізації методу граничних елементів (МГЕ) для чисельного розв'язування задачі (1), який можна було б трактувати як модифікацію МГЕ для загального випадку внутрішніх задач Діріхле для оператора $\mathbf{G}$.

Функцію Гріна задачі Діріхле для оператора $\mathbf{G}$ в області Ω_0 називаємо розв'язок $\mathbf{N}(x, y) = (N_0(x, y), N_1(x, y), \dots)^T$, $(x, y) \in \overline{\Omega_0} \times \Omega_0$, рівняння $\mathbf{G}\mathbf{u} = \bar{\delta}_y$ в $(\mathcal{D}(\Omega_0))^\infty$, який перетворюється в нуль на $\Gamma_0 \times \Omega_0$, $\bar{\delta}_y := (\delta(\cdot - y), 0, 0, \dots)^T$, $\delta(\cdot - y)$ - функція Дірака.

Функцію Гріна можна побудувати таким чином [3]:

$$\mathbf{N}(x, y) := \mathbf{E}(x - y) + \mathbf{q}(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega_0} \times \Omega_0, \quad (2)$$

де $\mathbf{q}$ – такий розв’язок рівняння $\mathbf{Gu} = 0$ в Ω_0 , що

$$\mathbf{q}(x, y) = -\mathbf{E}(x - y) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Gamma_0 \times \Omega_0.$$

Для послідовностей $\lambda_i \in (H^{1/2}(\Gamma_i))^\infty$ ($i = 0, 1$) та $\mu_i \in (H^{-1/2}(\Gamma_i))^\infty$ розглядаємо такі потенціали

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\mu_1(x) &:= \mu_1(\cdot) \underset{\Gamma_1}{\circ} \mathbf{N}(x, \cdot), \quad \mathbf{W}\lambda_1(x) := \gamma_{1,1} \mathbf{N}(x, \cdot) \underset{\Gamma_1}{\circ} \lambda_1(\cdot), \\ \mathbf{W}^*\lambda_0(x) &:= \gamma_{1,0} \mathbf{N}(x, \cdot) \underset{\Gamma_0}{\circ} \lambda_0(\cdot), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\gamma_{1,i}$ оператори нормальної похідної на Γ_i ($i = 0, 1$), а операція $\underset{\Gamma_i}{\circ}$ позначає q -згортку послідовностей [2].

Таким чином, згідно з теоремою 7 [3], ми приходимо до інтегрального подання розв’язка задачі (1):

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{V}\mu_1(x) - \mathbf{W}h_1(x) - \mathbf{W}^*h_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

де невідомою є лише послідовність μ_1 . Для її відшукування підставляємо (4) у крайову умову на межі Γ_1 та, врахувавши стрибок потенціалу подвійного шару, приходимо до такої системи граничних інтегральних рівнянь (ГІР) для невідомої послідовності μ_1

$$\mathbf{V}\mu_1 = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K} \right) h_1 + \mathbf{W}^*h_0 \text{ в } (H^{1/2}(\Gamma_1))^\infty. \quad (5)$$

Зауважимо, що завдяки використанню операції q -згортки, (5) є послідовністю ГІР першого роду, інтегральний оператор кожного з яких є однаковим, а права частина рівняння містить розв’язки, знайдені на попередніх кроках

$$\mathbf{V}_0\mu_k = \frac{1}{2}h_{1,k} + \sum_{i=0}^k \mathbf{K}_{k-i}h_{1,i} + \sum_{i=0}^k \mathbf{W}_{k-i}^*h_{0,i} - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{V}_{k-i}\mu_i \text{ в } H^{1/2}(\Gamma_1), \quad k \in N_0. \quad (6)$$

Розглянемо оператор $\mathbf{V}_0$. Якщо функцію Гріна подати у вигляді (2), то цей оператор можна переписати у вигляді суми $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_*$, де $(\mathbf{V}_*\mu)(x) := \langle \mu, q(x, \cdot) \rangle_{\Gamma_1}$, $x \in \Gamma_1$, а дію оператора $\mathbf{V}_0 : H^{-1/2}(\Gamma_1) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$ ґрунтовно досліджено в [2]. Чисельні розв’язки рівнянь послідовності (6) шукаємо за допомогою методу граничних елементів. Знайшовши при цьому для послідовних значень k наближені значення густин μ_k^h , можемо побудувати для довільного $x \in \Omega$ k -ий компонент чисельного розв’язку задачі (1)

$$u_k^h(x) = (\mathbf{V}\mu^h)_k(x) - (\mathbf{W}h_1)_k(x) - (\mathbf{W}^*h_0)_k(x).$$

Як приклад розглядаємо випадок, коли $\Omega_0 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z > z^*\}$ – півпростір, де z^* – заданий параметр, а $\Omega_1 := (-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)$ – куб з межею Γ_1 . У таблиці 1 подано абсолютну δ^h та відносну ε^h (%) похибки, а також очікуваний порядок збіжності чисельного розв'язку першого рівняння послідовності (6) для різних кількостей граничних елементів $\overline{M}$ у розбитті поверхні Γ_1 .

Таблиця 1. – Похибка чисельного розв'язку першого рівняння послідовності ГІР (4)

$\overline{M}$	δ^h	<i>eos</i>	ε^h (%)
300	0.000997		0.61
588	0.000503	2.03	0.30
768	0.000384	2.02	0.23
972	0.000303	2.02	0.18
1200	0.000245	2.02	0.15
1728	0.000170	2.01	0.10
1800	0.000108	2.01	0.07

Отже, якщо для досліджуваної крайової задачі функція Гріна відома та має простий аналітичний вигляд, то її можна використати для побудови інтегрального зображення розв'язку даної задачі і розглядати реалізацію МГЕ як модифікацію цього методу, розробленого для внутрішніх задач. Такий підхід, зокрема, дає змогу ефективно знаходити чисельні розв'язки зазначених задач у необмежених областях (півпросторі, шарі, тілесному куті), які мають довільні включення з ліпшицевими межами.

1. *Chapko R.* On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations / R. Chapko, R. Kress // In Agarwal, O'Regan, eds. *Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications*. Series in Mathematical Analysis and Applications. – Amsterdam: Cordon and Breach Science Publishers, 2000. – Vol.2. – P. 55–69.
2. *Муzychuk Yu.A.* On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Yu.A. Muzychuk, R.S. Chapko // *Matematychni Studii*. – 2012. – 38. – P. 12–34.
3. *Муzychuk Ю.* Про метод граничних інтегральних рівнянь розв'язування крайових задач для систем еліптичних рівнянь спеціального вигляду у частково-необмежених областях / Ю. Муzychuk, Р. Хапко // *Доповіді НАН України*. – 2012. – Вип. 11. – С. 20–27.

УДК 537.874+517.958

З.Т. Назарчук*, Р.О. Гринів**, А.Т. Синявський*

(* Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України,

** Інститут прикладних проблем механіки та математики
ім. Я.С.Підстригача, НАН України)

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ РОЗСПОВАННЯ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТОЧОК ГРАНИЦІ РОЗСПОВАЧІВ

Розглянуто двовимірну обернену задачу (рис. 1), яку сформульовано для випадку розсіювання плоских монохроматичних електромагнітних хвиль на циліндричній неоднорідності середовища, в якій функція діелектричної проникності $\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon(x_1, x_2)$ та провідності $\sigma(x_1, x_2, x_3) = \sigma(x_1, x_2)$ залежать лише від двох координат. Вважаємо, що такі функції можуть бути довільними, мають розрив на границі розсіювача ∂D і прямують до постійних значень ε_0 та $\sigma = 0$ на безмежності.

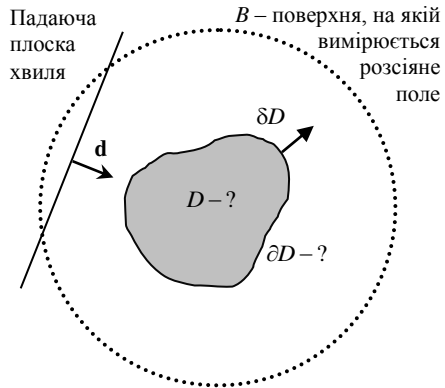


Рисунок 1 - Формулювання двовимірної оберненої задачі розсіювання

Якщо падаюча плоска хвиля E^i має лише складову вектора напруженості, що співпадає з віссю середовища $E^i(\mathbf{x}) = E_3^i(\mathbf{x}) = \exp(ik(\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}))$, то задача зводиться до скалярної. Розв'язок прямої задачі розсіювання у вигляді суми падаючої та розсіяної хвилі $E_3 = E^i + E_3^s$ задовольняє рівняння Максвелла, що приведене до вигляду

$$\Delta E_3 + k^2 n(x_1, x_2, 0) E_3 = 0, \quad (1)$$

де $n = \varepsilon(\mathbf{x})/\varepsilon_0$ – функція коефіцієнта заломлення, яка у втратному середовищі є комплексною величиною; $\mathbf{d} \in \mathbf{S}^1$ – напрям падіння плоскої

хвилі на розсіювач. Крім того, на розв'язок накладається умова випромінювання в безмежності $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\partial E_3^s / \partial r - ik E_3^s \right) = 0$, $r = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

У частковому випадку, коли розсіювач D є ідеально провідним $\sigma \rightarrow \infty$, розв'язок рівняння (1) задовольняє умову $E_3(\mathbf{x}) = 0$ для $\mathbf{x} \in \partial D$ і його шукають в області $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$.

Асимптотику розв'язків рівняння (1) можна подати виразом:

$$E_3^s(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ikr)}{r} E_3^\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (2)$$

де E_3^∞ – діаграма розсіювання для складової E_3 і $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ – напрям спостереження.

Обернену задачу формулюють [1] відносно параметрів розсіювача для відомої діаграми розсіювання $E_3^\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$. Для розсіювачів, електричні параметри яких істотно відрізняються від параметрів середовища розповсюдження, обернену задачу розсіювання трактують як задачу знаходження границі розсіювача ∂D за відомою діаграмою розсіювання $E_3^\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$. Якщо функцію $E_3^\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$ задано для всіх кутів падіння $\mathbf{d} \in \mathbf{S}^1$, для всіх кутів спостереження $\hat{\mathbf{x}}$ і на фіксованій частоті, що відповідає хвильовому числу $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, то обернена задача розсіювання є перевизначеною. Методу розв'язку такої задачі, який точно дозволяє знайти границю, не існує, на відміну від одновимірних обернених задач. Крім того, актуальним є побудова методу, який дає можливість знайти розв'язки оберненої задачі розсіювання для мінімально можливого об'єму вихідних даних, а саме, для випадків, коли розсіяне поле визначається в обмеженому діапазоні кутів спостереження та кутів падіння плоскої хвилі, а також для багаточастотного випадку.

За результатами аналізу запропоновано єдину стратегію розв'язання оберненої задачі розсіювання для різних вихідних даних. Така стратегія передбачає можливість математичного встановлення індикаторних функцій, що дозволяють ідентифікувати геометричне місце точок границі розсіювача для окремих випадків, де апріорно відомий тип розсіювача.

Застосування запропонованої стратегії передбачає приведення вихідних даних для оберненої задачі до загальної наближеної моделі спостереження $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in B$, що має інтегральну форму:

$$u(\mathbf{x}) = \int_S J(\mathbf{x}') G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' + v, \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

де функція $J(\mathbf{x}) \in \mathbf{D}$ всередині інтегралу належить до класу функцій $\mathbf{D}$, які досягають максимуму в точках на границі розсіювача; S — це

множина в $\mathbb{R}^2$, яка лежить всередині контуру B і функція $J(\mathbf{x})$ зникає на контурі B , υ - похибка, що є значно меншою від першої складової. Крім того, вихідних дані (3) оберненої задачі необхідно подати у вигляді множини спостережень згідно з моделлю:

$$\tilde{y}_j(\mathbf{x}) = \int_S J_j(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \upsilon_j, \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

де функції $J_j(\mathbf{x})$ повинні належати до такого ж класу $J_j(\mathbf{x}) \in \mathbf{D}$, що й функція $J(\mathbf{x})$.

Основну ідею побудови методів розв'язку обернених задач сформульовано наступним твердженням.

Твердження: Нехай вихідні дані оберненої задачі розсіювання дозволяють побудувати перетворення $P_j: u(\mathbf{r}) \mapsto \tilde{y}_j(\mathbf{r})$. Тоді розв'язок оберненої задачі розсіювання можна шукати у вигляді індикаторної функції, що прагне до максимального значення в точках на границі розсіювача і, відповідно, дає можливість зробити висновок про належність точки саплінгу $\mathbf{z}$ границі розсіювача чи середовищу.

Індикаторна функція відповідає математичному очікуванню, що усереднює квадрат скалярного добутку результату фільтрації за множиною реалізацій $j \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi(\mathbf{z}) = E \left\langle H_{smp}(\mathbf{z}, \cdot), \tilde{u} \right\rangle^2, \quad (5)$$

де E є оператором математичного очікування; $H_{smp}(\mathbf{z}, \cdot)$ — оператор лінійної фільтрації, або фільтр, який можна знайти з розв'язку задачі умовної мінімізації:

$$\begin{cases} H_{smp} = \arg \min_H E \left\langle H(\mathbf{z}, \cdot), \tilde{u} \right\rangle^2 \\ \left\langle H(\mathbf{z}, \cdot), h(\cdot, \mathbf{z}) \right\rangle = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Тут функція $h(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ є імпульсною відповіддю фільтра. Таку функцію можна оцінити з виразу:

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{z}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (7)$$

де функцію $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ задано у відповідності до моделі спостереження (4).

З метою демонстрації дієвості сформульованого підходу його застосовано до розв'язку оберненої задачі розсіювання, коли апіорно відомо, що розсіювач є ідеально провідним. Для функції діаграми розсіювання визначено оператор:

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{\mathbb{S}^1} E_{3\infty}(\hat{x}, d) g(d) ds(d), \quad \hat{x} \in \mathbf{S}^1. \quad (8)$$

Тоді відповідним чином параметризована модель (4) дозволяє знайти розв'язок задачі умовної мінімізації у вигляді індикаторної функції:

$$\varphi(\mathbf{z}) = \langle g, \Phi_{\infty}(\cdot, \mathbf{z}) \rangle^{-1}, \quad (9)$$

де функція g є регуляризованим розв'язком рівняння

$$FF^*g = \Phi_{\infty}(\cdot, \mathbf{z}). \quad (10)$$

Тут $\Phi_{\infty}(\cdot, \mathbf{x})$ – діаграма випромінювання точкового джерела, що розташоване в точці $\mathbf{x}$.

Для розв'язку оберненої задачі в кожній точці саплінгу $\mathbf{z}$ необхідно знайти регуляризований розв'язок рівняння (10) та обчислити скалярний добуток (9). Чисельні результати розв'язку оберненої задачі підтверджують можливість ідентифікації границі еліптичного розсіювача (рис. 2) при повністю відомих вихідних даних, а саме заданих значеннях розсіяного поля довкола розсіювача при всіх можливих кутах падіння плоскої хвилі.

Отриманий розв'язок відрізняється від запропонованого в [1] методу лінійного саплінгу, оскільки знайдена індикаторна функція має властивість досягати максимуму на границі, в той час як метод лінійного саплінгу базується на властивості обмеженості розв'язку основного рівняння в точках, що належать розсіювачу.

Запропонований підхід до встановлення індикаторної функції можна застосувати у випадку багаточастотних вихідних даних, а також отримати розв'язок оберненої задачі для моностатично заданих вихідних даних, де поле визначається в кожній точці для одного напрямку падаючої хвилі.

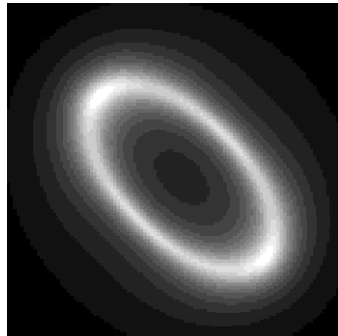
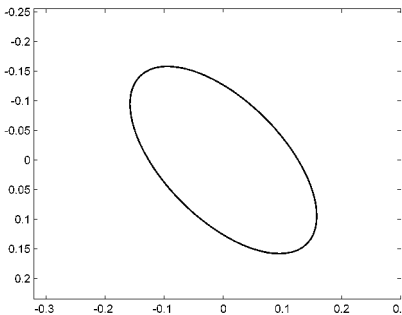


Рисунок 2. - Ідеально-провідний розсіювач та розв'язок оберненої задачі розсіювання для діаграми розсіювання, яку задано на фіксованій частоті при всіх кутах спостереження та всіх кутах падіння

1. Colton D. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory / D. Colton, R. Kress. - New York: Springer Science, 2013. – 405 p.

УДК 519.7

О.Г. Наконечный

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ГАРАНТОВАНІ ЛІНІЙНІ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНІ ОЦІНКИ АБСТРАКТНИХ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ ТА НЕЙМАНА ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ СПОСТЕРЕЖЕННЯХ

Припустимо, що на відрізьку $[0, T]$ спостерігаються реалізації випадкових процесів вигляду

$$y_k(t) = (g_k(t), \varphi) + \xi_k(t), \quad k = \overline{1, N},$$

де $g_k(t)$ – неперервні на $[0, T]$ функції зі значенням в гильбертовому просторі H , φ – розв’язок спеціальних лінійних операторних рівнянь з невідомими правими частинами, $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_N(t))$ – випадковий процес з нульовим середнім і невідомою кореляційною функцією $R(t, s)$.

Гарантована лінійна середньоквадратична оцінка вектора φ знаходиться з умови

$$\inf_{\hat{\varphi}} \sup_{\varphi, R} E |\varphi - \hat{\varphi}|^2 = \sup_{\varphi, R} E |\varphi - \hat{\varphi}|^2.$$

При умові, що оцінка $\hat{\varphi}$ лінійна за спостереженнями, а φ та R належать деяким множинам, досліджуються умови існування та єдиності таких оцінок, їх асимптотичні властивості.

Показується, що при певних обмеженнях такі оцінки можуть бути отримані як розв’язки систем лінійних операторних рівнянь.

1. Жук С.М. Оцінювання розв’язків алгебраїчно-диференціальних рівнянь в умовах невизначеності / С.М. Жук, О.Г. Наконечний. – Рівне, НУВГП, 2009. – 120 с.
2. Наконечний О.Г. Гарантированные оценки параметров линейных алгебраических уравнений при нестационарных наблюдениях / О.Г. Наконечный, С.В. Демиденко // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 1. – С. 23–31.
3. Shestopalov Y. Estimation of Parameters of Boundary Value Problems for Linear Ordinary Differential Equations with Uncertain Data / Y. Shestopalov, Y. Podlipenko, O. Nakonechniy // Advances in Pure Mathematics. – 2014. – Vol. 4, № 4. – P. 118–146.

ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАТОРНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У даній доповіді пропонується перспективний метод розв'язування нелінійних систем рівнянь, заданих над полем дійсних чисел. Однією із переваг методу є більша швидкість збіжності, ніж у класичного методу Ньютона. Питання збіжності розглянемо у наступних публікаціях, а тут зосередимо увагу на головних аспектах схеми та наведемо приклад її застосування.

Метод застосовний для довільних систем із багатьма невідомими, та для простоти викладок будемо розглядати систему із двох рівнянь із двома невідомими

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0; \\ f_2(x_1, x_2) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Нехай функції двох змінних $y_i = f_i(x_1, x_2)$ ($i=1,2$) визначені і неперервні разом з усіма своїми частинними похідними до другого порядку включно в деякому δ -околі точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$.

Припустимо, що $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ ($k=1,2,\dots$) – наближені корені системи рівнянь (1). Нехай для k -го кроку, тобто для наближень $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ рівняння системи (1) не виконуються. Тоді будемо шукати поправки h_j ($j=1,2$), при яких у результаті підстановки $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + h_j$ мають виконуватися рівняння

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(k)} + h_1, x_2^{(k)} + h_2) = 0, \\ f_2(x_1^{(k)} + h_1, x_2^{(k)} + h_2) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Відомо [1], що формулу Тейлора для функцій 2-х змінних можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} f_i(x_1^{(k)} + h_1, x_2^{(k)} + h_2) = & f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) + \frac{\partial f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} h_2 + \\ & \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2^2} h_2^2 \right) + o(h^2), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{де } h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$$

Тоді на основі системи (2) за формулою Тейлора (3) для визначення h_1, h_2 з точністю до $o(h^2)$ можемо записати наступну систему рівнянь:

$$f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) + \frac{\partial f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} h_2 + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2^2} h_2^2 \right] = 0, \quad (5)$$

У роботі [2] запропонований метод розв'язування систем алгебричних рівнянь другого порядку із багатьма невідомими. Суть даного методу полягає у використанні періодичних операторних ланцюгових дробів для обчислення розв'язків вихідної системи певних елементарних перетвореннях, що зводять вихідну систему до деякого рекурентного співвідношення. Цей підхід застосуємо і до системи (5).

Легко бачити, що (5) еквівалентна системі

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1^2} h_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 + \frac{\partial f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} \right) h_1 + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2^2} h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 + \frac{\partial f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \right) h_2 = -f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}), \quad (6)$$

де $i = 1, 2$.

Систему рівнянь (6) можна подати у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ -f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{pmatrix}.$$

Тут коефіцієнти

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1^2} h_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 + \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}; \\ a_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2^2} h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 + \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}; \\ a_{21} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1^2} h_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 + \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}; \\ a_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2^2} h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 + \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Або ж

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1^2}}{\frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1^2}} \frac{\frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2}}{\frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2}} \right) h_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2}}{\frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2}} \frac{\frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2^2}}{\frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2^2}} \right) h_2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}} \frac{\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}}{\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}} \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ -f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Нехай

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1^2}}{\frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1^2}} \frac{\frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2}}{\frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2}} \right), A_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2}}{\frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2}} \frac{\frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2^2}}{\frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2^2}} \right), \\ A_3 &= \left(\frac{\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}} \frac{\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}}{\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}} \right), b = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ -f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді (7) можна записати у більш компактному вигляді:

$$(A_1 h_1 + A_2 h_2 + A_3) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}^T = b. \quad (8)$$

Припустимо тепер матриця системи (8), $(A_1 h_1 + A_2 h_2 + A_3)$ є невинродженою, тоді

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}^T = (A_1 h_1 + A_2 h_2 + A_3)^{-1} b. \quad (9)$$

Із врахуванням рівності (9), можемо записати рекурентну формулу для обчислення наближеного розв'язку системи (5) за допомогою ОЛД:

$$\begin{pmatrix} h_1^{(j+1)} & h_2^{(j+1)} \end{pmatrix}^T = (A_1 h_1^{(j)} + A_2 h_2^{(j)} + A_3)^{-1} b, \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Запропонований вище алгоритм було реалізовано у середовищі FreeMat. Щоб продемонструвати його застосовність і ефективність розглянемо наступний приклад.

При розв'язуванні системи вигляду

$$\begin{cases} x_1^3 + 2x_1^2 x_2 - 4x_1 x_2^2 + 3x_2^3 - 3x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2 + 7x_1 - 8x_2 + 1 = 0; \\ 3x_1^3 - 4x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2 - 4x_2^3 + 3x_1^2 + 3x_1 x_2 + 2x_2^2 - 9x_1 - 6x_2 + 1 = 0; \end{cases} \quad (11)$$

будемо обчислювати наближенні розв'язки

$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + h_j$ ($j=1,2$), ($k=0,1,2,\dots$), при чому, для обчислення поправок h_1, h_2 отримаємо рекурентне співвідношення (10) із

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)} - 6 & 4x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)} + 2 \\ 18x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)} + 6 & -8x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)} + 3 \end{pmatrix}, A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)} + 2 & -8x_1^{(k)} + 18x_2^{(k)} - 2 \\ -8x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)} + 3 & -4x_1^{(k)} - 24x_2^{(k)} + 4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3x_1^{(k)2} + 4x_1^{(k)}x_2^{(k)} - 4x_2^{(k)2} - 6x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} + 7 & 2x_1^{(k)2} - 8x_1^{(k)}x_2^{(k)} + 9x_2^{(k)2} + 2x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} - 8 \\ 9x_1^{(k)2} - 8x_1^{(k)}x_2^{(k)} - 2x_2^{(k)2} + 6x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)} - 9 & -4x_1^{(k)2} - 4x_1^{(k)}x_2^{(k)} - 12x_2^{(k)2} + 3x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)} - 6 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} -x_1^{(k)3} - 2x_1^{(k)2}x_2^{(k)} + 4x_1^{(k)}x_2^{(k)2} - 3x_2^{(k)3} + 3x_1^{(k)2} - 2x_1^{(k)}x_2^{(k)} + x_2^{(k)2} - 7x_1^{(k)} + 8x_2^{(k)} - 1 \\ -3x_1^{(k)3} + 4x_1^{(k)2}x_2^{(k)} + 2x_1^{(k)}x_2^{(k)2} + 4x_2^{(k)3} - 3x_1^{(k)2} - 3x_1^{(k)}x_2^{(k)} - 2x_2^{(k)2} + 9x_1^{(k)} + 6x_2^{(k)} - 1 \end{pmatrix}.$$

За початкового наближення $x_1^{(0)} = 1.5781$, $x_2^{(0)} = -1.9431$, $h_1^{(0)} = 0$, $h_2^{(0)} = 0$ за наведеною вище схемою уже за 7 ітерацій отримано наближений розв'язок системи (11): $x_1 \approx 0.02043713$, $x_2 \approx 0.1418171$, при цьому нев'язка становила $-5.404245 \cdot 10^{-6}$. За таких же початкових наближень методом Ньютона за 19 ітерацій був отриманий наближений розв'язок $x_1 \approx 0.02043694$, $x_2 \approx 0.1418177$. І нев'язка становила $-1.218564 \cdot 10^{-5}$.

1. *Кудрявцев Д.Д.* Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и вузов. – М.: Высшая школа, 1981, т. II: 584 с.
2. *Недашковська А.М.* Ітераційний метод розв'язування системи поліноміальних рівнянь другого степеня// Журнал “Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології”. – 2015 р. – Вип. 21. – С. 150-161.

ПРО ВІРТУАЛІЗАЦІЮ КОНТРОЛЮ ЗНАЬ І ПРАКТИЧНИХ НАВИКІВ У ГАЛУЗІ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК У НАВЧАЛЬНИХ ОНЛАЙН-СИСТЕМАХ

Сучасний розвиток інформаційних технологій сприяє створенню нових засобів комунікації в різних сферах діяльності, зокрема в сфері освіти. Різноманітні платформи для онлайн-навчання (див., наприклад, [4-6]) впроваджують нові форми подачі інформації: навчальні курси у різних гіпертекстових форматах, інтерактивні статті, відео-записи подання теоретичного матеріалу у формі лекцій чи демонстрації ефективного застосування теоретичних знань на практиці та інш. У поєднанні з відповідними засобами контролю такі інформаційні системи дають змогу організовувати ефективні моделі навчальних процесів для різних дисциплін.

Разом з тим при викладанні дисциплін у галузі комп'ютерних наук, пов'язаних з розробкою програмного забезпечення, постають дві взаємопов'язані проблеми – це створення віртуального середовища [2, 7] для вироблення студентом практичних навиків у програмуванні та автоматизація контролю за правильністю програмного коду, який розробляє студент у рамках поставленого завдання. Розробки інформаційних систем [1, 2] в напрямку вирішення цих проблем дають змогу у кінцевому підсумку подолати основний недолік вивчення зазначених дисциплін – недостатній обсяг необхідної практики, який, зазвичай, є індивідуальним стосовно студентів. Зауважимо, що підходи, які пропонують системи [4, 5] у плані контролю, ґрунтуються на використанні різних форм тестів, але вони більш прийнятні для перевірки не практичних навиків, а теоретичних знань.

Для вирішення описаної вище проблеми в системі [1] було запропоновано новий тип тестів – так звані компільовані тести. Їхня головна відмінність полягає в тому, що студенту не пропонуються питання з наперед визначеними варіантами відповідей, а ставиться завдання написати цілу програму чи її фрагмент, правильність якого перевіряється за допомогою підходів, які використовуються при розробці програмного забезпечення. Складність завдань у такому підході може варіюватися від початкового ознайомлення з елементами синтаксису довільної мови програмування до виконання завдань для деякої предметної області.

Компільовані тести передбачають відповідний шаблон, який забезпечує уніфікацію процесу перевірки програмного коду-відповіді.

Причому можна використовувати як множини пар значень “вхідні данні” – “правильні вихідні дані”, так і сучасні підходи визначення правильності та якості програмного коду, зокрема – модульне (юніт-) тестування. За допомогою останніх можна організовувати досконалі форми перевірки володіння студентом сучасними технологіями у сфері розробки програмного забезпечення. Наприклад, якщо надати шаблон з певним визначеним інтерфейсом (базовим класом, тощо), а в постановці задачі покласти його реалізацію та використання на студента, то за допомогою модульного тестування може перевірити правильність запропонованої відповіді стосовно довільних аспектів об’єктно-орієнтованого програмування.

В онлайн-системі [3] зазначені особливості компільованих тестів апробовані для широкого діапазону компільованих та скриптових мов програмування (C++, C#, Java, JavaScript, PHP, xslt, xpath, xquery), SQL-запитів до баз даних, а також фрейворків розробки програмного забезпечення ADO.NET, ASP.NET MVC та інші. Розроблена платформа дає змогу розширювати список підтримуваних технологій.

Реалізація автоматизованої компіляції та перевірки програм-відповідей окрім свого прямого призначення також дає змогу ширше поглянути на процес оцінювання. У сучасному світі перед спеціалістом з розробки програмного забезпечення стоять значно ширші задачі, ніж просто отримати правильний результат для заданих параметрів. У щоденній практиці все більшу роль відіграють такі аспекти, як якість коду, відповідність вимогам (code convention), забезпечення необхідного рівня продуктивності, обробка та аналіз помилкових ситуацій (error handling). Все це можна виконувати в рамках платформи [3] з використанням відповідних аналізаторів.

1. *Muzychuk, A.* Information system “Testing Monitor” / A. Muzychuk, S. Litynskyj // ATVN-EU-GP Conference Proceedings, Pultusk, December 1-3, 2005. – Warsaw: National Institute of Telecom–munications, 2005. — P. 199.
2. *Височанський В., Клакович Л., Кушак П., Муzychuk А.* Про віртуальне середовище для онлайн-навчання. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Науковий збірник Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вип. 11, 2010. – С. 49-55.
3. Online Education System IUDICO. – <http://tests-ua.com>.
4. ILIAS Learning Management System. – www.ilias.de.
5. Moodle Learning Management System. – <http://moodle.org>.
6. Blackboard Learn. – www.blackboard.com.
7. C++ Language Tutorial. – <http://www.cplusplus.com>

СТВОРЕННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ ОБРОБКИ СПОСТЕРЕЖУВАНИХ ПАРАМЕТРІВ ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ ДІАГНОСТИЦІ ЗАЛИШКОВОЇ МІЦНОСТІ СИСТЕМ

Проблемно-орієнтовані нейромережі для діагностики залишкової міцності створюються з точки зору можливості побудови моделей дійсності вказаних систем. Задача ідентифікації параметрів моделі системи, що деформується, розглядається як обернена за результатами спостереження за відгуками системи на зовнішній вплив.

Як квазірішення задачі використовуються параметризовані за допомогою методу скінченних елементів значення відповідних функцій, які доставляють мінімум функціоналу, що характеризує середньоквадратичне відхилення на всій даній області вимірних параметрів від обчислених за допомогою рішення прямої задачі при фіксованих параметрах моделі [2-4].

Реалізація такого підходу здійснюється за допомогою інверсної нейромережі, структура якої визначається за допомогою генетичного алгоритму [6], при цьому використовується багатозв'язна мережа [5]. При створенні мережі її входом є значення спостережуваних параметрів, а виходом – параметри моделі. Навчання мережі виконується за результатами прямих розрахунків, побудованих на заданій множині можливих значень параметрів моделі, при цьому множина повинна задовольняти умові компактності. Розміри навчальної вибірки залежать від властивостей рішень прямих задач, вони збільшуються у випадку великої змінюваності властивостей рішень від параметрів моделі.

Процес спостереження в режимі online не може забезпечити число вимірювань рівним числу визначальних параметрів, тому вхідний вектор нейромережі, що має задану розмірність меншу, ніж число визначальних параметрів, вибирається з умови мінімуму відхилення результатів ідентифікації при зменшенні розмірності вектору входу.

Інформативні точки вимірювань визначаються введенням спеціальних функцій, з умови мінімуму за якими і визначається інформативний вхідний вектор нейромережі.

Якщо вектор вимірювань має розмірність K , у векторі вагових коефіцієнтів α необхідно покласти значення коефіцієнтів $\alpha_{ik} = 0$,

$k = \overline{K+1, N}$, тобто відповідні нейрони не збуджуються.

Залежність $H(\alpha^*)$ представлена у вигляді відрізка ряду Тейлора:

$$H(\alpha^*) = H(\alpha) + \frac{\partial H}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha} (\alpha^* - \alpha),$$

де $\alpha^* = \{\alpha_k^*\}$ – вектор вагових коефіцієнтів нейромережі, в якому на місці певних елементів $\alpha_{i_k} = 0$, $k = \overline{K+1, N}$ стоять нулі таким чином, щоб у векторі входу нейроної мережі з N елементів інформативними були лише K елементів; $\alpha = \{\alpha_i\}$ – повний вектор вагових коефіцієнтів; $\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \left\{ \frac{\partial H_p}{\partial \alpha_k} \right\}_{P \times N}$ – матриця розмірності $P \times K$; $j = \overline{1, n_k}$, P – розмірність вектору виходу мережі.

Тоді

$$\Delta = H(\alpha^*) - H(\alpha) = \frac{\partial H}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha} (\alpha^* - \alpha) = a \cdot (\alpha^* - \alpha),$$

де $a = \{a_{pk}\}_{P \times N} = \left\{ \frac{\partial H_p}{\partial \alpha_k} \right\}_{P \times N}$ та норма

$$\|\Delta\| = \sum_k^N \left| \sum_p^P a_{pk} (\alpha_k^* - \alpha_k) \right|$$

Умова максимальної близькості векторів $H(\alpha)$ та $H(\alpha^*)$ має вигляд

$$\|\Delta(\alpha^*)\| \Rightarrow \min_{\alpha}$$

Введена множина векторів $Q = \{q_m\}$, $m = \overline{1, M}$, $M = C_N^K$, $q_m = (q_{1m}, q_{2m}, \dots, q_{Km})$ – можливий вектор номерів елементів входу нейроної мережі, $q_m \in V$, $V = \{v_i\} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, $i = \overline{1, N}$ – вектор номерів точок входу у векторі навчальної вибірки нейроної мережі, за якого досягнуто P^* ; q_m^* – вектор номерів інформативних точок вимірювань.

Введена також вектор-функція керування [1]:

$$\begin{aligned} \mu &= \{\mu_1(X), \mu_2(X), \dots, \mu_N(X)\}; \\ \tilde{\mu}_m &= \{\mu_{q_{1m}}(X), \mu_{q_{2m}}(X), \dots, \mu_{q_{Km}}(X)\}, \quad \tilde{\mu} \subseteq \mu, \quad m = \overline{1, M} \\ \mu_k(X) &= \begin{cases} \delta(X - \gamma_k), & k \in q_m, \\ 0, & k \notin q_m, \end{cases} \end{aligned}$$

де $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака.

Тоді необхідно, щоб виконувалась умова

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \mu_k(X) d\Omega = K \text{ та } \alpha_{pjk}^* = \alpha_{pjk} \mu_k.$$

Функціонал, що мінімізується, має вигляд

$$\tilde{J} = \left[\int_{\Omega} \sum_k b_k (1 - \mu_k(X)) + \varphi(X) \left(\sum_k \mu_k(X) - K \right) \right] d\Omega,$$

$$\text{де } b_k = \left| \sum_p a_{pk} \alpha_k \right|.$$

Алгоритм знаходження точок вимірювань:

1. Задати число точок вимірювань K ;
2. Налаштувати нейронну мережу;
3. Побудувати матрицю Фреше $\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \left\{ \frac{\partial H_p}{\partial \alpha_k} \right\}_{p \times N} = \{a_{pk}\}_{p \times N}$;
4. Впорядкувати за зростанням b_k , визначити множину q_{m^*} ;
5. Поставити у відповідність номерам вузлів у векторі q_{m^*} номера елементів множини $V = \{v_i\} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, поклавши $v_i = 0$, якщо $i \notin q_{m^*}$;

Наведені результати побудови оптимальної структури нейромережі з точки зору кількості та способів з'єднань нейронів, а також інформативного вхідного вектору. Пропонований підхід може бути використаний для вирішення інших задач діагностики за спостережуваними відгуками системи.

1. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. – К.: Наукова думка, 2005. – 562с.
2. Ободан Н.І. Обернена задача визначення зовнішніх навантажень при деформації тонкостінних оболонок / Н.І. Ободан, Н.А. Гук // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2011. – № 1. – С. 47 – 50.
3. Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
4. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 386 с.
5. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс / С. Хайкин. – 2-е издание: пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
6. Kenneth O. Stanley Evolving Neural Networks Through Augmenting Topologies / Kenneth O. Stanley, Risto Miikkulainen // Evolutionary Computation . – 2002. – 10 (2). – Р. 99 – 127.

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В ПРОСТОРАХ ОРЛІЧА

У роботі розглядаються методи моделювання випадкових процесів із заданими точністю і надійністю в просторах Орліча. Розроблено обчислювальні алгоритми для моделювання випадкових процесів, що зображуються у вигляді рядів, зокрема, для вінерівського і узагальненого вінерівського процесів. Розроблені алгоритми можуть використовуватись в задачах чисельного розв'язування стохастичних диференціальних та різницевих рівнянь, крайових задач, при статистичному моделюванні дифузійних процесів.

Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ може бути зображений у вигляді ряду $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t)$, який збігається у середньому квадратичному. Моделлю процесу X називатимемо суму $X_M(t) = \sum_{k=1}^M \xi_k f_k(t)$. Нехай випадковий процес X та всі X_M , $M = 1, 2, \dots$ належать деякому функціональному банаховому простору $A(T)$ з нормою $\|\cdot\|$. Нехай задано два числа α та δ ($0 < \alpha < 1$, $\delta > 0$). Говоритимемо, що модель X_M наближає X з надійністю $1 - \alpha$ та точністю δ у нормі простору $A(T)$, якщо для цієї моделі має місце нерівність

$$P\{\|X(t) - X_M(t)\| > \delta\} \leq \alpha. \quad (1)$$

Отже, для побудови моделі потрібно знайти такі M , для яких при заданих δ та α виконується нерівність (1).

Теорема. Якщо для деякої послідовності $a = \{a_k, k = 1, 2, \dots\}$, такої, що $a_k < a_{k+1}$, $a_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, деякого цілого $N \geq 1$, усіх $0 \leq s < 1$ виконуються умови

$$B_N(m, n, a) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m, n \rightarrow \infty,$$

$$A_N(m, n, a, s) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m, n \rightarrow \infty,$$

де $A_1(m, n, a, s) = 0$,

$$A_N(m, n, a, s) = \sum_{k=m}^n b_{kn} (J_N(m, k, a))^{\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{N-1} \frac{(s J_l(m, k, a))^l}{l J_N^l(m, k, a)}, \quad \text{при} \quad N > 1,$$

$$B_N(m, n, a) = \sum_{k=m}^n b_{kn} (J_N(m, k, a))^{\frac{1}{2}}, \quad b_{kn} = c_k d_{kn}, \quad d_{kn} = (a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}), \\ k = m, m+1, \dots, n-1, \quad d_{nn} = a_n^{-1}.$$

Тоді випадковий процес $S(t) = S_1^\infty(t) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k f_k(t)$ з ймовірністю одиниця належить простору Орліча $L_U(\Omega)$. Якщо при цьому існують границі

$$B_N(m, a) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_N(m, n, a) < \infty, \quad A_N(m, a, s) = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_N(m, n, a, s) < \infty,$$

то для будь-якого $x > 0$, $0 \leq s < 1$ та $m = 1, 2, \dots$ має місце нерівність

$$P\left\{\|S_m^\infty(t)\|_{L_U} > x\right\} \leq \exp\left\{-\frac{sx^2}{2(B_N(m, a))^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{A_N(m, a, s)}{2B_N(m, a)} + \omega_N(s)\right\}. \quad (2)$$

Узагальнений вінерівський процес $W_\alpha(t)$ можна представити у вигляді

$$W_\alpha(t) = \sum_{n=1}^\infty c_n \sin(x_n t) X_n + \sum_{n=1}^\infty d_n (1 - \cos(y_n t)) Y_n,$$

$$\text{де} \quad c_n = \frac{\sqrt{2c}}{x_n^{\alpha+1} J_{1-\alpha}(x_n)}, \quad d_n = \frac{\sqrt{2c}}{y_n^{\alpha+1} J_{-\alpha}(y_n)},$$

$\{X_n, Y_n\}$ – центровані незалежні гауссові випадкові величини з $EX_n^2 = EY_n^2 = 1$, $\{x_n\}$ – дійсні нулі функції Бесселя $J_{-\alpha}(x)$, $\{y_n\}$ – дійсні нулі функції Бесселя $J_{1-\alpha}(x)$.

Позначимо наближені значення c_n, d_n, x_n, y_n відповідно $\tilde{c}_n, \tilde{d}_n, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n$. Нехай $|c_n - \tilde{c}_n| \leq h_n^c$, $|d_n - \tilde{d}_n| \leq h_n^d$, $|x_n - \tilde{x}_n| \leq h_n^x$, $|y_n - \tilde{y}_n| \leq h_n^y$, де $h_n^c, h_n^d, h_n^x, h_n^y$ – задана точність. Тоді модель процесу $W_\alpha(t)$ має вигляд

$$\tilde{S}_\alpha(t, M) = \sum_{n=1}^M \tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t) X_n + \sum_{n=1}^M \tilde{d}_n (1 - \cos(\tilde{y}_n t)) Y_n.$$

Похибка моделювання $\Delta(t)$ рівна $\Delta(t) = W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, M)$. Для узагальненого вінерівського процесу отримані оцінки аналогічні (2). Ці оцінки покращують результати роботи [1].

1. Пашко А.О. Статистичне моделювання узагальненого вінерівського процесу / А.О. Пашко // Науковий вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. - 2014. - Вип. 2. - С. 180 – 183.

УДК 518:517.948

Р.М. Пелешак, М.В. Дорошенко, М.Б. Мельник

(Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка)

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ МЕТОДОМ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛАПЛАСА З ВИКОРИСТАННЯМ СКМ МАТЕМАТИКА

Використання засобів символьної комп'ютерної алгебри дозволяє розв'язувати складні задачі моделювання фізичних процесів, які раніше розв'язати було неможливо.

Слід відмітити, що багато задач математичного моделювання фізичних процесів зводяться до розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних. Ефективним методом розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних є метод інтегральних перетворень Лапласа [2].

У роботі розглядається диференціальне рівняння для визначення просторово-часового розподілу дефектів у напруженій гетеросистемі такого вигляду[1]:

$$\frac{\partial N_{dl}^{(i)}(x,t)}{\partial t} = \left[D_i \left(1 - \frac{N_{d0}^{(i)}}{N_{dc}^{(i)}} \right) \right] \frac{\partial^2 N_{dl}^{(i)}(x,t)}{\partial x^2} - D_i \frac{N_{d0}^{(i)}}{N_{dc}^{(i)} \Delta \Omega} \frac{\partial^2 \varepsilon_i(x)}{\partial x^2} + G_d^{(i)} - \frac{N_{dl}^{(i)}(x,t)}{\tau_d^{(i)}} \quad (1)$$

де $N_{dc}^{(i)} = \frac{k_B T \rho \varepsilon_i^2}{\phi_d^{(i)}}$, $i=1,2,3$ – критична концентрація дефектів після перевищення якої відбувається самоорганізація дефектів [3].

Крім того, на межах шарів гетероструктури, повинні виконуватись умови рівності концентрацій домішок, а також їх потоків:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{dl}^{(1)}(-L,t)}{\partial x} = 0, \\ J_1(-a,t) = J_2(-a,t), \quad N_{dl}^{(2)}(a,t) = N_{dl}^{(3)}(a,t), \\ J_2(a,t) = J_3(a,t), \quad \frac{\partial N_{dl}^{(3)}(L,t)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{де } J_i(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[D_i N_{dl}^{(i)}(x,t) (1 - \varepsilon_i(x)) \right].$$

У початковий момент часу

$$N_{dl}^{(i)}(x,0)=0 \quad (3)$$

Ввівши безрозмірні змінні:

$$\theta = \frac{t}{\tau_d^{(2)}}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad L_d^{(i)} = \sqrt{D_i \tau_d^{(i)}},$$

$$N_{dl}^{(i)}(x,t) = Y_i(x,t) G_d^{(i)} \tau_d^{(i)},$$

$$\beta = D_2 \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \frac{2\varepsilon_0}{\Delta\Omega^{(2)} a^2 G_d^{(2)}}. \quad (4)$$

рівняння (1) та крайові умови (2) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_1(\hat{x}, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{D_1}{D_2} \left(\frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{N_{d0}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 Y_1(\hat{x}, \theta)}{\partial \hat{x}^2} - \frac{D_1}{D_2} \left(\frac{L_d^{(1)}}{L_d^{(2)}} \right)^2 (Y_1(\hat{x}, \theta) - 1) \\ \frac{\partial Y_2(\hat{x}, \theta)}{\partial \theta} &= \left(\frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial^2 Y_2(\hat{x}, \theta)}{\partial \hat{x}^2} + \beta - Y_2(\hat{x}, \theta) + 1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial Y_3(\hat{x}, \theta)}{\partial \theta} = \frac{D_3}{D_2} \left(\frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{N_{d0}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}} \right) \frac{\partial^2 Y_3(\hat{x}, \theta)}{\partial \hat{x}^2} - \frac{D_3}{D_2} \left(\frac{L_d^{(3)}}{L_d^{(2)}} \right)^2 (Y_3(\hat{x}, \theta) - 1)$$

$$\frac{\partial Y_1(-\hat{L}, \theta)}{\partial \hat{x}} = 0,$$

$$Y_2(\hat{a}, \theta) = \frac{G_d^{(3)} \tau_d^{(3)}}{G_d^{(2)} \tau_d^{(2)}} Y_3(\hat{a}, \theta),$$

$$\frac{D_1}{D_2} \left(\frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left(-1 + \frac{N_{d0}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}} \right) \frac{\partial Y_1(-\hat{a}, \theta)}{\partial \hat{x}} = \left(\frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left(-1 + \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial Y_2(-\hat{a}, \theta)}{\partial \hat{x}} - \beta \hat{a}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left(-1 + \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial Y_2(\hat{a}, \theta)}{\partial \hat{x}} + \beta \hat{a} = \frac{D_3}{D_2} \left(\frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left(-1 + \frac{N_{d0}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}} \right) \frac{\partial Y_3(-\hat{a}, \theta)}{\partial \hat{x}},$$

$$\frac{\partial Y_3(-\hat{L}, \theta)}{\partial \hat{x}} = 0.$$

Розв'язок рівнянь (5) з крайовими умовами (6) шукаємо у вигляді:

$$Y_i(\hat{x}, \theta) = e^{-\lambda_i \theta} Z_i(\hat{x}, \theta), \quad (7)$$

де

$\lambda_1 = \frac{D_1}{D_2} \left(\frac{L_d^{(2)}}{L_d^{(1)}} \right)$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = \frac{D_3}{D_2} \left(\frac{L_d^{(2)}}{L_d^{(3)}} \right)$, а $Z_i(\bar{x}, \theta)$ задовольняють наступним рівнянням:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_1(\bar{x}, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{D_1}{D_2} \left(\frac{L_d^{(2)}}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{N_{d0}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 Z_1(\bar{x}, \theta)}{\partial \bar{x}^2} + e^{\lambda_1 \theta} \\ \frac{\partial Y_2(\bar{x}, \theta)}{\partial \theta} &= \left(\frac{L_d^{(2)}}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial^2 Y_2(\bar{x}, \theta)}{\partial \bar{x}^2} + e^{\theta} (\beta + 1) \\ \frac{\partial Z_3(\bar{x}, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{D_3}{D_2} \left(\frac{L_d^{(2)}}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{N_{d0}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}} \right) \frac{\partial^2 Z_3(\bar{x}, \theta)}{\partial \bar{x}^2} + e^{\lambda_3 \theta} \end{aligned} \quad (8)$$

з такими крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_1(-\bar{L}, \theta)}{\partial \bar{x}} &= 0, \\ e^{-\lambda_1 \theta} Z_1(-\hat{a}, \theta) &= e^{-\theta} \frac{G_d^{(2)} \tau_d^{(2)}}{G_d^{(1)} \tau_d^{(1)}} Z_2(-\hat{a}, \theta), \\ e^{-\theta} Z_2(\hat{a}, \theta) &= e^{-\lambda_3 \theta} \frac{G_d^{(3)} \tau_d^{(3)}}{G_d^{(2)} \tau_d^{(2)}} Z_3(\hat{a}, \theta), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{D_1} \left(\frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left(-1 + \frac{N_{d0}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}} \right) \frac{\partial Z_1(-\hat{a}, t)}{\partial \bar{x}} &= \left(\frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left(-1 + \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial Z_2(-\hat{a}, t)}{\partial \bar{x}} - \beta \hat{a} e^{\theta}, \\ \left(\frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left(-1 + \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial Z_2(\hat{a}, t)}{\partial \bar{x}} + \beta \hat{a} e^{\theta} &= \frac{D_3}{D_2} \left(\frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left(-1 + \frac{N_{d0}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}} \right) \frac{\partial Z_3(\hat{a}, t)}{\partial \bar{x}}, \\ \frac{\partial Z_3(\bar{L}, \theta)}{\partial \bar{x}} &= 0. \end{aligned}$$

Для знаходження розв'язку диференціальних рівнянь (8) з крайовими умовами (9) використаємо інтегральне перетворення Лапласа

$$X_i(\bar{x}, p) = \int_0^{\infty} Z_i(\bar{x}, \theta) e^{-p\theta} d\theta \quad (10)$$

У системі комп'ютерної математики Mathematica 7.0 розроблена програма розв'язування диференціальних рівнянь (8) з крайовими умовами

(9) з використанням прямих та обернених інтегральних перетворень Лапласа. Проведені чисельні дослідження отриманих розв'язків крайової задачі для диференціальних рівнянь при різних вхідних параметрах. Отримані результати приведені на рис. 1.

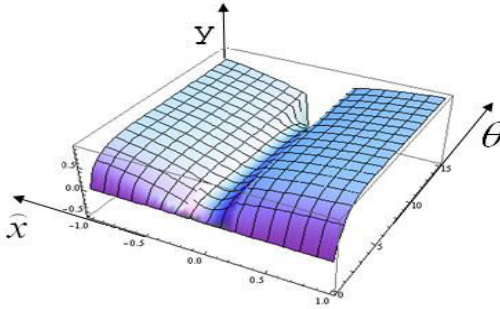


Рис. 1. Профіль нестационарного розподілу концентрації вакансій у тришаровій напруженій наногетеросистемі з неоднорідно-стиснутим

внутрішнім шаром $\frac{N_{do}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}}=0,4$; $\frac{N_{do}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}}=0,3$; $\frac{N_{do}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}}=0,7$; $\beta=10.2$.

1. Пелещак Р.М. Самоорганізований дифузійно-деформаційний розподіл точкових дефектів у напружених гетеросистемах / Р.М. Пелещак, О.В. Кузик // УФЖ. – 2007. – Т.52, № 7. – С.689–694.
2. Старков В.М. Операционное исчисления и его приминения. Учебное пособие / В.М. Старков. – Санкт-Петербург, – 2000. – 357 с.
3. Emel'yanov V.I. A Hierarchy of the formation of nanometer clusters and periodic structures of laser-induced defects / Emel'yanov V.I., I.M. Panin // Laser Physics. – 1996. – Vol.6, № 5. – P.971–978.

Я.В.Пізюр, О.М.Іванова

(Національний університет «Львівська політехніка»)

МОДИФІКОВАНИЙ АЛГОРИТМ БАЛАНСНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ІЗ ЗАДАНОЮ ПОХИБКОЮ МІНІМАКСНИМИ СПЛАЙНАМИ

Мінімаксним (чебишовським) сплайном називають сплайн, кожна ланка якого побудована за мінімаксним критерієм (є чебишовським наближенням функції).

Апроксимація функції $f(x)$ сплайном $S(A, x)$ називається балансным наближенням із заданою похибкою μ_3 , якщо

$$\mu_i = \max_{x \in [z_{i-1}, z_i]} |f(x) - S(A_i, x)| / w(x) = \mu_3, \quad i = \overline{1, r-1}, \quad \mu_r \leq \mu_3,$$

де μ_i – похибка наближення на i -й ланці, $[z_{i-1}, z_i]$ – границі (вузли) i -ї ланки, A_i – параметри виразу (наприклад многочлен, дробово-раціональний вираз, експонента від многочлена тощо), який задає значення сплайна на i -й ланці, $w(x)$ – вагова функція, r – кількість ланок наближення [1,2]. Балансне наближення неперервної функції мінімаксним сплайном є оптимальним у тому сенсі, що при заданій похибці одержуємо мінімально можливу кількість ланок, а вузли ланок у такому випадку є оптимально розміщені. Запропонований алгоритм не залежить від виду виразу в ланці сплайна.

1. Вводимо вхідні дані, а саме межі відрізка $[a, b]$, на якому будуватимемо балансне наближення, μ_3 – задану похибку наближення на кожній ланці, ε – відносну точність досягнення заданої похибки на кожній ланці (наприклад 0.01).
2. Робимо ініціалізацію змінних. Лівій межі біжучої ланки x_l присвоюємо значення початку відрізка балансного наближення $x_l := a$. Правій межі біжучої ланки x_p присвоюємо значення кінця відрізка балансного наближення $x_p := b$. Змінній x_{pm} , яка є правою границею ланки, при якій максимальна похибка наближення μ є меншою ніж задана, присвоюємо значення початку відрізка балансного наближення $x_{pm} := a$. Змінній x_{pb} , яка є правою границею ланки, при якій максимальна похибка наближення μ є більшою ніж задана, присвоюємо значення кінця відрізка балансного наближення $x_{pb} := b$.

3. Будуємо ланку чебишовського сплайна на відрізку $[x_l, x_p]$, тобто знаходимо параметри виразу в ланці сплайна [3], обчислюємо максимальну похибку наближення $\mu = \max_{x \in [x_l, x_p]} |f(x) - S(A, x)|$.
4. Порівнюємо отриману похибку μ із заданою μ_3 . Якщо $\mu < \mu_3$ і межі біжучої ланки співпадають з межами відрізка апроксимації, тобто $x_l = a$ а $x_p = b$, то наближення побудоване, воно має одну ланку, запам'ятовуємо її параметри і завершуємо алгоритм.

Якщо $\mu > \mu_3$, то робимо присвоєння $x_{pb} := x_p$ і зменшуємо довжину біжучої ланки. Нове значення правої межі біжучої ланки обчислюємо за формулою $x_p = \frac{x_{pb} + x_{pm}}{2}$ і переходимо до пункту 3.

Якщо $\mu < \mu_3$ і виконується умова $\frac{|\mu - \mu_3|}{\mu_3} > \varepsilon$ (тобто точність досягнення заданої похибки μ_3 є недостатньою), то робимо присвоєння $x_{pm} := x_p$ і збільшуємо довжину біжучої ланки. Значення правої межі ланки приймаємо рівним $x_p = \frac{x_{pb} + x_{pm}}{2}$ і переходимо до пункту 3.

Якщо $\mu < \mu_3$ і виконується умова $\frac{|\mu - \mu_3|}{\mu_3} \leq \varepsilon$ (точність досягнення заданої похибки μ_3 є достатньою), то права границя ланки знайдена, запам'ятовуємо її межі x_l і x_p , параметри A_i виразу в ланці сплайна, отриману похибку μ . Робимо присвоєння $x_l := x_p$, $x_{pm} := x_l$, $x_p := b$, $x_{pb} := b$ і переходимо до пункту 3 для побудови наступної ланки.

Якщо $\mu < \mu_3$ і права межа біжучої ланки співпадає з правою межею відрізка апроксимації, тобто $x_p = b$, то останню ланку побудовано, запам'ятовуємо її параметри і завершуємо алгоритм.

1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами / Б.А. Попов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.
2. Малахівський П.С. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення / П.С. Малахівський, В.В. Скопечкий. – Київ: Наук. думка, 2013. – 272 с.
3. Яцук В.О. Методи підвищення точності вимірювань: Підручник / В.О. Яцук, П.С. Малахівський. – Львів: Бескид Біт, 2008. – 368 с.

УДК 519.6

С.О. Плащенко, В.І. Кузьменко

(Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара)

ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВ'ЯЗАНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Пропонується підхід до розв'язання деяких класів зв'язаних крайових задач. Під зв'язаними задачами розумітимемо задачі, які описуються диференціальними рівняннями, в яких функції зовнішніх впливів залежать від невідомої функції.

Прикладом зв'язаної задачі є задача про притягування провідників в магнітному полі: провідник довжини l зі струмом I_1 знаходиться в магнітному полі нескінченно довгого провідника I_2 . Під дією сили Ампера провідник зі струмом I_1 деформується, а нескінченно довгий провідник вважається жорстким.

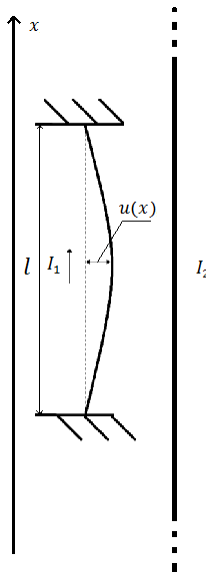


Рис. 1 Притягування провідників в магнітному полі

Формулюється задача знаходження переміщень перерізу деформівного провідника в кожній його точці. Задача описується рівнянням Штурма-Ліувілля.

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x,u)\frac{du}{dx}\right)+q(x,u)u-f(x,u)=0$$

Оскільки функції зовнішніх впливів залежать від $u(x)$, неможливо побудувати варіаційне формулювання, користуючись традиційними методами.

Пропонується використовувати такий алгоритм наближеного розв'язання:

- 1) Відрізок $[0, l]$ розбивається на n частин точками $x_1, x_2, \dots, x_n$. Надалі розв'язок $u(x)$ шукається як вектор $u_1, u_2, \dots, u_n$ ($u_i = u(x_i)$).
- 2) Обирається деяке початкове наближення $(u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$ функції $u(x)$, яке задовольняє граничним умовам.
- 3) Обчислюються функції зовнішніх впливів за поточного наближення:
 $(p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0), (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0), (f_1^0, f_2^0, \dots, f_n^0)$.
- 4) Відповідні координати векторів підставляються в диференціальне рівняння. Таким чином, отримуємо систему n диференціальних рівнянь:

$$-\frac{d}{dx} \left(p_i(x) \frac{du}{dx} \right) + q_i(x)u - f_i(x) = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

- 5) Для кожного з рівнянь системи переходимо до варіаційного формулювання:

$$I(v(x)) = \int_0^l \left(p_i(x) \left(\frac{dv}{dx} \right) + q_i(x)v^2 - 2f_i(x)v \right) dx \quad i = \overline{1, n}$$

$$u(x) = \min_{v(x)} I(v(x))$$

- 6) Отримана задача розв'язується одним з методів прямої мінімізації. Одержаний розв'язок перевіряється за критерієм припинення ітераційного процесу.
- 7) Описаний процес повторюється, доки

$$\frac{\|u^{k+1} - u^k\|}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon, \text{ де } \|u^{k+1} - u^k\| - \text{евклідова норма різниці попереднього}$$

та поточного наближення.

Іншим прикладом зв'язаної варіаційної задачі є задача про прогин плоского даху під дією талої води. Під час поступового розтавання снігу вода збирається в центрі даху, внаслідок чого дах прогинається. Зауважимо, що чим більше дах прогинається, тим більше води збирається в центрі. Задача полягає у знаходженні вертикальних переміщень точок даху.

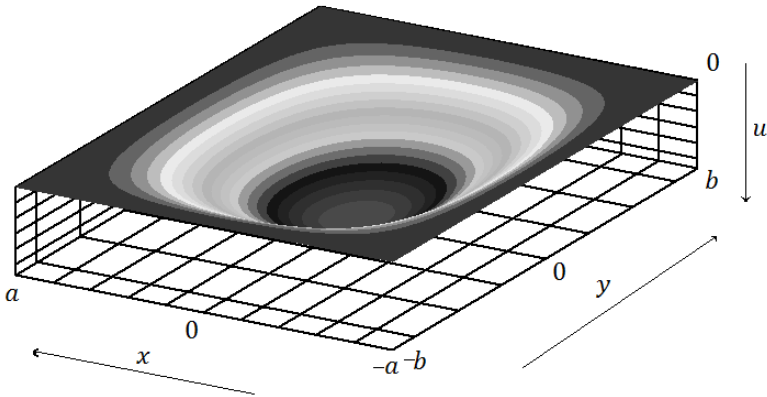


Рис. 2 Прогин плоского даху

Як ідеалізовану схему розглядатимемо плоску мембрану, яка займає область $\Omega = [-a, a] \times [-b, b]$. Через Γ позначимо контур області Ω . Прогин плоскої мембрани, під дією розподіленого навантаження $q(x, y, u)$, описується рівнянням Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -q(x, y, u)$$

В цьому виразі $u(x, y)$ – прогин даху в точці (x, y) , а $q(x, y, u)$ – функція зовнішніх впливів. Контур закріплено. Задача є зв'язаною, оскільки функція зовнішніх впливів $q(x, y, u)$ залежить від невідомої функції u .

Розглянемо застосування алгоритму для даної задачі:

- 1) Площина Ω розбивається на частини скінченно-різницевою сіткою (x_i, y_j) $i = \overline{1, n}$ $j = \overline{1, m}$. Надалі розв'язок $u(x, y)$ шукається у вигляді значень функції в вузлах (x_i, y_j) ($u_{ij} = u(x_i, y_j)$).
- 2) Обирається деяке початкове наближення u_{ij}^0 $i = \overline{1, n}$ $j = \overline{1, m}$ функції $u(x, y)$, яке задовольняє граничні умови.
- 3) Функція зовнішніх впливів q обчислюється за поточного наближення $q_{ij} = q(x_i, y_j, u_{ij})$ $i = \overline{1, n}$ $j = \overline{1, m}$.
- 4) Відповідні координати матриці q_{ij} підставляються в диференціальне рівняння. Таким чином, отримаємо систему nm диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -q_{ij} \quad i = \overline{1, n} \quad j = \overline{1, m}$$

- 5) Для кожного з рівнянь системи переходимо до варіаційного формулювання:

$$I(v(x)) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - q_{ij} v \right) d\Omega \quad i = \overline{1, n} \quad j = \overline{1, m}$$

$$u(x) = \min_{v(x)} I(v(x))$$

- 6) Отримана задача розв'язується одним з методів прямої мінімізації.
 7) Описаний процес повторюється, поки не виконається критерій

$$\frac{\|u^{k+1} - u^k\|}{\sqrt{nm}} \leq \varepsilon, \text{ де } \|a - b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_{ij} - b_{ij})^2}$$

1. Кузьменко В.І. Варіаційні методи аналізу математичних моделей / В.І. Кузьменко. – Дніпропетровськ: ДДУ, 1997. – 120 с.
2. Черноусько Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления / Ф.Л. Черноусько, Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1973. – 240 с.

О.Д. Поліщук

(Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України)

СКЛАДНІ МЕРЕЖІ ТА МЕРЕЖЕВІ СИСТЕМИ: І. ПОТОКОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Складні мережі та мережеві системи. В останні роки бурхливо розвивається так звана теорія складних мереж (ТСМ) [1-4]. У найпростішому випадку під мережею розуміють сукупність вузлів, поєднаних певними зв'язками. Загалом довільна мережа визначається, як статистичний ансамбль, тобто, як множина мереж у якій кожна визначена мережа має певну ймовірність реалізації, або як набір всіх можливих станів даної мережі. З іншого боку, складні мережі – це графи, які володіють нетривіальними топологічними властивостями. У випадку реальних мереж саме ці властивості визначають особливості їхнього функціонування. Часом складні мережі називають системами. Однак, хіба є залізнична мережа системою, коли по ній не здійснюється рух поїздів, або чи є системою мережа газо- чи нафтогонів, якщо у ній не перекачуються енергоносії? Мережа серверів та пов'язаних з ними засобами провідного та безпроводного зв'язку комп'ютерів не є системою, поки у ній не здійснюється обмін інформацією. Навіть понятійні апарати ТСМ та теорії систем і системного аналізу (ТССА) практично майже не перетинаються. З поміж основних понять ТСМ можна назвати [2] орієнтованість мережі, локальні характеристики вузлів та зв'язків, загальні топологічні властивості мережевих підструктур (кліків, спільнот, комун) та мережі в цілому. Теорія систем оперує такими поняттями, як мета, функція, стан, процес, поведінка, стійкість, керованість тощо [5]. Різняться і предмети досліджень ТСМ і ТССА. У ТСМ вони спрямовані на створення моделей мереж, визначення статистичних властивостей, які характеризують їхню поведінку, прогнозування поведінки мереж при зміні їх структурних властивостей і т.п. Предметом дослідження ТССА є вивчення різних класів та типів систем, основних принципів та закономірностей їхньої поведінки, процесів цілеутворення, функціонування, розвитку та взаємодії із зовнішнім середовищем тощо. Першим кроком у вивченні довільної системи є визначення та дослідження її складу та структури. Цей крок можна віднести до прерогативи ТСМ. Далі слідує встановлення цілей функціонування системи та функцій, реалізація яких сприяє досягненню цих цілей. Загалом у ТССА структура системи розглядається спільно з функціями, які реалізуються складовими цієї структури та системою загалом, причому функція має пріоритет над структурою. З огляду на сказане вище ми вважаємо, що мережа – це лише структура реальної системи. Однак, останнє твердження зовсім не применшує

значення ТСМ та проблем, які нею вирішуються. Дійсно, існують та існували системи, які можна вивчати, досліджуючи виключно їхню структуру. Серед таких систем можна назвати газову мережу Всесвіту, тобто скупчення газу, які мають мережеву структуру. Вважається, що саме у вузлах цієї мережі утворюються галактики. Однак, відстежувати процеси утворення галактик ми не можемо із-за їхньої тривалості. Археологи знаходять численні інфраструктурні мережі зниклих цивілізацій, а палеонтологи – ареали існування вимерлих тварин та рослин. У свій час це були достатньо великі та складні системи, досліджувати які ми можемо зараз виключно на основі їхніх викопних «мережевих» залишків. Можна навести ще чимало подібних прикладів.

Що перетворює мережу, як структуру, в систему? Зазвичай метою створення та розбудови будь-якої мережі є забезпечення руху певного типу потоків. Отже, в систему мережу перетворюють потоки, які рухаються цією мережею. Звичайно, врахування руху потоків далеко не в повній мірі описує функціонування системи, але суттєво відображає цей процес. Він також дозволяє суттєво збагатити понятійний апарат ТСМ та пов'язати його із задачами ТССА.

Потоки в мережевих системах. Надалі мережевою системою будемо називати складну мережу, по якій здійснюється рух потоків. Потоки у мережі можуть бути неперервними (електроенергія, перекачування газу, нафти, води та інших ресурсів), дискретними (поїзди, інформаційні повідомлення, поштові послуги) та неперервно-дискретними (рух автотранспорту, телефонні дзвінки тощо). Рух потоків у мережі може бути повністю впорядкованим, наприклад, регулюватися певним графіком (рух поїздів), частково впорядкованим, тобто рух лише частини потоків підпорядкований певному графіку (рух автотранспорту у великому місті) або неупорядкованим (обмін інформацією у соціальних мережах). Рівень впорядкованості руху потоків у мережі визначатимемо значенням $\alpha = K_d / K$, де K_d – частка впорядкованих потоків, K – загальна кількість потоків у системі, $0 \leq \alpha \leq 1$. Зрозуміло, що мережі однакової структури з різними типами потоків та рівнем впорядкованості їхнього руху породжують різні мережеві системи.

Основні поняття теорії складних мереж та потоки. Розглянемо лише кілька основних понять ТСМ та покажемо, яким чином врахування руху потоків у мережі дозволяє суттєво збагатити їхній зміст та вирішити низку важливих проблем.

Кожний вузол мережі може бути пов'язаний з іншими вузлами певною кількістю зв'язків. Якщо ці зв'язки мають напрямок, мережа називається орієнтованою. Якщо ж усі зв'язки між вузлами мережі є двонаправленими (симетричними), вона називається неорієнтованою. Якщо лише частина зв'язків у мережі є орієнтованою, називатимемо її частково орієнтованою

(у кожному місті є автошляхи з одно- та двостороннім рухом і т.п.). Достатньо добре орієнтованість мережі описується так званою матрицею суміжності. Вважатимемо, що між довільними вузлами мережі може бути тільки один зв'язок (одно- або двонаправлений), та вузол не може бути пов'язаний сам із собою (відсутні так звані «петлі»). Тоді, якщо до складу мережі входить N вузлів, елементи матриці суміжності $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$ дорівнюють 1, якщо зв'язок між вузлом n_i та n_j існує, та дорівнює 0, якщо такий зв'язок відсутній. Очевидно, що для неорієнтованих мереж матриця суміжності є симетричною. Чимало властивостей мережі можуть бути виражені через матрицю суміжності. Наприклад, таке важливе поняття ТСМ, як степінь (degree) d_i вузла n_i , визначається через елементи матриці суміжності наступним чином: $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$. Окрім того, для орієнтованих мереж використовуються такі поняття, як вихідна степінь (out degree) d_i^{out} та вхідна степінь (in degree) d_i^{in} вузла n_i .

Врахування руху потоків у мережі дозволяє суттєво поглибити розглянуті вище поняття. Введемо у випадку дискретних потоків потокову матрицю суміжності $B(t_k) = \{b_{ij}(t_k)\}_{i,j=1}^N$, у якій елемент $b_{ij}(t_k)$ визначає кількість потоків, які пройшли від вузла n_i до вузла n_j за період часу $[t_{k-1}, t_k] \subset [0, T]$, $k = 1, 2, \dots$ У неперервному випадку елементи потокової матриці суміжності $B(t) = \{b_{ij}(t)\}_{i,j=1}^N$ визначають об'єм потоку, який проходить від вузла n_i до вузла n_j в момент часу $t \in [0, T]$. Очевидно, що потокова матриця суміжності навіть для неорієнтованих мереж у загальному випадку є несиметричною. Тоді вихідна потокова степінь вузла n_i , наприклад, у дискретному випадку за період $[t_{k-1}, t_k]$, визначається за співвідношенням: $\tilde{d}_i^{out}(t_k) = \sum_{j=1}^N b_{ij}(t_k)$, вхідна потокова степінь вузла – за співвідношенням: $\tilde{d}_i^{in}(t_k) = \sum_{i=1}^N b_{ij}(t_k)$, загальна потокова степінь вузла – за співвідношенням: $\tilde{d}_i(t_k) = \tilde{d}_i^{out}(t_k) + \tilde{d}_i^{in}(t_k)$. Аналогічним чином можна визначати поточні степені вузла n_i за період $[0, T]$. Введені нами поняття дозволяють вирішувати такі проблеми ТСМ, як пошук прихованих або формально включених в структуру мережі вузлів та зв'язків [2]. Нерідкі випадки, коли користувач реєструється на певному сайті, тобто встановлює зв'язок, але надалі ніколи на цей сайт не заходить, тобто не відбувається обмін інформаційними потоками. Такий зв'язок можна вважати формальним, тобто реально не існуючим. Між вузлами мережі можуть проходити потоки, хоча зв'язок між ними формально не встановлений.

Таким чином, наявність руху потоків дозволяє виявляти «приховані» зв'язки. Потік може відправлятися з одного вузла до іншого, але в процесі руху дублюватися або переформовуватися та приходити у кілька вузлів. Це означає існування «прихованого» вузла, який перерозподіляє рух потоків. Аналізуючи значення потокової степені заданого вузла у порівнянні з іншими, ми можемо визначити його роль у мережі та ідентифікувати вузли – генератори потоків, вузли – кінцеві приймачі та вузли – посередники, які здійснюють підтримку руху потоків у системі.

Степінь вузла є локальною характеристикою мережі. Серед глобальних характеристик можна назвати завантаженість (важливість) вузла (betweenness centrality) n_i . У ТСМ ця характеристика визначається [1] як сумарна кількість найкоротших шляхів між всіма іншими вузлами, які проходять через вузол, та загалом відображає топологію всієї мережі. Більш адекватно визначити важливість вузла в системі можна, враховуючи об'єм потоків, які проходять через даний вузол у порівнянні з іншими вузлами мережі. Потокову завантаженість вузла k_i у випадку неперервних потоків визначатимемо за співвідношенням:

$$k_i = \int_0^T (\tilde{d}_i(t) / \max_{j=1, \overline{N}} \tilde{d}_j(t)) dt .$$

Врахування руху потоків дозволяє визначити не тільки важливість вузлів, але й завантаженість зв'язків мережі. Важливість зв'язку m_{ij} , який поєднує вузли n_i та n_j у неперервному випадку визначатимемо через елементи потокової матриці суміжності за співвідношенням:

$$m_{ij} = \int_0^T (b_{ij}(t) / \max_{k, l=1, \overline{N}} b_{kl}(t)) dt .$$

Врахування руху потоків дозволяє також скласти більш точне уявлення про кластеризацію мережі, структуру кліків, спільнот та інших її підструктур, реальне значення хабів тощо.

1. *Bocconi S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.-U.* Complex networks: structure and dynamics // *Physics Reports*. – 2006. – Vol. 424. – P. 175-308.
2. *Barabási A.-L., Frangos J.* Linked: the new science of networks science of networks. – Basic Books, 2014.
3. *Polishchuk O., Polishchuk D., Tyutyunnyk M., Yadzhak M.* Issues of regional development and evaluation problems // *AASCIT Communications*. – 2015. – Vol. 2, no. 4, pp. 115-120.
4. *Евин И.А.* Введение в теорию сложных сетей // *Компьютерные исследования и моделирование*. – 2010. – Т.2, №2. – С. 121-141.
5. *Антонов В.А.* Системный анализ. – М.: Высшая школа, 2004. – 456с.

О. Д. Поліщук

(Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України)

СКЛАДНІ МЕРЕЖІ ТА МЕРЕЖЕВІ СИСТЕМИ: II. СИНХРОНІЗАЦІЯ ТА КЕРОВАНІСТЬ

У праці [1] ми визначили мережеву систему, як складну мережу у якій здійснюється рух потоків. Складні мережі з різним типом та рівнем впорядкованості руху потоків породжують різні мережеві системи [2], тобто складна мережа є лише «каркасом» системи. Серед важливих проблем дослідження як складних мереж, так і мережевих систем можна назвати синхронізацію процесу їхнього функціонування [3] та керованості цього процесу [4].

Безмасштабні мережі. Найбільшу увагу у теорії складних мереж (ТСМ) приділяють дослідженню так званих безмасштабних мереж, які мають багато втілень у реальності. Основною особливістю мереж цього типу є наявність невеликого числа вузлів, які мають високу степінь, та величезної кількості вузлів з невисокою степінню. З безмасштабними мережами пов'язані два важливих поняття [5], які описують процес їхнього функціонування та розвитку, а саме, ріст, тобто додавання нових вузлів, які пов'язуються з уже існуючими вузлами мережі, та переважне приєднання (preferencial attachment). Останнє поняття означає, що новий вузол з більшою ймовірністю пов'язується з існуючими вузлами мережі з високою степінню.

Розглядаючи мережеву систему, як структуру, яка повинна забезпечувати рух певного типу потоків, ми можемо ввести кілька понять, які описують перспективи її росту. Дійсно, рівень покриття країни або окремого її регіону ресурсним та фінансовим забезпеченням, медичними послугами, мобільним зв'язком і т.п. є важливою проблемою. Нехай N – кількість вузлів, включених у склад мережі, між якими організовано рух заданого типу потоків, а $\tilde{N}$ – кількість вузлів, між якими необхідно забезпечити рух подібних потоків. Тоді величина $P_N = N / \tilde{N}$ визначає рівень покриття вузлів для організації руху потоків заданого типу. Нехай M – кількість зв'язків, які забезпечують рух заданого типу потоків, а $\tilde{M}$ – кількість зв'язків, необхідних для залучення тих вузлів мережі, які потребують забезпечення руху цих потоків. Тоді величина $C_M = M / \tilde{M}$ визначає рівень покриття необхідними зв'язками вузлів мережі.

Природно, що переважне приєднання нових вузлів мережі з більшою ймовірністю здійснюється з тими вузлами, через які проходить більше по-

токів. Загалом запропонована Барабаші-Альбертом модель розвитку безмасштабних мереж достатньо адекватно відображає процес освоєння нових територій, впровадження новітніх технологій, розширення інфраструктурних, транспортних, торгівельних мереж тощо.

Синхронізація в мережевих системах. Під синхронізацією розуміють налаштування ритмів автоколивних систем за рахунок слабкої взаємодії між ними або під дією зовнішньої сили. Явища синхронізації широко розповсюджені як у природних, зокрема біологічних, так і в створених та керованих людиною техногенних мережевих системах [6]. Про важливість вивчення задач синхронізації свідчить, наприклад, актуальність вирішення проблеми виникнення заторів на автошляхах великих міст. Порушення синхронного руху автотранспортних засобів є однією з основних причин виникнення таких заторів. Врахування руху потоків дозволяє удосконалити запропоновану Курамото [7] та розвинену пізніше іншими авторами модель колективної синхронізації мережі великої кількості пов'язаних між собою осциляторів (вузлів мережі). А саме, у випадку неперервних потоків ця модель матиме вигляд:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \omega_i + (1 - \alpha) \zeta_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b_{ij}(t) \sin(\theta_j - \theta_i),$$

де θ_i – фаза i -го вузла (осцилятора) мережі, ω_i – власна частота i -го вузла, α – рівень впорядкованості руху потоків у мережі ($\alpha=1$ для повністю впорядкованого та $\alpha=0$ для неупорядкованого руху [1]), ζ_i – рівень шуму у i -му вузлі, $b_{ij}(t)$ – елементи потокової матриці суміжності [1], $b_{ij}(t)/N$ – сила зв'язку між вузлами n_i та n_j , N – кількість вузлів мережі, $t \in [0, T]$. Для найпростішого випадку, який досліджується у ТСМ $\alpha=1$ та $b_{ij}(t) = k_{ij} = \text{const}$ (у моделі Курамото [7] $k_{ij} = 1$). У пропонуваній нами моделі синхронізація системи забезпечується синхронізацією руху потоків у мережі, а сила зв'язку між вузлами набуває предметного значення. Дійсно, чим більше потоків проходить між вузлами, тим сильніший зв'язок між ними.

Проблема синхронізації тісно пов'язана із впорядкованістю руху потоків в системі. У випадку повністю впорядкованого руху синхронізація дозволяє оптимізувати графік руху, зокрема переконатись у тому, наскільки впорядкований рух є синхронізованим. Для частково впорядкованого руху синхронізація дозволяє узгодити рух впорядкованої частини потоків з неупорядкованою. При цьому, чим ближче значення α до 1, тим простіше провести таке узгодження. Синхронізація неупорядкованого руху є окремою достатньо складною проблемою.

Керованість мережевих систем. Загалом під керованістю розуміють можливість переведення системи із заданого початкового у заданий кінце-

вий стан за визначений проміжок часу. Сьогодні задачі керованості складних мереж та мережевих систем знаходяться на стадії осмислення та формулювання [4]. Наразі вони обмежуються найпростішими лінійними моделями орієнтованих щільних однорідних мереж. Вже зрозуміло, що керованість мережі суттєво залежить від її топології [8]. Найбільш керованими є мережі із впорядкованим та синхронізованим рухом потоків. При цьому вплив системи управління лише на невелику кількість вузлів із високою степінню може забезпечити керованість мережею загалом [9]. Мережеві системи із невпорядкованим рухом потоків є практично некерованими. Про це свідчать, зокрема, численні революції, які відбулися протягом останніх років у країнах північної Африки та Близького Сходу. Спровоковані інформаційними збуреннями у соціальних мережах, вони не залишили поваленим режимам жодних шансів на протидію.

Задачі керованості мережевих систем можна розширити за рахунок вирішення проблем їхнього росту, зокрема збільшення покриття вузлів та зв'язків між ними у заданому напрямку. У реальності проблема росту мережі пов'язана із обмеженістю фінансових, матеріальних та людських ресурсів. Тому постає питання вибору найбільш актуальних напрямків та швидкості росту.

Серед найважливіших проблем, пов'язаних з питанням керованості мережевих систем, можна назвати боротьбу або, навпаки, сприяння розгортанню так званих каскадних явищ [6]. Останні можуть здійснювати як негативний, так і позитивний вплив на об'єкти, включені до складу системи. Серед прикладів негативного впливу можна назвати розповсюдження небезпечних інфекцій. Основний метод боротьби з ними – організація карантину, тобто припинення або суттєве обмеження руху потоків між епідемічною зоною та іншими територіями. До прикладів позитивного впливу можна віднести швидке розповсюдження важливої для широкого кола споживачів інформації, яке здійснюється шляхом організації руху необхідних інформаційних потоків. У зв'язку з цим виникає питання, які вузли та зв'язки мережі потрібно «відключити», щоб припинити розгортання негативних каскадних явищ, і одночасно яким чином здійснити перенаправлення потоків, які через них проходили на шляху від генераторів потоків до їх приймачів. З іншого боку постає питання, які вузли та зв'язки мережі слід покрити, щоб сприяти якнайшвидшому та найширшому розгортанню позитивних каскадних явищ.

Локальні зв'язки та шляхи у мережевих системах. ТСМ загалом оперує зв'язками між двома вузлами, які ми називатимемо локальними. Однак, вузли мережі нерідко бувають пов'язані і зв'язками-шляхами. Під шляхом ми розумітимемо зв'язок між вузлом – генератором потоку та вузлом – приймачем потоку, який здійснюється через послідовність вузлів – посередників, які забезпечують рух цього потоку. Зазвичай вузли-генератори та вузли-приймачі мають високу степінь (інколи такі вузли назива-

ють «зірками»). Якщо «зірки» мережі переважно пов'язані шляхами, такі мережі називають дисасортативними. Якщо ж «зірки» мережі переважно пов'язані локальними зв'язками, то такі мережі називають асортативними. Поняття асортативності реальної мережі важливо враховувати при побудові її математичної моделі. Так більшість соціальних мережевих систем (мереж із невпорядкованим рухом потоків) є асортативними. У той же час більшість біологічних та технологічних систем (мереж із повністю або частково впорядкованим рухом потоків) є дисасортативними. Аналізуючи реальні мережі можна зробити висновок, що чим вищий рівень дисасортативності системи, тим більшої впорядкованості руху потоків та їх синхронізації вона потребує.

Проаналізувавши велику кількість існуючих публікацій та беручи до уваги сказане вище ми можемо зробити **висновок**, що теорія складних мереж та мережевих систем знаходиться на стадії становлення. Вона все ще вимагає розвитку понятійного апарату, формулювання задач, які потребують свого розв'язання та розвитку прикладних аспектів свого застосування. Врахування руху потоків у мережі дозволяє не лише збагатити проблематику TCM, але й наблизити її до проблематики теорії систем та системного аналізу (провести класифікацію мережевих систем, ідентифікувати цілі їхнього створення та розвитку, визначити функції, які сприяють реалізації цих цілей, вирішувати проблеми управління тощо).

1. *Поліщук О.Д.* Складні мережі та мережеві системи: I. Потоківі характеристики // Див. цей збірник.
2. *Polishchuk D., Polishchuk O., Yadzhak M.* Complex evaluation of hierarchically-network systems // *Automatic Control and Information Sciences.* – 2014. – Vol. 2, No. 2, P. 32-44.
3. *Novikov A.V., Benderskaya E.N.* Oscillatory neural networks based on the Kuramoto model for cluster analysis // *Pattern Recognition and Image Analysis.* – 2014. – Vol. 24(3). – P. 365-371.
4. *Liu Y.-Y., Slotine J.-J., Barabasi A.-L.* Controllability of complex networks // *Nature.* – 2011. – Vol. 473. – P. 167-173.
5. *Albert R., Barabasi A.-L.* Statistical mechanics of complex networks // *Review of Modern Physics.* – 2002. – Vol. 74(1), 47.
6. *Евин И.А.* Введение в теорию сложных сетей // *Компьютерные исследования и моделирование.* – 2010. – Т.2, №2. – С. 121-141.
7. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations waves, and turbulence. – Springer-Verlag Berlin Neidelberg New York Tokyo, 1984. – 157p.
8. *Newman M., Barabasi A.-L., Watts D.J.* The structure and dynamics of networks. – Princeton University Press, 2006. – 397 p.
9. *Yu W., Chen G., Lu J.* On pinning synchronization of complex networks // *Automatica.* – 2009. – Vol. 45. – P. 429-435.

УДК 532.546: 626

В.Л. Поляков, Ю.І. Калугін, С.М. Курганська, О.В. Харламова

(Інститут гідромеханіки НАН України)

**ПРО ІНФОРМАЦІЙНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РОЗРАХУНКІВ
НЕУСТАЛЕНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ НА ФОНІ ДРЕНАЖУ**

При моделюванні дії дренажу у відповідальні періоди, коли ґрунт перезволожений або переосушений, великого значення поряд з характеристиками пропускної здатності (коефіцієнти фільтрації), геологічної структури (потужності шарів водоносної товщі) набувають характеристики водообміну (функції водовіддачі і нестатку насичення, коефіцієнти осереднених водовіддачі і водонасичення). Останні вивчались недостатньо, причому тільки експериментальними методами. Теоретичні ж дослідження характеристик водообміну фактично не проводились через і обмеженість інформації про гідрофізичні властивості ґрунтів, і значні труднощі при чисельній реалізації суттєво нелінійних задач вологопереносу.

Друга частина інформаційного забезпечення розрахунку дренажу перш за все включає групу параметрів, які відображають його конструктивні і технологічні особливості, а саме, розташування і розміри дрен, напір в них, водоприймальну здатність, засоби захисту від замулення і т.ін. На відмінність від фільтраційних параметрів вони з метою оптимізації дії дренажу можуть варіюватися при його проектуванні і експлуатації. Рациональний вибір конструктивних параметрів здійснюється, виходячи із спеціальних критеріїв. Їх виконання по суті гарантує вирішення поставленої перед дренажем практичної задачі. Наприклад, осушувальний дренаж повинен забезпечувати в критичні за водністю періоди відвід надлишкової вологи в задані терміни. Тоді відповідними критеріальними параметрами є норма і час осушення.

Дана робота присвячена аналізу переважно чисельними методами насичено-ненасиченої течії рідини в колонці однорідного ґрунту і спрямована на встановлення вищезгаданих характеристик водообміну, виявлення при цьому їх зв'язку з положенням рівня ґрунтових вод (РГВ), швидкістю його зниження v_H . Завдяки доступності накопиченого значного матеріалу по гідрофізичним характеристикам тепер є реальна можливість створити досить повний банк даних по характеристикам водообміну, який би відображав різноманітність дисперсних пористих середовищ, а також умови регулювання їх водного режиму. І природньо, що при цьому перевагу було віддано найбільш популярній в ґрунтознавстві і інших суміжних науках міжнародній класифікації ґрунтів, яка містить 12 класів. Вказана класифікація дороблена з

урахуванням особливостей ґрунтово-гідрогеологічних умов в Україні. Зокрема, деталізовані два класи ґрунтів – піщаних з виділенням трьох різновидів (крупнозернисті, середньозернисті і дрібнозернисті), глинистих з виділенням легкого різновиду. Разом з цим як окремий клас будуть розглянуті мінеральні (черноземи) і органічні (торф'яні) ґрунти з великим вмістом органіки.

Теоретичні дослідження динаміки вологи і РГВ початі і будуть продовжені на базі моделі вертикальної неусталеної течії рідини з повним і неповним насиченням, яка включає широко відоме рівняння для всмоктуючого тиску ψ (в насиченій зоні воно може інтерпретуватися як від'ємний п'єзометричний тиск)

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial K}{\partial z} = C(\psi) \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1)$$

і, крім цього, умову, яка контролює водобмін постійною швидкістю ε з атмосферою (інфільтрацію),

$$z = M, \quad K(\psi) - K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} = \varepsilon. \quad (2)$$

Тут K – коефіцієнт вологопровідності, C – коефіцієнт диференціальної вологоємності, M – висота колонки ґрунту з регульованим РГВ, початок вертикальної осі знаходиться в її основі. Для функціональних коефіцієнтів $K(\psi)$, $C(\psi)$ приймалися найбільш апробовані емпіричні функції

$$\theta_d = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left(1 + \alpha^n \psi^n\right)^{\frac{n-1}{n}}}, \quad (3)$$

$$K(\psi) = k_s \left[\frac{S}{\int_0^S \left(\xi^{\frac{n}{1-n}} - 1 \right)^{-\frac{1}{n}} d\xi} \right]^m \left(\frac{1}{\int_0^1 \left(\xi^{\frac{n}{1-n}} - 1 \right)^{-\frac{1}{n}} d\xi} \right)^{-m}, \quad (4)$$

де θ , θ_r – поточна і залишкова вологості ґрунту; θ_s – вологість насичення; α , n – емпіричні коефіцієнти; k_s – коефіцієнт фільтрації,

$S = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$. У вихідному стані осушуваний ґрунт потужністю M

повністю насичений водою, а тиск в ньому розподіляється згідно гідростатичного закону

$$t = 0, \quad \psi = z - M. \quad (5)$$

Єдиний розв'язок даної задачі забезпечувався прийняттям сталої швидкості переміщення РГВ v_H , тобто

$$v_H = \text{const}. \quad (6)$$

Умова (6) суттєво полегшила оцінку впливу швидкості v_H на характеристики водообміну.

При інтенсивному осушенні (зволоженні) ґрунту швидкість водообміну між насиченою і ненасиченою зонами виправдано вважати пропорційною v_H , а саме,

$$w = \mu v_H. \quad (7)$$

Тут коефіцієнт μ в дійсності є функцією перш за все від положення РГВ (відмітка H), а також v_H . З (7) із врахуванням (6) випливає

$$\mu(H, v_H) = \frac{w(H, v_H)}{v_H}. \quad (8)$$

Результати чисельних розв'язків використовувались, по-перше, для прямого визначення по суті еталонної величини μ , по-друге, для обґрунтування її наближення в наступному вигляді

$$\mu(H, v_H) = \lambda(v_H) \mu_0(H). \quad (9)$$

Для μ_0 вибраний вираз, який згідно з (3)

$$\mu_0(H) = \left(1 + \alpha^n (M - H)^n\right)^{\frac{1-n}{n}}, \quad (10)$$

а для $\lambda(v_H)$ також вираз

$$\lambda(v_H) = \frac{1}{(a \cdot v_H + 1)}. \quad (11)$$

В інженерних розрахунках дренажу, як правило, замість $\mu(H, v_H)$ застосовується її осереднений аналог μ_c , який містить H в якості параметру

$$\mu_c(H) = \frac{1}{M - H} \int_H^M \mu(\xi) d\xi. \quad (12)$$

Характеристики водонасичення ґрунту, які необхідні для моделювання підґрунтового зволоження, знаходились також на базі моделі (1)-(6) після заміни (5) на умову

$$t = 0, \quad \psi = z - H^0 \quad (M > H^0 \geq 0) \quad (13)$$

по описаному вище алгоритму. Для врахування гистерезису залежності $\theta(\psi)$ функція (3) перераховувалась у відповідності з рекомендаціями Муалема для умов зволоження ґрунту.

Методологія теоретичного обґрунтування характеристик міжзонного водообміну застосована до репрезентативного глинистого ґрунту, який займає останнє місце в авторитетній класифікації ґрунтів ФАО. Завдяки усередненню зібраного і потім обробленого за допомогою (3) великого експериментального матеріалу для кожного її класу запропонований

єдиний набір модельних параметрів α , n , θ_s , θ_r , k_s . В наших розрахунках були задіяні відповідно такі їх значення: 0.008 см^{-1} , 1.09 , 0.38 , 0.068 , $0.048 \text{ м} \cdot \text{доба}^{-1}$. Результати чисельних розрахунків швидкості w при дискретно змінній швидкості v_H в першу чергу використані для безпосереднього встановлення функцій $\mu(H, v_H)$ стосовно умов осушення вибраного ґрунту. Також на їх основі конкретизовано апроксимаційне представлення для функції $\lambda(v_H)$ (11). Сімейства еталонних і наближених графіків залежності $\mu(H, v_H)$ при зниженні РГВ показані на рис.1 і 2. Очевидно, що використання простого аналітичного виразу (9) дозволяє забезпечувати високу точність наближення результатів чисельних розрахунків w , μ , μ_c елементарними функціями і є перспективним при розробці спеціального банку даних по характеристикам міжзонного обміну.

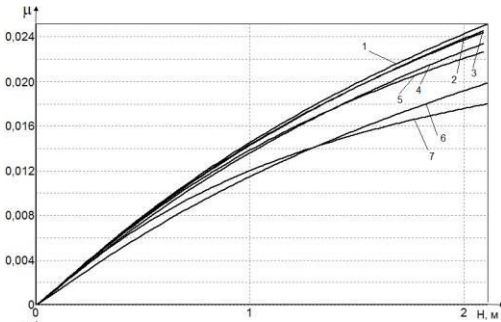


Рис. 1. Залежність $\mu(H)$: 1 – $v_H = 0$; 2, 3 – $v_H = 0.02$; 4, 5 – $v_H = 0.1$; 6, 7 – $v_H = 0.5 \text{ м/доба}$; 2, 4, 6 – чисел.; 3, 5, 7 – апрокс.

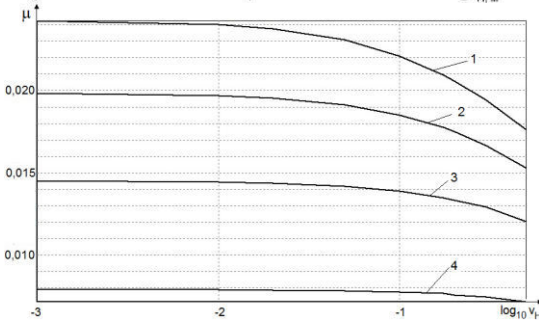


Рис. 2. Залежність $\mu(v_H)$: 1 – $H = 2$, 2 – $H = 1.5$, 3 – $H = 1$, 4 – $H = 0.5 \text{ м}$.

ФУНКЦІЇ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА СПОСОБИ ЇХ АНАЛІТИЧНОГО ЗАДАВАННЯ

Коли мова йде про періодичні функції, то при цьому без будь яких застережень вважається, що їх період є постійним. Проте така думка цілком справедлива для аналітично заданих періодичних функцій. У випадку емпіричних функцій зустрічаються такі, що їх період вже не є обов'язково постійним, а може певним чином змінюватися. Приклад – електрокардіограми, отримані після дії того чи іншого збудника, найпростіше – фізичного навантаження.

Яким чином вивчати функції зі змінним періодом, в першу чергу емпіричні функції (за термінологією Лузіна – безформульні функції)?

Основоположні здобутки тут вже зроблені. В роботі [1] було введено означення функцій зі змінним періодом. Нагадаємо його. Функція $f(x)$ дійсного аргументу $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ називається **функцією із змінним періодом** (ФЗП), якщо існує така диференційовна функція $T(x) > 0$, що для всіх $x \in I$ таких, що $x + T(x) \in I$, виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)).$$

Функція $T(x)$ називається змінним періодом.

Із цього визначення випливає, що при $T(x) = T = \text{const}$ $f(x)$ є періодичною функцією з періодом T .

Вважатимемо надалі, що область визначення $I = [a, b]$ в кожному конкретному випадку повинна уточнюватися, що буде зустрічатися нижче.

Крім наведеного вище означення функції із змінним періодом та виявлення деяких властивостей змінних періодів (виявляється, для функції із змінним періодом таких періодів є два), в [2] розглянуті приклади елементарних ФЗП, якими є тригонометричні функції $\sin x^\alpha, \cos x^\alpha$, $\alpha > 0, \alpha \neq 1$, $x \in I = [0, \infty)$, для цих функцій записані їх змінні періоди: $T(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$, $x \in [0, \infty)$, $T^-(x) = x + (x^\alpha - 2\pi)^{1/\alpha}$, $x \in [T(0), \infty)$. Також показано, що тригонометрична система функцій $\sin kx^\alpha, \cos kx^\alpha$, $x \geq 0$, $\alpha > 0$, $k = 1, 2, \dots$, змінний період якої

$T(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$, є ортогональною на інтервалі $[x, x + T_\alpha(x)]$, $x > 0$, із ваговою функцією $\rho_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Наведені вище результати є підставою для розробки теорії рядів Фур'є ФЗП, методів їх спектрального аналізу тощо. Звичайно, що при цьому обов'язково виникнуть питання перевірки тих чи інших положень теорії на конкретних прикладах з використанням для цього ФЗП, які були б задані аналітично. Однак на даний час способи (методи) аналітичного задання функцій зі змінним періодом відсутні, за винятком згаданих вище тригонометричних ФЗП.

Мета роботи – провести аналіз існуючих способів аналітичного задання періодичних функцій та запропонувати способи аналітичного задання функцій із змінним періодом і записати формули (вирази) їх змінних періодів.

Способи задання періодичних функцій. Аналіз літературних джерел показує, що відомі способи задання періодичних функцій (зі постійним періодом) умовно можна розділити на три групи. Це графічно-описові методи, методи «зсуву» (паралельного переносу) та аналітичні методи. Зупинимось лише на огляді деяких аналітичних методів, даючи їм назви відповідних функцій.

- Показникова функція: $f(x) = a^{g(x)}$, де $a > 0$, $g(x)$ – тригонометрична функція, найчастіше $g(x) = \sin x$ ($\cos x$).
- Степенева функція: $f(x) = (g(x))^a$, $a > 0$, $g(x)$ – тригонометрична функція.
- Модуль функції: $f(x) = |g(x)|$, де $g(x)$ – тригонометрична функція. В більш загальному випадку $f(x) = h(|g(x)|)$, $h(\bullet)$ є неперервна функція.
- Знак (сигнум) функції: $f(x) = \text{sign } g(x)$, $g(x)$ – тригонометрична функція.
- Дробова частина: $f(x) = g(\{x\})$, де $g(\bullet)$ – неперервна зростаюча (спадна) функція, $\{x\}$ – дробова частина числа x .

Способи аналітичного задання періодичних функцій легко продовжити.

Способи задання періодичних функцій із змінним періодом. Кожний із цих способів – це певним чином побудована суперпозиція спеціально підібраних функцій. Ось деякі функції із змінним періодом, що задаються аналітично.

- Показникова функція: $f(x) = a^{g(x)}$, де число $a > 0$, $g(x)$ – тригонометрична функція із змінним періодом, найчастіше $g(x) = \sin x^\alpha$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, або $g(x) = \cos x^\alpha$.

- b) Степенева функція: $f(x) = (g(x))^a$, де число a та функція $g(x)$ такі ж, як і в пункті а).
- c) Модуль функції: $f(x) = |g(x)|$, $g(x)$ – тригонометрична функція із змінним періодом.
- d) Знак (сигнум) функції: $f(x) = \text{sign } g(x)$, $g(x)$ – тригонометрична функція із змінним періодом.
- e) Дробова частина: $f(x) = \{g(x)\}^a$, де $a > 0$, $\{\bullet\}$ – дробова частина, $g(x)$ – деяка нелінійна, неперервна, зростаюча (спадна) функція.

Як і у випадку з періодичними функціями, способи аналітичного задання функцій із змінним періодом можна продовжити.

Розглянемо приклади деяких функцій із змінним періодом, заданих аналітично.

Приклад 1. Степенева функція $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + \frac{1}{2}\right)^2$ (рис.1), її

змінний період $T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$ (рис.3).

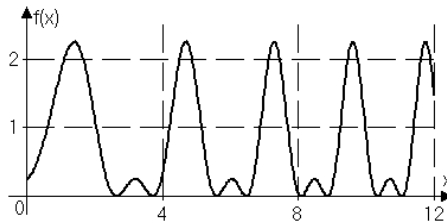


Рисунок 1. Графік функції $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + \frac{1}{2}\right)^2$

Приклад 2. Суперпозиція степеневої функції та функції «дробова частина»: $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$. Графік цієї функції (рис.2) – це коливань

пилкоподібної форми із періодом $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 1\right)^{5/3}$ (рис.3).

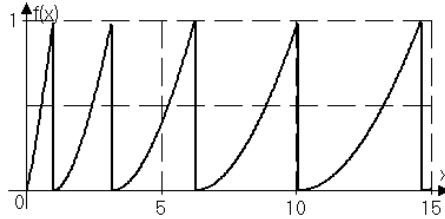


Рисунок 2. Графік функції $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$.

Приклад 3. Суперпозиція логарифмічної функції та функції «дробова частина»: $f(x) = \{\log_c x\}$, $x \geq 1, c > 1$. Для цієї функції її змінний період $T(x) = x(c-1)$, тобто є лінійною функцією із коефіцієнтом $k = c-1$.

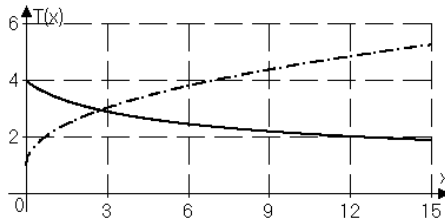


Рисунок 3. Графіки змінних періодів $T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$ – суцільна

лінія та $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 1\right)^{5/3}$ – штрих-пунктирна лінія

В роботі проведено огляд існуючих способів аналітичного задання періодичних функцій, запропоновано способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом. Наведено приклади аналітично заданих функцій зі змінним періодом та записано їх змінні періоди. Отримані результати можуть бути використані при перевірці теорії рядів Фур'є функцій зі змінним періодом.

1. *Приймак М.В.* Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом / Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №2. – С. 132-141.
2. *Василенко Я.П.* Клас функцій із змінним періодом / Василенко Я.П., Дмитроца Л.П., Приймак М.В. // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. – №1105. – Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2014. – Випуск 24. – С. 21-32.

О. Я. Прядко, Г. Г. Цегелик

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

МОДЕЛІ ОБСЯГУ КРЕДИТУВАННЯ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПРОЦЕНТНОЇ СТАВКИ

У сучасних умовах розвитку ринкових відносин в Україні одним з основних макроекономічних завдань кредитування банками є отримання максимального прибутку при мінімальних витратах. Ослаблення банківської системи України через посилення негативного впливу світової фінансової кризи певною мірою сприяло переоцінці кредитних ризиків і зміні механізмів їх виявлення. У працях [1, 2] використано метод динамічного програмування для розв'язування таких задач, як оптимальний розподіл кредитів банку з мінімальною величиною ризику та оптимальний розподіл інвестиційних коштів банку для фінансування проектів. У праці [3] розв'язано двокритеріальну задачу банківського кредитування, за якого одночасно треба максимізувати прибуток від кредитування і мінімізувати кредитний ризик методом динамічного програмування і модифікованим методом послідовних поступок. У праці [4] розглянуто використання методу послідовних поступок для розв'язання двокритеріальної задачі банківського кредитування, який дає можливість знайти такий компромісний розподіл кредитних коштів банку між позичальниками, за якого банк отримає певний прибуток з невеликим ризиком.

За останні роки збитки, які виникли в кредитній діяльності банків, були спричинені в наслідок несплати відсотків за користування кредитами та не повернення самих кредитів. Кредитна операція являє собою акт комерційного продажу на певний час грошових коштів, а в умовах ринкових відносин процент є об'єктивним супутником кредиту, його складовою ланкою. Зміна загального рівня процентної ставки по активних операціях банку є одним із напрямків підвищення прибутковості банку [5]. Відсоток виражає споживчу вартість позичкового капіталу та виступає як частина доданої вартості, що виплачується позичальником власнику цього капіталу [6]. При визначенні конкретної величини відсоткової ставки комерційний банк повинен врахувати, що процентна ставка за кредитом повинна бути:

- 1) достатньо високою для отримання доходів за кредитом та компенсації всіх ризиків;
- 2) достатньо низькою для того, щоб клієнт міг успішно погасити кредит;
- 3) повністю покривати вартість залучених коштів;
- 4) зацікавити клієнтів такою відсотковою ставкою, при якій вони брали б кредити саме в цьому банку [7].

В доповіді розглядається задача визначення процентної ставки за кредити, за якої прибуток від кредитування буде найбільший.

Нехай

x – процентна ставка на кредити,

$y = y(x)$ – обсяг кредитування при процентній ставці x ,

$y(x)x$ – прибуток банку при процентній ставці x .

Очевидно, що при зростанні процентної ставки обсяг кредитування зменшується. В зв'язку з цим розглянемо три можливі випадки представлення функції $y(x)$:

1) $y(x) = -ax + b$ – лінійне представлення;

2) $y(x) = -ax^\beta + b$, де $0 < \beta < 1$, – степеневе представлення;

3) $y(x) = -ax^2 + b$ – квадратичне представлення.

В усіх випадках $a > 0$, $b > 0$. Величина b представляє загальний обсяг кредитних коштів, виділених банком для кредитування. В кожному випадку визначимо процентну ставку, за якої прибуток банку буде найбільший.

1. Якщо $y(x) = -ax + b$, то прибуток банку

$$P(x) = -ax^2 + bx.$$

Геометрично представляє параболу гілками вниз. Тому існує єдина точка (єдине значення процентної ставки), за якої $P(x)$ досягає максимуму.

Оскільки

$$P'(x) = -2ax + b,$$

то значення процентної ставки, за якої $P(x)$ досягає максимуму є

$$x = \frac{b}{2a}.$$

2. Якщо $y(x) = -ax^\beta + b$ то прибуток банку

$$P(x) = -ax^{\beta+1} + bx.$$

Оскільки

$$P'(x) = -a(\beta+1)x^\beta + b,$$

$$P''(x) = -a(\beta+1)\beta x^{\beta-1} < 0,$$

то значення процентної ставки, за якої $P(x)$ досягає максимуму є

$$x = \sqrt[\beta]{\frac{b}{a(\beta+1)}}.$$

3. Якщо $y(x) = -ax^2 + b$, то прибуток банку

$$P(x) = -ax^3 + bx.$$

Оскільки

$$P'(x) = -3ax^2 + b,$$

$$P''(x) = -6ax < 0,$$

то значення процентної ставки, за якої $P(x)$ досягає максимуму є

$$x = \sqrt{\frac{b}{3a}}.$$

Розглянуто задачу визначення процентної ставки на кредити, за якої прибуток банку буде найбільшим. При цьому розглянуто три випадки залежності обсягу кредитування від процентної ставки на кредити: лінійну, степеневу і квадратичну. В кожному випадку визначено процентну ставку на кредити, за якої прибуток банку буде найбільшим.

Проведено порівняльний аналіз ефективності трьох можливих випадків залежності обсягу кредитування від процентної ставки на кредити і визначено, за якої залежності банк буде мати найбільший прибуток.

1. *Прядко О.Я.* Задача розподілу кредитних коштів банку з мінімальною величиною ризику / О.Я. Прядко, Г.Г. Цегелик // Наук. журн. «Вісник Хмельницького національного університету». Економ. науки. – 2010. – Т. 4, № 4 – С.123-126.
2. *Прядко О.Я.* Використання методу динамічного програмування для розв'язування задачі оптимального розподілу інвестиційних коштів банку для фінансування проектів / О.Я. Прядко, Г.Г. Цегелик // Вісник Львів. ун-ту, Серія екон. – 2009. – Вип. 41. – С.56-60.
3. *Прядко О.Я.* Метод послідовних поступок для розв'язування двокритеріальної задачі банківського кредитування / О.Я. Прядко, Г.Г. Цегелик // Наук. журн. «Вісник Хмельницького національного університету». Економ. науки. – 2012. – Т. 2, №5 – С.117 – 123.
4. *Прядко О.Я.* Двокритеріальна задача банківського кредитування / О.Я. Прядко, Г.Г.Цегелик // Праці VII міжнародної школи-семінару школи-семінару «Теорія прийняття рішень» (29 вересня - 4 жовтня 2014 р.). – Ужгород, УжНУ, 2014. – С.212 – 213.
5. *Криклій О.А.* Управління прибутком банку: Монографія / О.А. Криклій, Н.Г. Маслак – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2008. -136 с.
6. *Дзюблюк О.В.* Банківські операції: Підручник / О.В. Дзюблюк – Тернопіль: «Економічна думка», 2009. – 696 с.
7. *Маслак Н.Г.* Ціноутворення на банківські продукти: Монографія / Н.Г. Маслак, О.А. Криклій – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2010. -121 с.

АЛГОРИТМІЧНІ АСПЕКТИ РЕАЛІЗАЦІЇ FD-МЕТОДУ ДЛЯ ЗАДАЧІ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Вступ. Протягом останніх років для наближеного розв'язання задач на власні значення широко застосовуються аналітичні (функціональні) методи, які базуються на методі гомотопії і дозволяють знаходити розв'язки у вигляді швидкозбіжних функціональних рядів. Це, наприклад, Homotopy Perturbation Method (**HPM**) [2], Homotopy Analysis Method (**HAM**) [1], Adomian Decomposition Method (**ADM**) [3] та ін. Функціональні методи потребують виконання складних та громіздких аналітичних перетворень, тому для них актуальною є розробка алгоритмів більш ефективних та менш затратних з точки зору обчислювальних ресурсів.

Спорідненим за ідеологією із згаданими методами є функціонально-дискретний метод (**FD-метод**) (див., напр., [7, 8, 12, 13]), який на відміну від них містить в собі дискретну складову, за допомогою якої можна досягати збіжності у випадках, коли HPM, HAM, ADM є розбіжними.

Постановка задачі. Розглянемо регулярну задачу на власні значення для звичайного диференціального рівняння четвертого порядку:

$$u^{(4)}(x) + q_2(x)u''(x) + q_1(x)u'(x) + (q_0(x) - \lambda)u(x) = 0, \quad x \in (0, X), \quad (1)$$

$$u(0) = u''(0) = u(X) = u''(X) = 0, \quad 0 < X < \infty, \quad (2)$$

$$q_0(x) = \sum_{l=0}^{r_0} A_l x^l, \quad q_1(x) = \sum_{l=0}^{\eta_1} B_l x^l, \quad q_2(x) = \sum_{l=0}^{r_2} C_l x^l, \quad r_s \geq 1, \quad s = 0, 1, 2.$$

Для неї в [7, 8] (при $X = 1$) обґрунтовано алгоритм FD-методу з вибором функцій $\bar{q}_s(x)$, $s = 0, 1, 2$, що наближають коефіцієнти рівняння $q_s(x)$, $s = 0, 1, 2$, тотожно рівних нулю: $\bar{q}_s(x) \equiv 0$, $s = 0, 1, 2$ і знайдено достатні умови його експоненціальної збіжності та оцінки точності FD-методу. Наближення m -го рангу до розв'язку задачі (1), (2) має вигляд:

$$\lambda_n^{(m)} = \sum_{j=0}^m \lambda_n^{(j)}, \quad u_n^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^m u_n^{(j)}(x), \quad (3)$$

члени яких визначаються як розв'язки рекурентної послідовності задач:

$$\frac{d^4}{dx^4} u_n^{(j+1)}(x) - \lambda_n^{(0)} u_n^{(j+1)}(x) = F_n^{(j+1)}(x), \quad x \in (0, X), \quad j = -1, \overline{0, m-1}, \quad F_n^{(0)} = 0, \quad (4)$$

$$F_n^{(j+1)}(x) \equiv \sum_{p=0}^j \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)}(x) - q_2(x) \frac{d^2}{dx^2} u_n^{(j)}(x) - q_1(x) \frac{d}{dx} u_n^{(j)}(x) - q_0(x) u_n^{(j)}(x),$$

$$u_n^{(j+1)}(0) = \frac{d^2 u_n^{(j+1)}(0)}{dx} = u_n^{(j+1)}(X) = \frac{d^2 u_n^{(j+1)}(X)}{dx} = 0, \quad (5)$$

$$\lambda_n^{(j+1)} = \int_0^X \left(q_2(x) \frac{d^2}{dx^2} u_n^{(j)}(x) + q_1(x) \frac{d}{dx} u_n^{(j)}(x) + q_0(x) u_n^{(j)}(x) \right) u_n^{(0)}(x) dx, \quad (6)$$

$$u_n^{(0)}(x) = \sqrt{2/X} \sin(n\pi x/X), \quad \lambda_n^{(0)} = (n\pi)^4 / X^4,$$

$$\int_0^X u_n^{(j+1)}(x) u_n^{(0)}(x) dx = 0, \quad j = \overline{0, m-1}.$$

Представлення розв'язку та новий алгоритм FD-методу.
Використаємо ідеї робіт [12, 13] для розв'язування задачі (1), (2).

Ввівши узагальнену функцію Гріна:

$$g_n(x, \xi) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2X^3 \sin(p\pi x/X) \sin(p\pi \xi/X)}{\pi^4 (p^4 - n^4)}, \quad x, \xi \in [0, X],$$

при фіксованому j розв'язок задачі (4), (5) можна записати у вигляді:

$$u_n^{(j+1)}(x) = \int_0^X g_n(x, \xi) F_n^{(j+1)}(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Теорема. Справедливими є такі структурні представлення поправок до власних функцій:

$$u_n^{(j+1)}(x) = \sum_{p=0}^{(j+1)(r+1)} x^p \left[b_p^{(j+1)} \cos(\pi n x/X) + a_p^{(j+1)} \sin(\pi n x/X) \right] + \quad (8)$$

$$+ \sum_{p=0}^{j(r+1)} x^p \left[d_p^{(j+1)} \cosh(\pi n x/X) + c_p^{(j+1)} \sinh(\pi n x/X) \right], \quad j = 0, 1, \dots,$$

де $r = \max\{r_0, r_1, r_2\}$, $a_0^{(0)} = \sqrt{2/X}$, $b_0^{(0)} = d_0^{(0)} = c_0^{(0)} = 0$.

Доведення теореми 1 проведено методом повної математичної індукції.

Із (8) та (7) отримано рекурентні формули для коефіцієнтів $b_p^{(j+1)}$, $a_p^{(j+1)}$, $d_s^{(j+1)}$, $c_s^{(j+1)}$, $p = \overline{0, (j+1)(r+1)}$, $s = \overline{0, j(r+1)}$, виражені через коефіцієнти на попередньому кроці FD-методу. Наприклад:

$$b_{(j+1)(r+1)}^{(j+1)} = \left[B_r b_{j(r+1)}^{(j)} \pi n / X - (A_r - C_r (\pi n / X)^2) a_{j(r+1)}^{(j)} \right] (X / \pi n)^3 / (4(j+1)(r+1)),$$

$$a_{(j+1)(r+1)}^{(j+1)} = \left[B_r a_{j(r+1)}^{(j)} \pi n / X + (A_r - C_r (\pi n / X)^2) b_{j(r+1)}^{(j)} \right] (X / \pi n)^3 / (4(j+1)(r+1)),$$

$$d_{j(r+1)}^{(j+1)} = - \left[B_r d_{(j-1)(r+1)}^{(j)} \pi n / X + (A_r + C_r (\pi n / X)^2) c_{(j-1)(r+1)}^{(j)} \right] (X / \pi n)^3 / (4j(r+1)),$$

$$c_{j(r+1)}^{(j+1)} = - \left[B_r c_{(j-1)(r+1)}^{(j)} \pi n / X + (A_r + C_r (\pi n / X)^2) d_{(j-1)(r+1)}^{(j)} \right] (X / \pi n)^3 / (4j(r+1)).$$

Підставивши (8) у вираз (6) для $\lambda_n^{(j+1)}$, отримано зручні формули для обчислення поправок до власних значень.

Отже, отримано формули для поправок $\lambda_n^{(j+1)}$, $u_n^{(j+1)}$, $j = 0, 1, \dots$, які не потребують ані обчислення інтегралів, ані розв'язання відповідних

крайових задач згідно з формулами (4)-(7) та містять тільки звичайні алгебраїчні операції. Це дало змогу за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple 17 здійснити ефективну програмну реалізацію FD-методу для задач (1), (2), що успішно проілюстровано на чисельних прикладах.

Приклад. Розглянемо задачу (1), (2) з

$$X = 5, \quad q_2(x) = -0.02x^2, \quad q_1(x) = -0.04x, \quad q_0(x) = 0.0001x^4 - 0.02,$$

точний розв'язок якої виражається через так звані вироджені гіпергеометричні функції Куммера $M(a, b, z)$, $U(a, b, z)$ (див., напр., [Ch.13, 10]), а відшукування власних значень зводиться до розв'язання трансцендентного рівняння:

$$M(3/4 + 5/2 \cdot \lambda, 3/2, 5/2) M(3/4 - 5/2 \cdot \lambda, 3/2, 5/2) = 0. \quad (9)$$

Використовуючи команду `fsolve`, в системі Maple 17 (Digits=300) із рівняння (9) знайдено перші вісім найменших точних власних значень $\lambda_n^{ex} = \lambda$, $n = \overline{1, 8}$, використовуючи які, виконано їх порівняння із FD-методом рангу $m = 20$ та із наведеними розрахунками в [1-3, 6, 11] згідно із запропонованими в них варіантами методів: HPM [2], HAM [1], ADM [3], Variational Iteration Method (**VIM**) [11], Extended Sampling Method (**ESM**) [6] (див. Табл.).

Таблиця. – Абсолютні похибки наближень методів для λ_n , $n = \overline{1, 8}$.

n	FD-метод, $m = 20$	HPM [2]	HAM [1]	ADM [3]	VIM [11]	ESM [6]
1	1.8e-21	1.6e-16	4.4e-9	4.6e-16	5.8e-16	2.8e-13
2	1.8e-21	1.5e-15	1.1e-6	4.9e-14	1.5e-13	3.0e-12
3	2.4e-28	8.5e-13	4.4e-5	6.5e-13	6.3e-13	4.1e-11
4	9.0e-33	4.5e-11	2.6e-3	2.4e-11	2.4e-11	4.1e-7
5	1.4e-37	2.6e-9	0.35	7.5e-8	7.5e-8	
6	2.8e-39	1.8e-7	11.4	1.2e-3	1.2e-3	
7	9.2e-42			12.73		
8	5.9e-44			215.5		

В Табл. наведено абсолютні похибки згаданих методів. Як видно із Табл., із зростанням номера власного значення точність методів HPM, HAM, ADM, VIM та ESM (за порядком величин абсолютних похибок) швидко погіршується тоді, як вже на 20-му кроці FD-методу досягається точність від 10^{-20} (для $n = 1$) до 10^{-43} (для $n = 8$). Зазначимо, що в роботах [1, 2] аналіз похибок методів для даного прикладу відсутній, в [3, 11] методи порівнюються із чисельними результатами, отриманими за допомогою пакетів прикладних програм SLEUTH [9] та SLEIGN2 [4], а в [6] наведено порівняння з методом Regularized Sampling Method [5] для

відповідної задачі Штурма-Ліувілля другого порядку, до якої зводиться розглядувана задача.

1. *Abbasbandy S.* A new application of the homotopy analysis method: Solving the Sturm–Liouville problems / S. Abbasbandy, A. Shirzadi // *Comm. Nonl. & Sci. Num. Sim.* – 2011. – № 16. – P. 112–126.
2. *Atay M.T.* Computation of Eigenvalues of Sturm–Liouville Problems using Homotopy Perturbation Method / M.T. Atay, S. Kartal // *Int. J. Nonl. Sci. & Num. Sim.* – 2010. – Vol. 11, № 2. – P. 105–111.
3. *Attili B.S.* An efficient method for computing eigenelements of Sturm–Liouville fourth-order boundary value problems / B.S. Attili, D. Lesnic // *Appl. Math. & Comp.* – 2006. – Vol. 182, № 2. – P. 1247–1254.
4. *Bailey P.B.* Algorithm 810: The SLEIGN2 Sturm–Liouville Code / P. B. Bailey, W. N. Everitt, A. Zettl // *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* – 2001. – Vol. 27, №2. – P. 143–192.
5. *Chanane B.* Computation of the eigenvalues of Sturm–Liouville problems with parameter dependent boundary conditions using the regularized sampling method / B. Chanane // *Math. Comp.* – 2005. – Vol. 74, № 252. – P. 1793–1801.
6. *Chanane B.* Accurate solutions of fourth order Sturm–Liouville problems / B. Chanane // *J. Comp. & Appl. Math.* – 2010. – Vol. 234, № 10. – P. 3064–3071.
7. *Gavrilyuk I.P.* Super-exponentially convergent parallel algorithm for eigenvalue problems for the fourth order ODE's / I.P.Gavrilyuk, V.L.Makarov, A.M.Popov // *J. Num. Appl. Math.* – 2010. – Vol. 100, № 1. – P. 60–81.
8. *Gavrilyuk I.P.* Super-exponentially convergent algorithm for an abstract eigenvalue problem with applications to ODEs / I.P.Gavrilyuk, V.L.Makarov, N.M. Romaniuk // *Nonl. Osc.* – 2015. – Vol. 18, № 3. (прийнято до друку).
9. *Marletta M.* Algorithm 775: The Code SLEUTH for Solving Fourth-Order Sturm–Liouville Problems / M. Marletta, L. Greenberg // *ACM Trans. Math. Soft.* – 1997. – Vol. 23, № 4. – P. 453–493.
10. NIST Digital Library of Mathematical Functions [Електронний ресурс] / Online companion to [F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, editors. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, New York, NY, 2010]. – Режим доступу: <http://dlmf.nist.gov/13> (дата звернення 04.09.2015р.)
11. *Syam M.I.* An efficient technique for finding the eigenvalues of fourth-order Sturm–Liouville problems / M.I. Syam, H.I. Siyyam // *Chaos, Sol. & Fract.* – 2009. – Vol. 39, № 2. – P. 659–665.
12. *Макаров В.Л.* Нові властивості FD-методу при його застосуваннях до задач Штурма-Ліувілля /В.Л.Макаров,Н.М.Романюк// Доп.НАНУ.– 2014.– № 2.– С.26-31.
13. *Макаров В.Л.* Новая реализация FD-метода для случая задачи Штурма-Ліувілля с краевыми условиями Дирихле-Неймана / В. Л. Макаров, Н. Н. Романюк // *Тр. Ин-та матем. НАН Белар.*, 2014. – Т.22, №1. – С. 98–106.

П.О. Савенко

(Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України)

СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНА АПРОКСИМАЦІЯ ДІЙСНОЇ НЕВІД'ЄМНОЇ ФУНКЦІЇ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ МОДУЛЕМ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ФУР'Є

1. Середньоквадратична апроксимація фінітних невід'ємних функцій від двох змінних модулем подвійного інтеграла Фур'є, залежного від фізичних параметрів, широко використовується при розв'язуванні обернених задач радіофізики, акустики та ін. [1 - 3]. Задачі такого класу є нелінійними, оскільки із потреб практики виникає необхідність наближення дійсної невід'ємної функції модулем інтеграла Фур'є, й належать до задач з неповною вхідною інформацією, суттєвою особливістю яких є неєдиність і галуження розв'язків. Нижче розглядається варіаційне формулювання цієї задачі з використанням згладжуючого функціонала [4] при наявності обмежень на норму прообразу інтеграла Фур'є. Знаходження розв'язків зводиться до дослідження й чисельного розв'язування нелінійного двовимірного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна залежного від двох фізичних параметрів. Запропоновано й обґрунтовано алгоритми для знаходження ліній можливого галуження розв'язків, в основу яких покладено методи неявних функцій. Побудовано й обґрунтовано алгоритми для чисельного знаходження оптимальних розв'язків задачі апроксимації, наведено числові приклади.

2. Розглянемо лінійний інтегральний оператор

$$f(s_1, s_2) = AU \equiv \iint_G U(x, y) e^{-i(c_1 x s_1 + c_2 y s_2)} dx dy, \quad (1)$$

який є подвійним перетворенням Фур'є функції $U(x, y) \in L_2(G)$, залежним від дійсного двовимірного параметра $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, $0 < c_i < \infty$ ($i = 1, 2$)¹. Оператор U діє з простору $L_2(G)$ у простір $L_2(\Omega)$, де $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – область, в якій задана дійсна неперервна, невід'ємна й відмінна від тотожного нуля функція $F(s_1, s_2)$.

¹ Параметри c_1, c_2 відображають фізичні параметри досліджуваного об'єкта, зокрема, в задачах синтезу антен [2, 3] ці параметри описують електричні розміри розкрити випромінюючої системи.

Розглядається задача про наближення на області $\bar{\Omega}$ дійсної неперервної й невід'ємної функції $F(s_1, s_2)$ модулем інтеграла Фур'є, яку сформулюємо як задачу мінімізації згладжуючого функціонала

$$\sigma_\alpha(U) = \|\tilde{F} - |AU|\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha \|U\|_{L_2(G)}^2 = \|\tilde{F} - |f|\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha \|U\|_{L_2(G)}^2, \quad (2)$$

де перший доданок характеризує середньоквадратичне відхилення модуля інтеграла Фур'є від заданої функції $F(s_1, s_2)$ на області $\bar{\Omega}$, а другий доданок описує норму прообразу інтеграла Фур'є; α — параметр регуляризації.

Рівняння Ейлера-Лагранжа функціонала (2) має вигляд

$$\alpha U = -A^*AU + A^*(Fe^{i \arg AU}), \quad (3)$$

Подівавши на обидві сторони рівняння (3) оператором A , одержуємо еквівалентне до (3) рівняння відносно функції $f(s_1, s_2)$ у просторі $L_2(\Omega)$

$$\alpha f = -AA^*f + AA^*(Fe^{i \arg f}), \quad (4)$$

яке у розгорнутій формі приймає вигляд

$$\alpha f(Q) = Bf = -\iint_{\Omega} K(Q, Q', c) f(Q') dQ' + \iint_{\Omega} K(Q, Q', c) F(Q') e^{i \arg f(Q')} dQ', \quad (5)$$

де

$$K(Q, Q', c) = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint_G \exp[i(c_1 x(s'_1 - s_1) + c_2 y(s'_2 - s_2))] dx dy \quad (6)$$

— ядро, залежне від форми області G . У випадку симетричної області G ядро (6) можна спростити. Зокрема, якщо віссю симетрії області G є вісь OX , а її верхня й нижня межі описуються відповідно функціями $y = \pm \eta(x)$ при $x \in [-1, 1]$, то ядро (6) є дійсним і має вигляд

$$K(Q, Q', c) = \frac{c_1}{2\pi^2} \int_{-1}^1 \cos(c_1 x(s'_1 - s_1)) \frac{\sin(c_2(s'_2 - s_2)\eta(x))}{(s'_2 - s_2)} dx. \quad (7)$$

Лема 1. Між розв'язками рівнянь (3) і (4) існує взаємно однозначна відповідність. Тобто, якщо U_* — розв'язок рівняння (3), то $f_* = AU_*$ — розв'язок рівняння (4). Навпаки, якщо f_* — розв'язок рівняння (4), то

$$U_* = A^* \left\{ -\alpha^{-1} f_* + \alpha^{-1} F \exp(i \arg(f_*)) \right\} \quad (8)$$

– розв’язок рівняння (3).

Завдяки взаємно однозначній відповідності між розв’язками рівнянь (3) і (4) досліджуємо рівняння (4) так як воно не містить оператора в експоненті. Крім того, беручи до уваги, що множина значень оператора A є множиною неперервних функцій [5], належних до простору $L_2(\mathbb{R}^2)$ і, відповідно, до $L_2(\Omega)$, а множина функцій, неперервних на області $\bar{\Omega}$, є щільною в просторі $L_2(\Omega)$ [5], то розв’язки рівняння (4) досліджуємо в просторі $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$.

Теорема 1. Оператор B , визначений за формулою (5), відображає замкнену опуклу множину S_M банахового простору $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ саму в себе і є цілком неперервним.

Як **наслідок** із теореми 1 впливає виконання умов принципу Шаудера [6], згідно з яким оператор B має нерухому точку f_* , яка належить до множини S_M . Ця точка є розв’язком рівняння (5). Підставляючи f_* у рівність (8), одержуємо розв’язок рівняння (3), який є стаціонарною точкою функціонала (2).

Показано, що при довільних значеннях параметрів c_1, c_2 рівняння (5) має два розв’язки у класі дійсних функцій, названих первинними. З ростом цих параметрів від первинних відгалужуються комплексні розв’язки, на яких функціонал (2) набуває менших значень.

Множина значень параметра $\mathbf{c}^{(0)} = \{c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\}$, при яких відбувається розгалуження розв’язків рівняння (5) визначається з лінійного однорідного рівняння

$$\omega(Q) = \alpha^{-1} \iint_{\bar{\Omega}} (F(Q') - f_0(Q', c)) K(Q, Q', c) \frac{\omega(Q')}{f_0(Q', c)} dQ' \quad (9)$$

одержаного з (5) на підставі теорії галуження розв’язків нелінійних рівнянь [7]. Рівняння (9) є двопараметричною нелінійною спектральною задачею, для знаходження розв’язків якої застосовується метод неявної функції, запропонований у працях [8, 9]. Зауважимо, що власні функції рівняння (9) використовуються при побудові відгалужених розв’язків рівняння (5) [3].

Застосовуючи до рівняння (9) розглянемо деякий збіжний кубатурний процес задача знаходження спектральних ліній цього рівняння зводиться до заходження коренів рівняння

$$P(c_1, c_2) = \det(T_{M_n}(c_1, c_2) - I_n) = 0, \quad (10)$$

яку розглядаємо як задачу на знаходження неявно заданої функції $c_2 = c_2(c_1)$, зводячи її до задачі Коші:

$$\frac{dc_{2,i}}{dc_1} = -\frac{P'_{c_1}(c_1, c_{2,i})}{P'_{c_2}(c_1, c_{2,i})}, \quad c_{2,i}(c_{1,i}^{(0)}) = z(c_{1,i}^{(0)}). \quad (11)$$

Початкові умови в (11) знаходимо з відповідної (9) однопараметричної спектральної задачі.

Чисельне знаходження розв'язків рівняння (5) здійснюється ітераційним процесом, побудованим за неявною схемою методу послідовних наближень [10, 11].

Наведено числові приклади апроксимації парних за обома аргументами функцій $F(s_1, s_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{s_1^2 + s_2^2}\right)$ та $F(s_1, s_2) = |\sin \pi s_1| |\sin \pi s_2|$.

Подаються рекомендації щодо вибору параметра регуляризації.

1. *Зелкин Е.Г., Соколов В.Г.* Методы синтеза антенн: Фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрытием. – М.: Сов. радио, 1980. – 256 с.
2. *Савенко П.О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: ІППИМ НАН України, 2002. – 320 с.
3. *Савенко П.О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкриттям. – Львів, ІППИМ НАН України. – 2014. – 314 с.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
6. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
7. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
8. *Савенко П.А., Процах Л.П.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. высш. учеб. завед. Математика. – 2007. № 11 (546). – С. 41-44.
9. *Процах Л.П., Савенко П.О., Ткач М.Д.* Метод неявної функції розв'язування задачі на власні значення з нелінійним двовимірним спектральним параметром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, №3. – С. 41-46.
10. *Savenko P., Tkach M.* Numerical Approximation of Real Finite Nonnegative Function by the Modulus of Discrete Fourier Transformation // Applied Mathematics. – 2010. – Vol. 1, No 1. – P. 41-51.
11. *Savenko P.* Computational Methods in the Theory of Synthesis of Radio and Acoustic Radiating Systems // Applied Mathematics. – 2013. – Vol. 4, No. 3. – P. 523-549.

ТЕОРЕМА ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ ОЦІНКАМИ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ НЕПОВНОГО РАНГУ

Розглянемо модель лінійної регресії

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon},$$

де $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ - відклик,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix} -$$

регресійна матриця розміру $n \times m$ ($n \geq m$), j -й стовпець якої – n спостережень регресора x_j , $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T$ – вектор випадкових відхилень, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$ – вектор невідомих параметрів, який підлягає оцінюванню.

В класичній регресії передбачається, що $\text{rang } X = m$, тобто стовпці матриці X лінійно незалежні.

Найпоширенішим методом оцінювання невідомих параметрів в регресійному аналізі є метод найменших квадратів (МНК), який полягає в мінімізації суми

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2$$

відносно вектора $\vec{\beta}$. Для знаходження оцінки $\vec{\beta}$ маємо систему нормальних рівнянь [1]

$$X^T X \vec{b} = X^T \vec{y}, \quad (1)$$

єдиний розв'язок якої

$$\vec{b} = (X^T X)^{-1} X^T \vec{y},$$

а мінімальне значення $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2$, яке називається залишковою сумою квадратів, дорівнює $\vec{y}^T \vec{y} - \vec{b}^T X^T X \vec{b}$. Вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ називається оцінкою МНК вектора $\vec{\beta}$.

Але в деяких випадках буває, що $\text{rang } X = r$ ($r < m$) (наприклад, при плануванні експерименту елементи матриці вибирають рівними тільки нулю та одиниці, при цьому стовпці матриці можуть виявитися лінійно залежними). Система нормальних рівнянь (1) в цьому випадку має ціле сімейство розв'язків, а величина $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2$ досягає мінімуму при $\vec{\beta} = \vec{b}$, де $\vec{b}$ – будь-який з розв'язків системи (1), причому для кожного ненульового вектора $\vec{y}$ значення $\vec{y}^T \vec{y} - \vec{b}^T X^T \vec{y}$ єдине.

Одним з методів відшукування розв'язку системи у випадку, коли матриця плану має неповний ранг, є метод ідентифікуючих обмежень.

Нехай

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m-r,1} & h_{m-r,2} & \dots & h_{m-r,m} \end{pmatrix}$$

матриця розміру $(m-r) \times m$ така, що матриця

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nm} \\ h_{11} & \dots & h_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m-r,1} & \dots & h_{m-r,m} \end{pmatrix}$$

має ранг m .

Метод ідентифікуючих обмежень полягає в введенні сукупності обмежень вигляду

$$H\vec{\beta} = \vec{\theta}, \quad (2)$$

яка дозволяє запобігти невизначеності при відшуванні розв'язку системи (1).

Розглянемо випадок, коли $r = m - 1$. Матрицю X без обмеження узагальненості можна подати у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,m-1} & \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_{1i} \\ x_{21} & \dots & x_{2,m-1} & \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_{2i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{n,m-1} & \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_{ni} \end{pmatrix},$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ - деякі сталі, а сукупність обмежень (2) перетворюється на

$$h_{11}\beta_1 + \dots + h_{1m}\beta_m = 0. \quad (3)$$

Інший метод відшування розв'язку системи (1) у випадку, коли матриця плану має неповний ранг, полягає в зведенні вихідної моделі до моделі повного рангу.

Позначимо

$$\vec{b}^{(-)} = \left(\vec{X}^T \vec{X} \right)^{-1} \vec{X}^T \vec{y},$$

де

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,m-1} \\ x_{21} & \dots & x_{2,m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{n,m-1} \end{pmatrix}.$$

При цьому

$$X = \vec{X} I^{(\alpha)}, \quad (4)$$

де

$$I^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи факторизацію (4), можна подати $X\vec{\beta}$ у вигляді $X\vec{\beta} = \bar{X}I^{(\alpha)}\vec{\beta} = \bar{X}\vec{\beta}^{(-)}$.

Нехай $\vec{b}^{(H)} = (b_1^{(H)}, b_2^{(H)}, \dots, b_m^{(H)})^T$ – оцінка МНК вектора $\vec{\beta}$ при наявності обмежень (3). В роботі [2] доведено теорему, яка дає зв'язок між оцінками $\vec{\beta}^{(-)}$ та $\vec{b}^{(H)}$.

Теорема. Нехай

$$\vec{\alpha}^{(1)} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, -1)^T;$$

$$\vec{h}_m = (h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1,m-1})^T;$$

$$s = h_{1m} - \alpha_1 h_{11} - \dots - \alpha_{m-1} h_{1,m-1};$$

$I_{m-1}^{(0)}$ – матриця порядку $m \times (m-1)$, перші $m-1$ строк якої утворюють одиничну матрицю, остання строка – нульова.

Тоді

$$\vec{b}^{(H)} = (I_{m-1}^{(0)} + s^{-1} \vec{\alpha}^{(1)} \vec{h}_m^T) \vec{b}^{(-)}.$$

1. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ / Дж.Себер. – Москва: Мир, 1980. – 336 с.
2. Савкіна М.Ю. Оцінювання параметрів лінійної регресійної моделі неповного рангу / М.Ю. Савкіна // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2014. – Вип. 3. – С. 172-175.

УДК 539.3

Я.Г.Савула

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ГЕТЕРОГЕННЕ РІЗНОМАСШТАБНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серед нових підходів до комп'ютерного моделювання об'єктів і процесів у сучасній науці велика увага присвячується гетерогенному різномасштабному моделюванню (Heterogeneous Multiscale Modeling). Це пояснюється тим, що майже всі проблеми в науці та в інженерії є різномасштабними. Вони містять компоненти, які мають розміри від нанометрів до метрів і характеризуються процесами, які тривають від секунд до років. Здебільшого така різномасштабна структура об'єктів і процесів не є перешкодою для створення математичних моделей на макрорівні, проте у ряді випадків, зокрема пов'язаних із нанотехнологіями та наноконструкціями для створення математичних моделей, важливим є одночасне врахування властивостей об'єктів і процесів на різних рівнях масштабу. Такий підхід до математичного моделювання називають різномасштабним моделюванням. Термін гетерогенне стосовно до різномасштабного моделювання означає, що для компонент різного масштабу використовуються різні математичні моделі, які описуються різними математичними засобами.

Відомою є класифікація різномасштабних проблем, згідно з якою значну групу гетерогенного різномасштабного моделювання (ГРМ) становлять проблеми моделювання об'єктів, що містять ізольовані дефекти або особливості такі, як тріщини, дислокації, тонкі включення, покриття, лінії ударів, чи лінії контактів, тощо. У цьому випадку ефективний підхід до моделювання передбачає використання у різних частинах області різних математичних моделей, що описуються диференціальними рівняннями різної вимірності, і зв'язування їх спеціальними граничними умовами.

Для ілюстрації основних ідей зазначеного підходу ГРМ використано результати наукових робіт (див літературу), виконаних на кафедрі прикладної математики під керівництвом автора, починаючи з 1987 року. У цих роботах розглянуто проблему побудови математичних моделей, числових методів та алгоритмів для дослідження задач, теорії пружності для тіл, які містять тонкі та масивні елементи. Математична модель тут базується на сумісному використанні рівнянь теорії пружності та теорії оболонок типу С.П. Тимошенка. В рамках цієї моделі ключові рівняння є рівняннями математичної фізики, що мають різну вимірність за просторовими змінними (3D та 2D або 2D та 1D). Вони об'єднані в систему рівнянь умовами спряження на поверхнях оболонки. Розглянуто також проблему математичного моделювання процесів адвекції-дифузії у

середовищах з тонкими покриттями і включеннями. Тут рівняння моделі тонкого включення отримано шляхом усереднення з вагами рівнянь, що описують процес адвекції-дифузії за малими товщинами включень.

1. *Савула Я.Г.* Применение комбинированной модели для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций / Савула Я.Г., Дыак И.И., Дубовик А.В. // Прикл. механика. - 1989. – Вып. 25, №9. - С. 62-67.
2. *Kossak O.* Dimention adaptive numerical analysis of free vibrations of elastic Structures / Kossak O., Savula Ya. // Buletinul Institutului politehnic din Jasi. – 1995. - V. XLI, Tasc. 1-2. - P.1-8.
3. *Dyyak I.* D-Adaptive Mathematical model of solid body with thin coating / Dyyak I., Savula Ya. // Matematychni studii. – 1997. – V 7, №1. – P.103-110.
4. *Savula Ya.H.* Numerical analysis of advection-diffusion in the continuum with thin canal / Savula Ya.H., Koukharskyj V.M., Chaplia Ye.Ya. // Numerical Heat Transfer, Part A. – 1998, 33 (3). - P. 341-351.
5. *Savula Ya. H.* D-adaptive model for the elasticity problem / Savula Ya. H., Dyyak I.I. // Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences. – 1998. -Vol. 5, No 1. - P.65-74.
6. *Savula Ya.* Coupled bondary and finite tlement analysis of a special class of two-dimensional problems of the theory of elasticity / Yarema Savula, Herbert Mang, Ivan Dyyak, Natalia Pauk // Computer and Structures. – 2000. - 75. - P.157-165.
7. *Grigorenko Ya.M.* Stress-strain analysis of elastic bodies on the basis of a heterogeneous mathematical model / Grigorenko Ya.M., Savula Ya.H., Kossak O.S. // Int. Appl. Mech. – 2000. -36, № 12. – P. 1595-1604.
8. *Savula Y.H.* Heterogeneous mathematical models in numerical analysis of structures / Savula Y.H., Dyyak I.I., Krevs V.V. // Computers & Mathematics with applications. – 2001. – V. 42. - P. 1201-1216.
9. *Savula Ya.H.* Finite element analysis based on heterogeneous models / Savula Ya.H., Savula N. Ya. Shshukin V. // Journal of Computational and Applied Mechanics. – 2004. – Vol. 5, No.1. – P. 129-140.
10. *Дяконюк Л.* Гетерогенний підхід до моделювання процесу у теплоперенесення в багатошарових конструкціях із врахуванням малих товщин окремих шарів / Дяконюк Л., Савула Я. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. - 2005. - Вип.1. - С. 61-70.
11. *Савула Я.* Оптимізація генетичним алгоритмом сітки скінченних елементів для числового аналізу задачі адвекції–дифузії–реакції / Савула Я., Винницька Л. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2005. – Вип.2. - С. 151 - 158.
12. *Савула Я.* Гетерогенні крайові задачі математичної моделі адвекції-дифузії у середовищі з включенням / Савула Я., Мандзак Т. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип.3. – С. 150 - 159.
13. *Мандзак Т.І.* Пониження вимірності математичної моделі адвекції-дифузії у тонкому включенні з використанням експоненційних апроксимацій / Мандзак Т.І., Савула Я.Г. // Волинський математичний вісник. – 2004. – Вип. 2 (11). – С. 140-147.
14. *Савула Я.Г.* Застосування генетичного алгоритму до оптимізації сіток в процесі числового розв’язування задачі адвекції-дифузії-реакції / Савула Я.Г.,

- Винницька Л.І. // Волинський математичний вісник. – 2004. – Вип. 2 (11). – С. 233-239.
15. Мандзак Т. Слабке формулювання одної крайової задачі зниженої вимірності / Мандзак Т., Савула Я. // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. - 2006. - В.11. - С.69 – 75.
 16. Dyyak I.I. Investigation of the heterogeneous problems of the elasticity with coupled boundary finite element schemes / Dyyak I.I., Savula Ya.H., Shahin M. // In "Advances in Applied and Computational Mathematics". Nova Science Publisher. – 2006. - P. 63-79.
 17. Дяконюк Л. Моделювання процесу теплопровідності в тілі з тонким не наскрізним включенням / Дяконюк Л., Мандзак Т., Савула Я.Г. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2007. – Вип. 5. – С. 55-63.
 18. Savula Ya. Multiscale modeling of deformation and convection-conduction processes in bodies with thin inclusions and coatings / Savula Ya., Mandzak T., Vynnytska L. // Proceeding of the International Symposium "Trends in continuum physics", - Lviv, 2007. - P. 63.
 19. Савула Я.Г. Разномерная задача математической модели адвекции-диффузии в среде с тонким включением / Савула Я.Г., Мандзак Т.И. // Компьютерная математика. – 2007, №2. - С. 59-70.
 20. Савула Я. Числовий аналіз напружено-деформованого стану порожнистого циліндра з тонким включенням / Савула Я., Винницька Л. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2007. – Вип. 6. – С. 54- 65.
 21. Савула Я.Г. Числовий аналіз різновимірних крайових задач адвекції-дифузії у середовищах із тонкими включеннями. / Савула Я.Г., Мандзак Т.І., Кухарський В.М. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип.8. - С. 149- 156.
 22. Винницька Л. Напружено деформований стан пружного тіла з тонким включенням / Винницька Л., Савула // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. - 2008. - Вип.7. - С. 21- 29.
 23. Savula Y.H. Analysis of shells reinforced by massive stiffening ribs / Y.H. Savula, K. Jarmai, I. S. Mukha // International Applied Mechanics. Springer, New York. – 2008. V. 44, №11. – P. 1309-1318.
 24. Мандзак Т.І. Математичне моделювання і числовий аналіз адвекції-дифузії у неоднорідних середовищах / Мандзак Т.І., Савула Я.Г. // Центр математичного моделювання Ін-ту Прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача. НАН України. Львів: Сплайн. – 2009. – 148 с.
 25. Винницька Л.І. Гетерогенна математична модель пружного тіла з тонким податливим на згин включенням / Винницька Л.І., Григоренко Я.М. Савула, Я.Г. // Доповіді НАН України. - 2009, - №9. - С. 62-67.
 26. Слупко О.М. Чисельне дослідження напірної фільтрації в середовищах з тонкими каналами / Слупко О.М., Савула Я.Г., Дяконюк Л.М. // Математичні машини і системи. - 2011, №2. - С. 137-142.
 27. Буряк Я.Й. Математичне моделювання та прикладна математика / Буряк Я.Й., Войтович М.М., Савула Я.Г. // В книзі Наука західного регіону України. До 40 річчя ЗНЦ. Львів ПАІС. 2011. – 672 с. – С. 50-53.

28. *Vynnytska L.* Mathematical modeling and numerical analysis of elastic body with thin inclusion / Vynnytska L., Savula Y. // *Computational Mechanics*. – 2012. – V. 49, No.5. – P.565-575.
29. *Dyyak I.* Numerical investigation of plain strain state for a body with thin cover using domain decomposition / Dyyak I., Savula Ya., Styahar A. // *Journal of Numerical & Applied Mathematics*. -2012, - № 3 (109). – С. 23- 33.
30. *Dyyak I.* Applications of FEM/BEM coupling on heterogeneous structures using domain decomposition / Dyyak I., Savula Y., Makar I., Styahar A. // CD-ROM Proceedings of the 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), September 10-14, 2012, Vienna, Austria Eds.: Eberhardsteiner J.; Böhm H.J.; Rammerstorfer F.G., Publisher: Vienna University of Technology, Austria, ISBN: 978-3-9502481-9-7.
31. *Сподар Н.* Застосування різномасштабного методу скінченних елементів до розв'язування одновимірної задачі адвекції-дифузії / Сподар Н., Савула Я. // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. – 2014. – Вип.19. – С. 190- 197.
32. *Стягар А.* Числовий аналіз напружено-деформованого стану тіл з тонким включенням методом декомпозиції області / А. Стягар, Я. Савула, І. Дияк // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2014. – Вип. 57, №3. - С. 119–131
33. *Styahar A.* On the convergence of domain decomposition algorithm for the body with thin inclusion / A. Styahar, Ya. Savula // *Acta Mechanica et Automatica*. – 2015. – Vol. 9, No. 1 (31). – P. 27–32.

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ АДВЕКЦІЇ-ДИFUЗІЇ У ЖИВИХ ТКАНИНАХ

Розглянуто математичну модель процесу розповсюдження ліків у стінках судин при лікуванні атеросклерозу – захворювання, що характеризується утворенням бляшки на стінці артерії. Ліки доставляють локально до уражених стінок артерії з допомогою катетера. Препарат являє собою сукупність наночастинок, кожна з яких містить інкапсульовані біоактивні речовини. Наночастинки проникають у стінку судини і надалі їх поширення відбувається за рахунок процесу адвекції-дифузії, при якому вивільняються інкапсульовані ліки, що, власне, забезпечує терапевтичний вплив на цільовій ділянці артерії. Дослідження адвекції-дифузії, що описує процес поширення препарату у стінці судини при лікуванні атеросклерозу, дасть змогу оптимізувати процес лікування.

Нехай G – відкрита зв'язна обмежена множина в R^2 з кусково-гладкою межею Γ . Необхідно знайти C_1, C_2 – невідомі концентрації наночастинок і ліків, відповідно, які задовольняють головні рівняння змішаної моделі переміщення ліків [4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial c_1}{\partial t} + \nabla \cdot (Vc_1) - \nabla \cdot (K_1 \cdot \nabla c_1) + \sigma_1 c_1 = 0; \\ \frac{\partial c_2}{\partial t} + \nabla \cdot (Vc_2) - \nabla \cdot (K_2 \cdot \nabla c_2) + \sigma_2 c_2 = c_1 f, \end{cases}$$

а також початкові та граничні умови:

$$c_1(x, 0) = c_1^0, c_2(x, 0) = c_2^0;$$

$$n \cdot (K_i \cdot \nabla c_i) + \lambda_i (c_i - c_{i,\infty}) = 0, i = 1, 2 \text{ на } \Gamma_N,$$

де K_1, K_2 – коефіцієнти дифузії; V – поле швидкостей у стінці артерії; σ_1, σ_2 – сталі метаболізму; f – рівень розчинності ліків на кожную наночастинку.

Для задачі наведено варіаційне формулювання [6] і виконано числові обчислення за реальними біологічними та хімічними параметрами для рівнянь, крайових і початкових умов. За цими параметрами одержано великі числа Пекле і, в ході першого обчислювального експерименту, розв'язки, одержані МСЕ з використанням стандартних лінійних і квадратичних базисних функцій [2] з допомогою пакету FreeFEM++ [4], виявились нестійкими. Одним з запропонованих рішень подолання вищезгаданої проблеми є використання апроксимацій на основі базису з функцій-бульбашок [1], які на стандартному трикутному поділяються на 3

групи: вузлові, реброві та внутрішні. Базис визначається в барицентричних координатах виду:

$$L_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right), \quad L_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right), \quad L_3 = \frac{\eta}{\sqrt{3}}$$

і для його побудови використовуються поліноми Лежандра $P_i(t)$, які визначаються співвідношеннями:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = t, \quad (n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для базису порядку p усього визначено три вузлові функції, $p-1$ реброві функції на кожній стороні трикутника і $(p-1)(p-2)/2$ внутрішніх функцій.

Для підвищення точності обчислень обрахунок інтегралів по трикутниках здійснюється з допомогою IOST квадратур (Integral Over Standard Triangle [5]) вищих порядків. Створена програма мовою c# для розв'язання поставленої задачі показує, що запропонований метод є ефективним для задач такого роду.

1. *Мандзак Т.І.* Математичне моделювання і числовий аналіз адвекції-дифузії у неоднорідних середовищах / Т.І. Мандзак, Я.Г. Савула. – Львів: Сплاین, 2009. – 148 с.
2. *Савула Я.Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. – Львів: видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 221 с.
3. *Hech F.* FreeFEM++ un logiciel de resolution EDP en 2d et 3d / F. Hecht. – Paris: Labolatoire Jacques-Louis Lions, 2008. – 125 pp.
4. *Hossain S.* Mathematical modeling of coupled drug and drug-encapsulated nanoparticle transport in patient-specific coronary artery walls / S. Hossain, F. Hossainy, Y. Bazileys. – Texas: University of Texas, 2010. – 162 pp.
5. *Hussain F.* Accurate Evaluation Schemes for Triangular Domain Integrals / F. Hussain, M. Karim. // IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering. – 2012. – Vol.2, Issue 6. – 38-51 pp.
6. *Shabo B.* Introduction to Finite Element Analysis: Formulation, Verification and Validation. / B. Shabo, I. Babushka. – John Wiley & Sons, 2011. – 369 pp.

П.С. Сеньо

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ТА ГРАНИЧНИХ
ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ,
ЗАСНОВАНІ НА МАТЕМАТИЦІ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ
ІНТЕРВАЛІВ**

В статтях [3], [4] описана математика функціональних інтервалів, запропонована автором, яка є узагальненням інтервальної математики [1]. В множині функціональних інтервалів введені арифметичні та теоретико – множинні операції, поняття віддалі між такими елементами, їх норми та ширини. Доведено, що множина лінійних функціональних інтервалів при так означених операціях над ними є квазілінійним простором. Наявність віддалі перетворює його в метричний простір. Доведено, що цей метричний простір є повним. Введення метрики робить цей простір топологічним простором. При цьому поняття збіжності і неперервності можна використовувати звичним чином, як і у випадку метричного простору.

Математика лінійних функціональних інтервалів дає змогу ефективно будувати як завгодно вузькі двох сторонні наближення будь – якої функції у вигляді відповідних кусково – лінійних функцій. Це є основним ефектом, який отримуємо від її реалізації, та і основною задачею, яку вона розв'язує. Так отриманий результат дає змогу розв'язувати різноманітні задачі, які іншими методами розв'язуються складно, громіздко, або і взагалі невідомі методи їх розв'язування. Тут пропонується методика побудови таких методів та розроблені алгоритми розв'язування задачі Коші і граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Нехай потрібно розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Лінійний функціональний обмежник похідної y' шуканої функції $y(x)$ отримуємо будуючи лінійний функціональний обмежник функції $f(x, y)$ на інтервалі $[x_0, \tilde{x}_1]$, де точку $\tilde{x}_1$ визначаємо аналогічно як і в [2], взявши будь-який такий початковий лінійний функціональний інтервал, який містить пряму $y = y(x) \equiv y_0$. Враховуючи те, що для всіх точок $x \in G$ таких, що $a \leq x$, виконується нерівність

$$c + \int_a^x g_1(t) dt \leq y(x) \leq c + \int_a^x g_2(t) dt, \quad (2)$$

де функції $g_1(x), g_2(x)$ – міноранта та мажоранта цієї функції, відповідно; $f(a)=c$, a – внутрішня точка проміжку G , уточнюємо вибраний довільно початковий лінійний функціональний інтервал двох стороннім функціональним обмежником, межі якого є відповідними квадратичними сплайнами. Далі цей процес повторюємо, стартуючи з точки $\tilde{x}_1$, і т. д. Так отримуємо розв'язок задачі (1) з будь-якою наперед заданою точністю.

Розв'язок задачі (1) можна отримати і у вигляді функціонального обмежника, межі якого є відповідними сплайнами будь-якого наперед заданого степеня. Для цього потрібно на кожному проміжку $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$ описану методику повторювати відповідну кількість разів.

Аналогічно розв'язується задача Коші і при неявному заданні функції y' . При цьому алгоритм дозволяє визначити точки біфуркації розв'язку і не існування його, відповідно.

Пошук розв'язку задачі (1) можна здійснювати і в зворотному напрямку. Для цього використовуємо нерівність

$$c - \int_x^a g_2(t) dt \leq y(x) \leq c - \int_x^a g_1(t) dt. \quad (3)$$

Алгоритми розв'язування граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь, по суті, є методами прогонки, окремі етапи якої є реалізаціями описаних вище методів, проведеними в обох напрямках від всіх граничних точок. Далі ці реалізації узгоджуються для кожної пари суміжних граничних точок.

Нерівності (2), (3) дають змогу розв'язувати задачі і у випадку, коли у задачі задані початкові умови для похідних шуканої функції $y(x)$.

Результати проведених числових експериментів підтверджують отримані теоретичні висновки.

1. *Алефельд Г.* Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – Москва: Мир, 1987. – 358 с.
2. *Калмыков С.А.* Методы интервального анализа / С.А. Калмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1986. – 222 с.
3. *Сеньо П.С.* Арифметика лінійних функціональних інтервалів / Сеньо П.С // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. - 2014. – Вип. 21. - С.38-57.
4. *Сеньо П.С.* Топологія простору лінійних функціональних інтервалів / Сеньо П.С // Матем. та комп. моделювання. – Сер. фізико – матем. науки. – 2014. – Вип. 11. – С. 209-222.

БУЛЕВА ЗАДАЧА ДЛЯ НАЙКОРОТШОГО k -ВЕРШИННОГО ЦИКЛУ У ПОВНОМУ ГРАФІ

Нехай $D_{n,n}$ – повний граф, де n – кількість вершин, а $d_{ij} > 0$ – відстань між вершинами i та j , $i \neq j$. Зафіксуємо вершину s , в якій починається та завершується цикл у графі $D_{n,n}$. Цикл, який проходить через k вершин, де $1 \leq k \leq n-1$ (вершина s не враховується), будемо називати k -вершинним циклом графа $D_{n,n}$. Якщо $k = n-1$, то цей цикл співпадає з гамільтоновим циклом (проходить через усі вершини графа).

Нехай булева змінна x_{ij} дорівнює одиниці, якщо в цикл входить дуга, що з'єднує вершини i та j , і нулю в протилежному випадку. Так як $i \neq j$, то таких змінних $n(n-1)$. Нехай булева змінна y_i дорівнює одиниці, якщо цикл проходить через вершину i , та нулю в протилежному випадку. Таких змінних $(n-1)$, тому що вершина s зафіксована. Нехай невід'ємна змінна z_{ij} задає величину потоку деякого продукту від вершини i до вершини j . Цих змінних рівно стільки ж, як і булевих змінних x_{ij} .

Знаходженню найкоротшого k -вершинного циклу у графі $D_{n,n}$, де $1 \leq k \leq n-1$, відповідає наступна задача: знайти

$$d_k^* = \min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1, j \neq s}^n x_{sj} = 1, \sum_{j=1, j \neq s}^n x_{js} = 1, \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = y_i, \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ji} = y_i, i = 1, \dots, n : i \neq s, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1, i \neq s}^n y_i = k, \quad (3)$$

$$z_{ij} - kx_{ij} \leq 0, \quad i, j = 1, \dots, n : i \neq j, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1, j \neq s}^n z_{sj} = k, \sum_{j=1, j \neq s}^n z_{js} = 0, \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ji} = -y_i, \quad i = 1, \dots, n : i \neq s, \quad (5)$$

$$y_i = 0 \vee 1, \quad i = 1, \dots, n : i \neq s, \quad x_{ij} = 0 \vee 1, \quad z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n : i \neq j. \quad (6)$$

Задача (1)-(6) є задачею змішаного булевого лінійного програмування. Вона має $2n^2 - n - 1$ змінних, з яких $n^2 - 1$ – булеві змінні, а $n(n-1)$ –

невід'ємні лінійні змінні, та $n^2 + 2n + 1$ обмежень, з яких $3n + 1$ – лінійні рівності, а $n(n - 1)$ – лінійні нерівності.

Мінімізація цільової лінійної функції в (1) відповідає знаходженню k -вершинного циклу мінімальної довжини d_k^* , а набір обмежень (2)–(6) описує усі можливі цикли з вершини s , які проходять через k вершин графа $D_{n,n}$. Обмеження (3) задає k вершин, для яких $y_i = 1$, і саме через них проходить цикл з вершини s . Для цих k вершин та для вершини s обмеження (2) описують одноразовий вхід у вершину та одноразовий вихід з вершини. Набір обмежень (4) та (5) гарантує зв'язність k -вершинного циклу. Обмеження (4) забезпечують перевезення продукту між вершинами i та j тільки тоді, якщо $x_{ij} = 1$. Обмеження (5) означають, що з вершини s потрібно розвести k одиниць продукту, залишаючи в кожній з вершин циклу рівно одну одиницю продукту.

Якщо $k = n - 1$, то отримуємо задачу для знаходження найкоротшого гамільтонового циклу, яка рівносильна відомій задачі комівояжера [1]. Знаходженню гамільтонового циклу мінімальної довжини відповідає така задача змішаного булевого лінійного програмування: знайти

$$d^* = \min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} x_{ij}, \quad (7)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ji} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

$$z_{ij} - (n - 1)x_{ij} \leq 0, \quad i, j = 1, \dots, n : i \neq j, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1, j \neq s}^n z_{sj} = n - 1, \quad \sum_{j=1, j \neq s}^n z_{js} = 0, \quad \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ji} = -1, \quad i = 1, \dots, n : i \neq s, \quad (10)$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n : i \neq j. \quad (11)$$

Задача (7)–(11) співпадає з формулюванням задачі комівояжера в [2], стор. 46. Тут обмеження (8)–(11) описують усі можливі гамільтонові цикли у графі $D_{n,n}$. Для всіх n вершин обмеження (8) описують одноразовий вхід у вершину та одноразовий вихід з вершини. Набір обмежень (10) та (11) забезпечує зв'язність гамільтонового циклу за рахунок перевезення $(n - 1)$ одиниць продукту з вершини s , залишаючи в кожній з інших вершин гамільтонового циклу рівно одну одиницю продукту. Це дозволяє уникнути підциклів в задачі комівояжера.

Задача знаходження найкоротшого k -вершинного циклу складніша, ніж задача знаходження найкоротшого гамільтонового циклу. Це пояснюється тим, що в ній потрібно визначити підмножину k вершин,

для якої буде знайдено гамільтонів підцикл. Це підтверджують наведені у таблиці результати програми **gurobi 5.5.0** [3] для семи задач комівояжера з бібліотеки **TSPLIB**. Назви задач наведені в першій колонці таблиці, а в другій колонці вказано кількість вершин відповідного повного графа. Розрахунки проводилися на NEOS-сервері.

Результати розв'язання задачі (1)–(6) при $k = n - 1$ наведено в колонках 3, 4 та 5, де d^* – мінімальна довжина гамільтонового цикла, яка співпадає з довжиною оптимального маршруту комівояжера; t – час (в секундах) роботи програми **gurobi**; "+++" означає, що знайдений розв'язок співпадає з наведеним в **TSPLIB** маршрутом комівояжера, "---" – знайдено інший оптимальний маршрут комівояжера, "немає" – маршрут комівояжера відсутній в бібліотеці **TSPLIB**. Результати розв'язання задачі (1)–(6) при $k = n/2$ наведено в колонках 6–8, де d_k^* – мінімальна довжина k -вершинного циклу із вершини $s = 1$ для k із колонки 6.

Таблиця. – Програма **gurobi** для задач комівояжера з бібліотеки **TSPLIB**.

Задача	n	d^*	$t(\text{sec})$		k	d_k^*	$t(\text{sec})$
st70.tsp	70	675	14.33	+++	35	268	23.58
eil76.tsp	76	538	11.29	---	38	219	11.55
kroA100.tsp	100	21282	105.80	---	50	9427	1194.46
kroB100.tsp	100	22141	75.27	немає	50	9307	752.97
kroD100.tsp	100	21294	221.15	+++	50	8929	1268.61
kroE100.tsp	100	22068	118.21	немає	50	9312	644.35
eil101.tsp	101	629	29.57	---	50	232	133.16

Із таблиці видно, що знаходження k -вершинного циклу вимагає більших витрат по часу, ніж задача комівояжера. Так, наприклад, для графа **kroA100.tsp** вони більші в десять разів.

Робота виконана при фінансовій підтримці НАН України (проекти № 0113U003146 та № 0112U002251).

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М: Мир, 1978. – 432 с.
2. Алексеева Е.В. Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: Учеб. пособие / Е.В. Алексеева. – Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2012. – 131 с.
3. Gurobi Optimization, Inc., Gurobi Optimizer Reference Manual, 2014, <http://www.gurobi.com/>

Ю.Г. Стоян, М.І. Гіль

(Інститут проблем машинобудування
ім. А.М. Підгорного НАН України)

ФОРМАЛІЗАЦІЯ УМОВ ВЗАЄМОДІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ, ЩО МАЮТЬ ФОРМУ ЕЛІПСА

Основою розв'язання цілого ряду практичних задач геометричного проектування, пов'язаних з моделюванням розміщення геометричних об'єктів, є побудова адекватних математичних моделей відповідних оптимізаційних задач. Основною складовою частиною такої математичної моделі є представлення в аналітичному вигляді умов взаємодії розміщуваних геометричних об'єктів. Під "умовами взаємодії" двох геометричних об'єктів мається на увазі умови їх неперетину, дотику або включення одного об'єкта в інший. Для більшості класів геометричних об'єктів умови взаємодії реалізовані на основі Ф-функцій [1-2], які залежать від параметрів розміщення об'єктів і приймають від'ємні, рівні нулю або додатні значення в залежності від того, чи об'єкти перетинаються, дотикаються або не перетинаються. Найбільш складними з точки зору формалізації є умови взаємодії об'єктів, що мають форму еліпсів. У доповіді розглядається новий підхід до реалізації умов взаємодії таких об'єктів.

Нехай $S_i\{a_i, b_i, x_i, y_i, \theta_i\}$ ($i=1,2$) – еліпс, канонічне рівняння якого задано в аналітичній або параметричній формі в допоміжній системі координат, пов'язаній з цим еліпсом. Тут a_i, b_i – півосі, x_i, y_i та θ_i – відповідно параметри розміщення (положення центру еліпса) та кут повороту допоміжної системи координат відносно основної (нерухомої) системи xOy .

Підхід до побудови умов розміщення (включення) еліпса $S_2\{a_2, b_2, x_2, y_2, \theta_2\}$ в еліпс $S_1\{a_1, b_1, 0, 0, 0\}$ полягає в наступному. Здійснюємо ряд перетворень (поворотів, переміщень та "стискань") допоміжної системи координат, пов'язаної з S_2 , в результаті яких у новій системі координат XOY еліпс S_2 перетворюється в круг S'_2 радіуса b_2 з центром у точці (X_2, Y_2) , а S_1 – в еліпс $S'_1\{a'_1, b'_1, 0, 0, 0\}$, де півосі a'_1, b'_1 виражаються через значення півосей a_1, b_1, a_2, b_2 та кута повороту θ_2 .

На основі значень a'_1, b'_1 та b_2 визначаються точки $(\bar{X}_j, \bar{Y}_j)$ ($j=1,2,3,4$), які є спільними для границь еліпса S'_1 та круга S'_2 за

умови $Y_2 = 0$. Ці точки визначають прямі $h_j(X, Y)$ ($j = 1, 2, 3, 4$), що проходять через одну із них та одну із точок $(0, b_1')$ або $(0, -b_1')$ та орієнтовані таким чином, що $h_j(0, 0) < 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$).

Тоді можна стверджувати, що еліпс S_2 є включенням у S_1 (не перетинається з R_2 / S_1), якщо існує точка (X^*, Y^*) , для якої виконуються умови:

- (X^*, Y^*) знаходиться на границі еліпса S_1 ;
- у точці (X^*, Y^*) співпадають кутові коефіцієнти дотичних до еліпса S_1 та круга радіуса $r_2^* = \sqrt{(X^* - X_2)^2 + (Y^* - Y_2)^2}$;
- $r_2^* \geq b_2$;
- $h_j(X^*, Y^*) \geq 0$, ($j = 1, 2, 3, 4$);
- $(x_2, y_2) \in S_1$.

Виразивши ці умови в аналітичному вигляді, одержимо систему рівнянь та нерівностей із невідомими X^*, Y^* , пошук яких може бути здійснений одним із обчислювальних методів. За умови існування розв'язку такої системи при заданих значеннях параметрів розміщення x_2, y_2 еліпс S_2 є включенням у S_1 . В іншому випадку (якщо розв'язок не знайдений) S_2 не є включенням у S_1 . Якщо в побудованій системі вважати x_2, y_2 змінними (невідомими), то розв'язок системи (за умови його існування) визначає ті значення параметрів розміщення еліпса S_2 , за яких S_2 є включенням у S_1 .

На основі рівнянь та нерівностей, що входять до системи, побудована Ф-функція об'єктів R_2 / S_1 та S_2 , яка є формалізованим представленням умов включення еліпса S_2 у S_1 (неперетину об'єктів R_2 / S_1 та S_2).

Такий підхід може бути поширений на формалізацію умов неперетину двох еліпсів, умов включення еліпса в область, обмежену параболою та ін.

1. Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova // Comput. Geom.: Theory and Appl. – 2010. – Vol. 43, Issue 5. – P. 535–553.
2. Chernov N. Phi-functions for 2D objects formed by line segments and circular arcs / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov // Advances in Operations Research. – 2012. – Vol. 2012. – P. 76–95. (Article ID 346358. DOI:10.1155/2012/346358.)

УДК 519.85

І.О. Субота, О.М. Хлуд*, Г.М. Ясько***

(* Харківський національний університет радіоелектроніки,

** Інститут проблем машинобудування ім А.М. Підгорного НАН України)

**ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ ГОМОТЕТИЧНИХ
ОРІЄНТОВАНИХ ЕЛІПСОЇДІВ**

Задачі упаковки та розкрою (Cutting and Packing) належать до класу NP-складних і є предметом дослідження обчислювальної геометрії, а методи їх розв'язання – новим напрямом теорії дослідження операцій. Цей клас задач має широкий спектр наукових та практичних застосувань у сучасній біології, мінералогії, матеріалознавстві, хімічній промисловості, машинобудуванні, нанотехнології, будівництві, робототехніці, системах розпізнавання образів тощо.

У даному дослідженні розглядаються конструктивні засоби математичного та комп'ютерного моделювання, ефективні методи пошуку допустимих та локально-оптимальних розв'язків для задач упаковки заданого набору еліпсоїдів у контейнер мінімального об'єму.

Вважаємо, що E_i , $i \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}$ – сімейство гомотетичних однаково орієнтованих еліпсоїдів обертання, заданих півосями a_i , b_i , c_i , де $c_i = b_i$.

Положення еліпсоїда E_i у просторі R^3 характеризується змінним вектором трансляції $v_i = (x_i, y_i, z_i) \in R^3$, де R^3 – евклідовий простір.

У якості контейнера Ω розглядається або паралелепіпед $\mathbf{P}$ змінної довжини A , ширини B та висоти C , або еліпсоїд $\mathbf{E}$ зі змінним коефіцієнтом гомотетії λ . Цільова функція F – об'єм контейнера $F = A \cdot B \cdot C$, якщо $\Omega \equiv \mathbf{P}$, або коефіцієнт гомотетії $F = \lambda$, якщо $\Omega \equiv \mathbf{E}$.

Задача. Упакувати набір однаково орієнтованих гомотетичних еліпсоїдів $\{E_i(u_i), i \in I_N\}$, у контейнер Ω так, щоб цільова функція F досягала свого мінімального значення.

Для моделювання відношень неперетину еліпсоїдів та включення еліпсоїдів у контейнер застосовується метод ϕ -функцій [2].

Математична модель задачі може бути представлена у наступному вигляді:

$$\min F(u), u \in W, \quad (1)$$

$$W = \{u \in R^\sigma : \Phi_{ij} \geq 0, \Phi_i \geq 0, j > i \in I_N\}, \quad (2)$$

де $u = (p, v_1, \dots, v_N) \in R^\sigma$ – вектор змінних, $p = (A, B, C)$, якщо $\Omega \equiv \mathbf{P}$, $p = (\lambda)$, якщо $\Omega \equiv \mathbf{E}$; Φ_{ij} – ϕ -функція для еліпсоїдів E_i та E_j , Φ_i – ϕ -функція для еліпсоїда E_i та об'єкта $P^* = R^3 \setminus \text{int } P$.

Для пошуку локальних мінімумів задачі (1) – (2) використовуються метод мультистарту та оптимізаційна процедура, яка є розвитком алгоритмів, запропонованих у статтях [1, 3]. Розв'язуються допоміжні задачі нелінійного програмування, що базуються на гомотетичних перетвореннях еліпсоїдів. Вважається, що коефіцієнти гомотетії всіх еліпсоїдів є змінними. За допомогою розв'язання допоміжних задач у певній послідовності здійснюється перехід з одного локального екстремуму в інший, з кращим значенням функції цілі. Після цього виконується покрокове зменшення розмірності простору розв'язків за рахунок фіксації коефіцієнтів гомотетії еліпсоїдів і, таким чином, повернення до вихідної задачі. Насамкінець, виконується переставлення місцями пар еліпсоїдів, коефіцієнти гомотетії яких несуттєво відрізняються, по аналогії з алгоритмом, запропонованим у роботі [4]. Це може також призвести до покращення значення функції цілі задачі (1)-(2).

Локально-оптимальним розв'язком обирається найкращий із отриманих локальних екстремумів. Розроблено відповідний програмний модуль. Наводяться результати чисельних експериментів. Для пошуку локальних мінімумів застосовувалась програма IPOPT (<https://projects.coin-or.org/Ipopt>) на основі методу внутрішньої точки [5].

1. *Стецюк П. І.* NLP-задача упаковки гомотетичних еліпсів у прямокутний контейнер / П. І. Стецюк, Т. Є. Романова, І. О. Субота // Теорія оптимальних рішень: зб. наук. пр. – Київ: Ін. кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – 2014. – С. 139-146.
2. *Chernov N.* Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Yu. Stoyan, T. Romanova // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – Vol. 43, № 5. – P. 533-553.
3. *Scheithauer G.* Packing non-equal spheres into containers of different shapes / G. Scheithauer, Yu. Stoyan, G. Yaskov. – 2013. – 25 p. – (Prepr./ Technische Universität Dresden; MATH-NM-07-2013).
4. *Stoyan Yu. G.* A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip / Yu. G. Stoyan, G. N. Yaskov // European Journal of Operational Research. – 2004. – Vol. 156. – P. 590–600.
5. *Wachter A.* On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming / A. Wachter, L. Biegler // Math. Program. – 2006. – Vol. 106 (1). – P. 25–57.

Л.О. Терейковська

(Київський національний університет будівництва і архітектури)

ВИКОРИСТАННЯ СХОВАНИХ МАРКІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ РОЗПІЗНАВАННЯ ГОЛОСОВИХ СИГНАЛІВ В СИСТЕМІ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

Одним із найбільш перспективних шляхів підвищення ефективності систем дистанційного навчання є застосування засобів автоматизації голосової взаємодії [1]. Зазначимо, що багато сучасних засобів голосової взаємодії використовують теорію схованих марківських процесів. Тому представляє науково-практичний інтерес визначення обмежень застосування в системах дистанційного навчання схованих марківських процесів для розпізнавання голосових сигналів.

Як і в більшості прикладних систем, для розпізнавання голосових сигналів в системах дистанційного навчання можливо використовувати сховані ланцюги Маркова з 64 сумішами Гаусівських функцій щільності ймовірності [2]. При цьому контекстно-незалежні фонемі моделюються трьома станами ланцюга Маркова з пропусками. Словник транскрипцій створюється автоматично з орфографічного словника з використанням множини контекстно-залежних правил. Для побудови схованого ланцюга Маркова можливо використати загальновідомий алгоритм Elvirs. Даний алгоритм складається з двох етапів: підготовчого та розпізнавання. Деталізуємо кожен із цих етапів. Підготовчий етап:

- Підготувати словник для розпізнавання.
- Вибрати множину фонем і створити транскрипції слів із словника за допомогою визначених правил.
- Створити індекс бази даних від трійок фонем до транскрипцій.
- Навчити акустичні моделі по накопичених мовних сигналах.
- Етапи розпізнавання:
- Застосувати фонетичний стенограф до вхідного сигналу для отримання послідовності фонем.
- Поділити послідовність фонем на трійки фонем із зміщенням на одну фонему.
- Створити запити до бази даних з трійок фонем.
- Одержати списки транскрипцій за допомогою запитів до індексу бази даних.
- Упорядкувати транскрипції відповідно до їх рангу.
- Вибрати перші N транскрипцій з найвищими рангами як підсловник для розпізнавання.
- Розпізнати вхідний голосовий сигнал в умовах обмеженого підсловника.

Розглянемо роботу фонетичного стенографа. Позначимо у його відповіді правильну фонему як 1, а зіпсовану шумом як 0. Нехай ймовірність появи 1 в двійковому наборі дорівнює u . Ймовірність P знаходження в двійковому наборі (довжини n) k одиниць і більше можна обчислити за допомогою наступного рекурентного виразу:

$$P_n = \begin{cases} 0, & n < k \\ u^k, & n = k \\ P_{n-1} + u^k (1-u)(1-P_{n-k-1}), & n > k \end{cases}$$

В таблиці показана ймовірність P знаходження в двійковому наборі підряд трьох і більше одиниць (при деяких довжинах n та при ймовірності появи 1 в двійковому наборі u). Якщо середня довжина транскрипцій приблизно дорівнює 8, а ймовірність правильного знаходження фонему у відомих реалізаціях дорівнює 85%, то при таких значеннях ймовірність P знаходження правильного слова в підсловнику дорівнює 0,953.

Таблиця

Ймовірність знаходження підряд трьох і більше 1
в двійковому наборі довжини n

n	u			
	0,75	0,8	0,85	0,9
6	0,738	0,819	0,890	0,948
7	0,799	0,869	0,926	0,967
8	0,849	0,908	0,953	0,982
9	0,887	0,937	0,971	0,991

До переваг описаної методології можливо віднести її простоту та зручність практичного застосування. Однак їй властиві і недоліки, характерні для схованих марківських моделей в цілому. Основними із них являються складність формування бази різноваріантних еталонних елементів та висока обчислювальна складність розрахунку параметрів марківської моделі. Зазначимо, що вказані недоліки можуть бути критичними при реалізації описаної методології в системах дистанційного навчання, які використовують апаратно-програмні засоби, характерні для вітчизняних навчальних закладів.

1. Терейковська Л.О. Проблема голосової взаємодії в дистанційному навчанні вищого навчального закладу / Л.О. Терейковська, І.А. Терейковский // Управління розвитком складних систем.: зб. наук. праць. - 2013. - Вип. 13. - С.157 - 161.
2. Огнев И.В. Распознавание речи методами скрытых марковских моделей в ассоциативной осцилляторной среде /И.В.Огнев, П.А.Парамонов // Известия высших учебных заведений. - 2013. - Вып. 3 (27). - С.115 - 125.

О. В. Терендії

(Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України)

СПОСОБИ ІНТЕЛЕКТУАЛІЗАЦІЇ ІНТЕРФЕЙСУ АВТОМАТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ ОПРАЦЮВАННЯ ДАНИХ

Зараз все ширше застосовуються технології інтелектуалізації автоматизованих систем підтримки процесу прийняття рішень [2]. Ці системи використовують знання про предметну область (ПО). Тому актуальною є проблема створення ефективних методів і засобів для роботи зі знаннями на різних етапах розробки та експлуатації таких систем.

Необхідність інтелектуалізації інтерфейсів користувачів пов'язана з розширенням кола задач та підвищенням вимог до користувача стосовно обсягу знань з різних предметних областей [6]. Дослідження щодо інтелектуалізації інтерфейсів та вимог до їхніх функцій проводилися ще в минулому столітті [3]. Однак, незважаючи на численні публікації, присвячені цій тематиці, досі відсутнє чітке визначення інтелектуального інтерфейсу користувача. В [4] інтелектуальним інтерфейсом вважається забезпечення можливості активної безпосередньої взаємодії ресурсів програмного комплексу і користувача за допомогою програм обробки запитів в інтерактивному режимі. В роботі [3] інтелектуальним вважається інтерфейс користувача, який містить програмні засоби, що забезпечують елементарні функції аналізу, синтезу, порівняння, узагальнення, накопичення та навчання тих складових програмного комплексу, які взаємодіють з користувачем, перетворюючи звичайний інтерфейс користувача в інтелектуальний. У [5, 6] інтелектуальний інтерфейс є сукупністю програмних і апаратних засобів, які забезпечують користувачу, що немає спеціальної підготовки в галузі обчислювальної техніки, можливість використання комп'ютера для розв'язання задач, пов'язаних з його професійною діяльністю, без або з незначною допомогою програмістів.

На рис. 1 зображена структура розробленої автоматизованої системи підтримки прийняття діагностичних рішень АСПО з інтелектуалізованим інтерфейсом користувача. Ідеологія системи базується на концепції формального подання знань про ПО. Програмна реалізація включає банки даних експертів, несправностей, словники тлумачень стандартних і придбаних у процесі діагностики термінів, а також модуль узгодження термінології та діагностичного висновку.



Рис. 1. Загальна схема автоматизованої системи підтримки прийняття рішень АСПО

Блок інтерфейсу (рис. 2) забезпечує аналіз запитів та приведення їх до канонічної форми, формування банків даних і знань, збирання експертної інформації, яка пізніше обробляється за допомогою бібліотеки прикладних програм. Керуючий блок організовує роботу системи загалом.

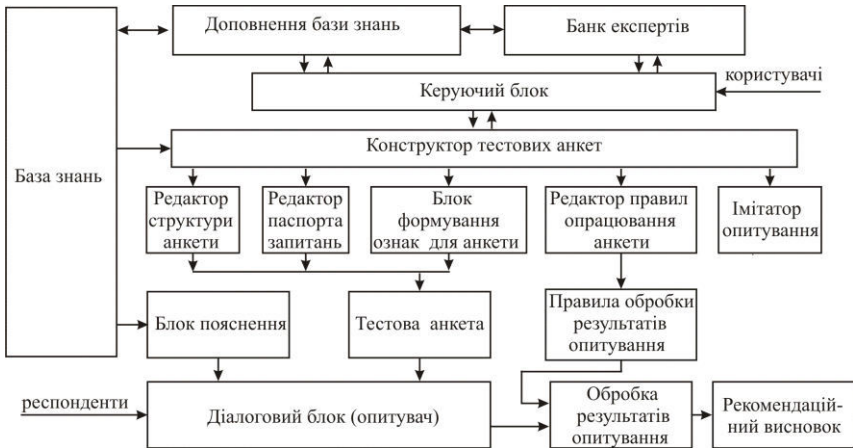


Рис. 2. Функціональна схема інтерфейсного блоку автоматизованої системи АСПО

Збір діагностичних даних для прийняття рішень [8] з допомогою розробленої нами автоматизованої системи АСПО здійснюється шляхом опитування респондентів за допомогою анкет, створених у середовищі конструктора анкет автоматизованої системи. В анкеті можуть міститися запити

тання одиничного або множинного вибору відповідей, а також відкриті та комбіновані запитання. Конструктор тестових анкет складається з блоку формування ознак, значення яких визначається під час опитування; редакторів структури анкети, паспорта запитань та правил (у предикатному вигляді) для опрацювання результатів опитування, а також імітатора опитування. Для спрощення процесу конструювання анкет та однозначності трактування запитань і певних понять використовуються тлумачення, що знаходяться в базі знань автоматизованої системи.

Процесу заповнення бази знань передують етапи уніфікації тлумачень термінів і понять, який здійснюється за допомогою процедури узгодження термінології шляхом опитування групи експертів [8], а також виявлення зв'язків між поняттями шляхом побудови фрагментів семантичних мереж. Останні є орієнтованими графами, вершинами яких є абстрактні або конкретні поняття, а дугами – відношення між ними.

При побудові семантичних мереж ми використовуємо модифіковану стосовно врахування особливостей конкретної предметної області формальну мову для подання фактографічних і числових діагностичних даних [1]. Мову можна трактувати як прикладне числення предикатів. Основними компонентами мови є константи, змінні, відношення і аксіоми. Відношення цієї мови описують взаємозв'язки між об'єктами і значеннями. При цьому унарні відношення ідентифікують класи об'єктів (Бзн – бути значенням; Бхар – бути характеристикою тощо), а бінарні (абстрактні, синтагматичні та парадигматичні) і тернарні відношення (наприклад, ВолХ(а,х,з) – об'єкт а має значення характеристики х, яке дорівнює з) описують зв'язки між об'єктами та/або їх складовими. Спеціальні відношення враховують особливості конкретної ПО. Наприклад, для галузі медичної діагностики (ПацІ – пацієнт має ім'я, ПацХ – пацієнт має характеристику тощо).

Аксіоми пов'язують наведені відношення та описують закономірності ПО. У базу знань автоматизованої системи знання заносяться у вигляді динамічних ієрархічних структур та взаємозв'язаних таблиць, в яких відображаються відношення між поняттями ПО (рис. 3). Застосування аксіом у даному випадку забезпечує виявлення додаткових, не вказаних зв'язків між поняттями.

Для перевірки ефективності роботи описаного програмного продукту, нами за допомогою комплексу АСПО створено тестову анкету для вивчення розповсюдження ішемічної хвороби серця [8] серед дорослого населення. При порівнянні даних опитування з записами в амбулаторних картах, повне співпадіння діагнозів констатовано у 75% (150 випадків). Автоматизована система АСПО може використовуватися також в інших галузях знань.

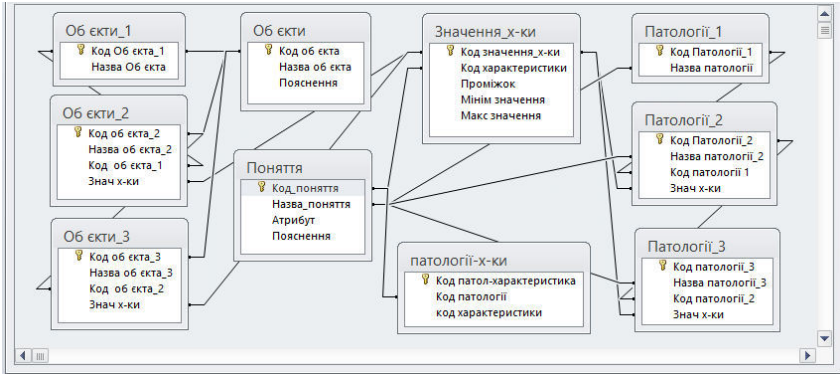


Рис. 3. Інформаційна модель бази знань

1. Вальковський В. О., Терендій О. В. Про один математичний формалізм представлення знань у галузі медичної діагностики // Вісник Київського нац. університету імені Тараса Шевченка. Серія кібернетика. – 2002. – Вип. 3. – С. 24 – 26.
2. Громов Ю. Ю., Иванова О. Г., Алексеев В. В. и др. Интеллектуальные информационные системы и технологии: учебное пособие. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 244 с.
3. Кузин Е. С. Интеллектуальный интерфейс. Общие принципы организации и проблемы реализации // Техническая кибернетика. – 1985. – № 5. – С. 90 – 102.
4. Нехаев С. А., Кривошеин Н. В., Андреев И. Л. и др. Словарь прикладной интернетики [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://lib.co.ua/dict/unknown/slovarprikladnoyinternetiki.jsp>.
5. Печурова Е. Н., Глыбовец Н. Н. Интеллектуальные пользовательские интерфейсы в СДО [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.infoco.ru/mod/resource/view.php?id=23>.
6. Поспелов Д. А. Интеллектуальные интерфейсы для ЭВМ новых поколений [Електронний ресурс]. – Режим доступу: www.raai.org/about/persons/pospelov/pages/interf.doc.
7. Терендій О. В., Бунь Р. А. Интеллектуальна система збору інформації в вузькоспеціалізованій предметній області // Моделювання та інформаційні технології : Зб. наук. праць Ін-ту проблем моделювання в енергетиці. – Київ, 2007. – Вип. 41. – С. 158 – 163.

Н. К. Тимофієва

(Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій
та систем НАН та МОН України, Київ)

ПРЯМІ ТА ОБЕРНЕНІ ФУНКЦІЇ В ЗАДАЧАХ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА СИМЕТРІЯ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИН

Вступ. В комбінаторній оптимізації можна спостерігати явище, коли в залежності від прямих та обернених функцій натурального аргументу, якими задаються вхідні дані, значення цільової функції для певного впорядкування комбінаторних конфігурацій також змінюються як прямі та обернені. Така властивість пов'язана з тим, що множині комбінаторних конфігурацій, які є аргументом цільової функції, характерна симетрія. Розглянемо цю властивість детальніше.

Основна частина. Наведемо загальну постановку задачі комбінаторної оптимізації [1]. Задачі цього класу, як правило, задаються однією або кількома множинами, наприклад A та B , елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини базовими. Найвні два типи задач. В першому типі кожному з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{ls} \in R$, яке називають вагою ребра (R – множина дійсних чисел); $l \in \{1, \dots, n\}$, $s \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A , $\tilde{n}$ – кількість елементів множини B . Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числові значення яких назвемо вагами. Величини c_{ls} назвемо вхідними даними та задамо їх матрицями. В другому типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1, \dots, n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох із заданих множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1, \dots, n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W , для якого $F(w)$ набуває екстремального значення при виконанні заданих обмежень.

Змоделюємо вхідні дані в задачі комбінаторної оптимізації першого типу скінченними послідовностями. Подамо елементи h наддіагоналей

симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), \dots, \beta_m(f(m), w^k))$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C – функцією натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1), \dots, \varphi(m))$, де $m = \frac{n(n-1)}{2}$ – кількість елементів h наддіагоналей матриць C та $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Верхній індекс k ($k \in \{1, \dots, q\}$) – порядковий номер w^k в W , q – їхня кількість. Якщо матриці $Q(w^i)$ та C – несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m=n^2$ (або $m = n \tilde{n}$). Функція цілі набуває вигляду

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^m \beta_j(f(j), w^k) \varphi(j). \quad (1)$$

Якщо дослідити комбінаторні множини, упорядковані певним способом, то можна побачити що їхній структурі властива симетрія. Наприклад, у множині перестановок W , що згенерована рекурентно-періодичним методом з урахуванням властивості періодичності, як описано в [2–3], перші перестановки p -го інтервалу n -го рангу для n парного утворюються точно так, як і r -го інтервалу n -го рангу, тобто по відношенню до середнього інтервалу $n/2$ у множині W має місце осьова симетрія; $p \in \{n/2+1, \dots, n\}$, $r \in \{1, \dots, n/2\}$.

Розглянемо розподілення маршрутів у їхній множині для задачі комівояжера, яка полягає в наступному: задано деяку кількість міст, відстань між якими відома. Нагадаємо, що гамільтоновим циклом називають шлях у зв'язному графі, який починається в заданій вершині, проходить через усі вершини один раз і повертається в початкову. Під маршрутом розуміємо послідовність дуг між вершинами, через які проходить гамільтоновий цикл. Для задачі комівояжера необхідно знайти найкоротший шлях, який є гамільтоновим циклом. Вхідні дані в ній задаються комбінаторною симетричною матрицею $Q(w^k)$, елементи якої задають відстані між містами $a_s, a_t \in A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Елементи симетричної $(0,1)$ -матриці C $c_{st}=1$, якщо a_s, a_t мають між собою зв'язки, та $c_{st}=0$ в іншому випадку, $s, t \in \{1, \dots, n\}$. Позначимо маршрут $u(w^k, l)|_1^n = (u_1(w^k, 1), \dots, u_n(w^k, n)) \in H_u$, де $u_l(w^k, l) = c_{st} g_{st}(w^k)$ для $c_{st}=1$, $g_{st}(w^k) \in Q(w^k)$, H_u – їхня множина. Як відомо, множина H_u

містить тотожні та нетотожні маршрути. Кількість нетотожних маршрутів у ній дорівнює $(n-1)!/2$.

Наведемо розподілення маршрутів $u(w^k, l)_1^n$ в упорядкованій алгоритмом [2-3] множині H_u для значень $n=4$ та $n=5$. Для $n=4$ кількість нетотожних маршрутів дорівнює трьом. Відповідно підмножин, які містять тотожні маршрути, також три. Кожна підмножина містить вісім тотожних маршрутів. Аналогічно для $n=5$ кількість нетотожних маршрутів, відповідно і підмножин, дорівнює дванадцять. Кожна підмножина містить десять тотожних маршрутів. Для кожного із маршрутів k -ї підмножини обчислимо інтервал – кількість маршрутів, розміщених між тотожними, включаючи перший і останній. Якщо побудувати графік їхнього розподілення, то для $n=4$ тотожні маршрути першої та третьої підмножини розміщені в множині H_u з інтервалами симетрично відносно її середини. Тобто, маємо осьову симетрію. Для $n=5$ тотожні маршрути розподілені таким способом: підмножини друга та четверта, сьома та одинадцята, перша та пята, восьма та десята розміщені в множині H_u одна відносно одної зеркально симетрично. Маршрути підмножин третьої та дванадцятої, шостої та дев'ятої розміщені з інтервалами симетрично відносно середини множини H_u .

Сформулюємо таке означення.

Означення. Назвемо прямою та оберненою функції, які симетричні відносно лінії, паралельній осі абсцис або осі ординат. Якщо ці функції монотонні або лінійні то паралельна лінія проходить через точку їхнього перетину.

Пряма та обернена функції мають однакові множини визначення та множини значень.

На прикладі задачі комівояжера розглянемо зміну значень цільової функції в залежності від прямих та обернених функцій натурального аргументу, якими задаються вхідні дані. Ця закономірність в ній залежить від певного впорядкування перестановок, наприклад підмножинами $K_1, K_2, \dots, K_{n-2}$, які виділяються з використанням незалежних від вхідних даних параметрів. Прямою функцією вважатимемо неспадну монотонну, а обернену – незростаючу монотонну. Наведемо теореми, в яких використано підкласи розв'язних задач із класу задачі комівояжера.

Теорема 1. Якщо в задачі комівояжера вхідні дані задано прямою функцією натурального аргументу $\varphi(j) = k^0 j + b$, або $\varphi(j) = 2^j$, $j = \overline{1, m}$, $k^0, b > 0$ – цілі довільні числа, то найбільшого значення цільова

функція (1) набуває для перестановки $w^{i^*} \in K_1$, а найменшого – для перестановки $w^{k^*} \in K_{n-2}$.

Якщо в задачі комівояжера вхідні дані задано оберненою функцією натурального аргументу $\varphi(j) = (k^0 m + b) - (k^0 j + b) + (k^0 + b)$, або $\varphi(j) = 2^{m-j+1}$, $j = \overline{1, m}$, $k^0, b > 0$ – цілі довільні числа, то найменшого значення цільова функція (1) набуває для перестановки $w^{i^*} \in K_1$, а найбільшого – для перестановки $w^{k^*} \in K_{n-2}$.

Теорема 2. Якщо вхідні дані задано прямою монотонно-неспадною функцією натурального аргументу, то значення цільової функції (1) на цьому ж упорядкуванні перестановок змінюється як кусково-монотонна незростаюча функція.

Якщо в задачі комівояжера вхідні дані задано оберненою монотонно-незростаючою функцією натурального аргументу, то значення цільової функції (1) на заданому впорядкуванні перестановок підмножинами $K_1, K_2, \dots, K_{n-2}$ змінюється як кусково-монотонна неспадна.

Висновок. Як видно з наведених теорем, цільова функція для прямої функції натурального аргументу на певному впорядкуванні перестановок змінюється як обернена, а для оберненої функції натурального аргументу – як пряма. Отже, аналізуючи зміну значень цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації в залежності від упорядкування її аргументу та структури вхідних даних, можна побачити, що тут має місце симетрія.

1. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ. – 2007. – 32 с.
2. Тимофеева Н.К. Упорядочение множества значений аргумента целевой функции в комбинаторной оптимизации / Н.К. Тимофеева // Кибернетика и систем. анализ. – 1998. – № 6. – С. 78–88.
3. Тимофієва Н.К. Рекурентно-періодичний метод для генерування комбінаторних конфігурацій / Н.К. Тимофієва // Комбінаторні конфігурації та їх застосування: Матеріали десятого Міжвузівського науково-практичного семінару (15-16 жовтня 2010 р.). – Кіровоград: Кіровогр. техн. ун-т. – 2010. – С. 138–141.

**ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОГО
ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА**

Неоднорідні порожнисті циліндри мають широке застосування в різних галузях промисловості, приладобудування та енергетики, зокрема у якості посудин високого тиску, трубопроводів з удосконаленими міцнісними характеристиками тощо. В процесі експлуатації вони часто перебувають під дією розподілених по поверхні теплових навантажень. Побудова адекватних моделей та розвиток ефективних методів дослідження розподілів полів температур, що встановлюються внаслідок цього у вказаних тілах, вимагає врахування залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалу від координат (як правило, береться до уваги залежність тільки від радіальної координати, яка є суттєвішою внаслідок умов виготовлення та експлуатації циліндричних тіл). Це призводить до того, що рівняння теплопровідності відповідних квазістаціонарних задач містить довільні змінні коефіцієнти, що значно ускладнює (а часто – унеможлиблює) побудову розв’язку за допомогою класичних методів математичної фізики. У даній роботі з використанням методу зведення до інтегральних рівнянь Вольтерри, який було розроблено стосовно розв’язування задач теорії пружності й термопружності в роботі [1], побудовано розв’язок квазістаціонарної задачі теплопровідності для довгого порожнистого циліндра, теплофізичні властивості якого є довільними функціями радіальної змінної.

Розглянемо довгий порожнистий радіально-неоднорідний циліндр $a \leq r \leq 1$, де r – безрозмірна радіальна змінна, віднесена до зовнішнього радіусу, $a = \text{const}$. Визначимо стаціонарне температурне поле у циліндрі за умови, що на його внутрішній та зовнішній поверхнях підтримуються температури $P(\varphi)$ та $Q(\varphi)$ відповідно. Внутрішні джерела тепла вважаємо відсутніми і нехтуємо залежністю теплофізичних характеристик матеріалу від температури. Відповідна крайова задача теплопровідності описується рівнянням теплопровідності [2]

$$\frac{\partial^2 T(r, \varphi)}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda(r)} \frac{d\lambda(r)}{dr} \right) \frac{\partial T(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1)$$

та крайовими умовами

$$T(a, \varphi) = P(\varphi), \quad T(1, \varphi) = Q(\varphi). \quad (2)$$

Тут $\lambda(r)$ – коефіцієнт теплопровідності.

Використовуючи розвинення в ряд Фур'є

$$T(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (T_k^1(r) \cos k\varphi + T_k^2(r) \sin k\varphi),$$

знаходження температурного поля із задачі (1), (2) зводимо до розв'язання диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 T_k^i}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda(r)} \frac{d\lambda(r)}{dr} \right) \frac{\partial T_k^i}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} T_k^i = 0, \quad (3)$$

із крайовими умовами

$$T_k^i(a) = P_k^i, \quad T_k^i(1) = Q_k^i, \quad (4)$$

де $i = 1, 2; k = 0, 1, 2, \dots$; P_k^i , Q_k^i – відповідні коефіцієнти розвинень функцій (2) у ряд Фур'є, аналогічно до температури.

Враховуючи граничні умови (4), розв'язок рівнянь (3) зведено до лінійних інтегральних рівнянь другого роду:

$$T_k^i(r) = \tau_k^i(r) + \int_a^1 T_k^i(s) L_k(r, s) ds + \int_a^r T_k^i(s) \xi_k(r, s) ds, \quad i = 1, 2,$$

в яких шуканими є $T_k^i(r)$ ($i = 1, 2; k = 0, 1, 2, \dots$), а вільні члени $\tau_k^i(r)$ і ядра $L_k(r, s)$, $\xi_k(r, s)$ є відомими функціями.

Розв'язування отриманих інтегральних рівнянь здійснювалось з використанням методу [3], що полягає у застосуванні квадратурної формули Сімпсона і зведенні до розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь, в яких невідомими є значення шуканих функцій в точках розбиття.

Використовуючи наведений підхід, здійснено числовий аналіз температурних полів для різних видів залежності коефіцієнта теплопровідності $\lambda(r)$ і температур зовнішнього середовища $P(\varphi)$ та $Q(\varphi)$. Отримані результати у випадку сталої теплопровідності порівнювались з відомими аналітичними розв'язками.

1. Tokovy Y. Three-dimensional temperature and thermal stress analysis of an inhomogeneous layer // Y. Tokovy, C.-C. Ma // Journal of Thermal Stresses. – 2013. – **36**, № 8. – P. 790-808.
2. Eslami M.R. Theory of Elasticity and Thermal Stresses: Explanations, Problems and Solutions / M.R. Eslami, R.B. Hetnarski. – Springer, – 2013. – 789 pp.
3. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наука, 1986. – 544 с.

*Ю.В.Турбал**, *А.Я.Бомба***, *М.Ю.Турбал**

(*Національний університет водного господарства та природокористування

** Рівненський державний гуманітарний університет)

МЕТОД ОПЕРАТОРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ МОДЕЛЮВАННЯ ТОЧОК ПЕРЕТИНУ ТРАЄКТОРІЙ ВІДОКРЕМЛЕНИХ ХВИЛЬ ТА ОБЛАСТЕЙ ЗМІНИ ГУСТИНИ

Одним з відомих методів дослідження неперервних динамічних систем є метод перетинів Пуанкаре, суть якого полягає у побудові множин точок перетину фазової траєкторії системи з деякою поверхнею (у найпростішому випадку - площиною) [1]. Відповідний підхід має важливе практичне значення, оскільки у багатьох задачах, пов'язаних з дослідженням фазових траєкторій динамічних систем, відомими є лише певні дискретні “прояви” траєкторій, коли фіксувати всю траєкторію неможливо. Так, наприклад, можна досліджувати траєкторії солітоноподібних хвиль, що рухаються в глибині Землі лише через їх взаємодію з областями накопичення сейсмічної енергії, яка призводить до сейсмічних поштовхів. В такому випадку області, де накопичується сейсмічна енергія (так звані сейсмоактивні зони) логічно вважати поверхнями Пуанкаре.

Аналогічно ведуть себе космічні об'єкти [2], проходячи через рукави спіральних галактик – вони зменшують швидкість, інтенсивніше взаємодіють з складовими рукава, що дозволяє з більшою ймовірністю їх зафіксувати. В цьому випадку спіральні рукави логічно вибрати як поверхні Пуанкаре. Солітони в газових дисках плоских галактик інтенсивно взаємодіють з областями підвищеної щільності газу, які у галактиках часто являють собою послідовності кіл певного радіусу. Ці кола – криві Пуанкаре.

Тут будемо розглядати не самі поверхні Пуанкаре, а деякий оператор A , що визначає послідовності точок перетину солітоноподібних хвиль з поверхнями Пуанкаре. Якщо x – деяка точка перетину (в заданий момент часу), то точку взаємодії хвилі з наступною поверхнею визначатимемо як Ax і т.д. Таким чином, виникатиме позитивна напівтраєкторія Жюліа [2] виду: $\{x_n : x_n = A(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots, x_0 \in R^3\}$, де x_0 – деяка початкова точка.

Нехай початкові точки розподілені рівномірно, оператор, що моделює відповідні точки взаємодії має вигляд:

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - z^2 + c_x \\ 2xy + c_y \\ 2xz + c_z \end{pmatrix}. \text{ Тоді мають місце наступні твердження.}$$

Твердження 1. Нехай ξ – випадковий вектор, сумісна щільність якого описується функцією $f_{\xi}(z_1, z_2, z_3)$ у деякій області G . Тоді щільність випадкового вектора $\eta = \xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) = \tilde{A}(t)\xi$ при $z_1 \neq \frac{t-1}{2t}$ має вигляд:

$$f_{\tilde{A}(t)\xi}(z) = \begin{cases} \frac{f_{\xi}(\tilde{A}_+^{-1}(t)z) + f_{\xi}(\tilde{A}_-^{-1}(t)z)}{4\sqrt{2}t^{3/2}\gamma(t, z_1, z_2, z_3)}, & z \in \tilde{A}(t)G, \tilde{A}^{-1}(t)z \in G \\ \frac{f_{\xi}(\tilde{A}_{\pm}^{-1}(t)z)}{4\sqrt{2}t^{3/2}\gamma(t, z_1, z_2, z_3)}, & z \in \tilde{A}(t)G, \tilde{A}_+^{-1}(t)z \in G, \tilde{A}_-^{-1}(t)z \notin G, \\ & z \in \tilde{A}(t)G, \tilde{A}_+^{-1}(t)z \notin G, \tilde{A}_-^{-1}(t)z \in G, \\ & 0, z \notin \tilde{A}(t)G, \end{cases}$$

$$\tilde{A}^{-1}(t) = \tilde{A}_+^{-1}(t) \cup \tilde{A}_-^{-1}(t).$$

Твердження 2. Щільність випадкового вектора $\eta = \tilde{A}(t)\xi$, де ξ рівномірно розподілена в G , має вигляд:

$$f_{\tilde{A}(t)\xi}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(G)2\sqrt{2}t^{3/2}\sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)(\sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)} - (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1))}}, & z \in \tilde{A}(t)G, \tilde{A}^{-1}(t)z \in G, z_1 \neq \frac{t-1}{2t}, \\ \frac{1}{\mu(G)4\sqrt{2}t^{3/2}\sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)(\sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)} - (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1))}}, & z \in \tilde{A}(t)G, z_1 \neq \frac{t-1}{2t} \text{ і } (\tilde{A}^{-1}(t)z)_+ \in G, \\ & (\tilde{A}^{-1}(t)z)_- \notin G, \text{ або } (\tilde{A}^{-1}(t)z)_+ \notin G, (\tilde{A}^{-1}(t)z)_- \in G, \\ & 0, z \notin \tilde{A}(t)G. \end{cases}$$

де $\alpha(z_1, z_2, z_3) = (tc_y - z_2)^2 + (tc_z - z_3)^2 + (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1)^2$, $\mu(G)$ – міра Лебега області G .

1. Солодухіна А.М. Сечения Пуанкаре фазового портрета нелинейного RLS контура, содержащего сигнетоезлектрик / А.М.Солодухіна, А.С. Сидоркин, А.А. Шевченко // Физика твердого тела.–1993. – т.35. – №7.
2. Турбал Ю.В. Про самоорганізацію динамічних систем у векторних полях / Ю.В. Турбал // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2007. – № 1. – С. 192-198.

УДК 004.9

Р.Б. Тушницький, В.М. Макар, Т.П. Могіляк

(Національний університет «Львівська політехніка»)

**ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ОПРАЦЮВАННЯ
БІБЛІОГРАФІЧНИХ ОПИСІВ ПУБЛІКАЦІЙ**

Проблема інформатизації – це стрижень, навколо якого сьогодні має будуватися вся система роботи сучасного ВНЗ. Одним з шляхів вирішення проблеми інформатизації ВНЗ є створення комплексних інформаційно-аналітичних системи, які покликані автоматизувати роботу в окремих підрозділах університету.

Інформаційно-аналітична система (IAC) для підготовки наукових звітів є модулем комплексної IAC “ScienceLP”, яка призначена для автоматизації функцій з організації та управління науково-дослідної роботи в Національному університеті “Львівська Політехніка”, і яка, згідно комплексного плану інформатизації, є однією з складових частин автоматизованої системи управління якістю НУ “Львівська політехніка”.

До складу системи “ScienceLP” входить ряд підсистем:

- підсистема автоматизації обліку підготовки наукових кадрів [1, 2];
- підсистема автоматизації підготовки наукових звітів підрозділів [3];
- підсистема автоматизації обліку науково-дослідної роботи студентів;
- підсистема автоматизації обліку міжнародної науково-технічної співпраці;
- підсистема автоматизації синхронізації даних з базою даних відділу кадрів університету.

Основними функціональними можливостями системи автоматизації підготовки наукових звітів є:

- робота з інформаційними довідниками (періодичні наукові видання, неперіодичні наукові видання, наукометричні бази даних, видавництва, наукові заходи тощо);
- внесення інформації, що стосується монографії, підручника, навчального посібника, публікації в періодичних та неперіодичних виданнях;
- внесення інформації про періодичні та неперіодичні видання, видавництва, міста, наукові заходи, наукометричні бази даних;
- проведення пошуку та сортування за заданими параметрами;
- формування різноматітних звітів та статистичної інформації.

IAC “ScienceLP” дає змогу підготувати звіт про наукову роботу кафедр та наукових підрозділів університету за актуальними формами звіту МОН України.

Оскільки частина опублікованих публікацій користувачів у Вісниках Національного університету “Львівська політехніка” міститься на сайті Видавництва Львівської політехніки [4], постала задача імпорту даних у систему “ScienceLP” з метою економії трудових ресурсів та зменшення витрат часу на роботу із внесенням даних.

Для вирішення цієї задачі розроблено спеціалізоване програмне забезпечення, яке дає змогу:

- отримати дані бібліографічних описів публікацій в наукових періодичних виданнях;
- здійснити синтаксичний аналіз отриманих даних та розбиття бібліографічного опису на складові елементи;
- мінімізувати невдалі спроби аналізу даних (забезпечити максимальний успіх під час здійснення розбиття бібліографічного опису на елементи);
- перевірити наявність отриманих даних про публікацій в існуючій базі даних;
- записати отримані дані у базу даних;
- редагувати отримані дані користувачем вручну та зберегти зміни у базі даних;
- розпізнати неправильно проаналізовані дані.

Програмне забезпечення розроблене із використанням платформи .NET, мови програмування C#, середовища розробки Microsoft Visual Studio, технології WPF, технології Entity Framework, бібліотеки Html Agility Pack, системи управління базами даних Microsoft SQL Server 2012.

1. *Макар В., Тушницький Р.* Інформаційно-аналітична система для відділу докторантури та аспірантури Львівської політехніки / В. Макар, Р. Тушницький // Матеріали 5-ї науково-практичної конференції «Інноваційні комп’ютерні технології у вищій школі». – Львів, 2013. – С.28–33.
2. *Федасюк Д., Макар В., Тушницький Р.* Структура інформаційно-аналітичної системи обліку підготовки наукових кадрів університету / Д. Федасюк, В. Макар, Р. Тушницький // Вісник Національного університету «Львівська політехніка»: Інформатизація вищого навчального закладу. – 2013. – № 775. – С.99-106.
3. *Макар В., Тушницький Р.* Інформаційно-аналітична система для автоматизації підготовки наукових звітів підрозділів Львівської політехніки / Володимир Макар, Руслан Тушницький // Матеріали 6-ї науково-практичної конференції «Інноваційні комп’ютерні технології у вищій школі». – Львів, 2014. – С. 177Ю–182.
4. Сайт Видавництва “Львівської політехніки” [Електронний ресурс]. – Веб-доступ до сторінки: <http://www.vlp.com.ua/periodicals/bulletins> (2015).

УДК 519.711.3, 519.7:004.8

О.М. Ходзінський, М.І. Огурцов

(Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України)

ПРО ФОРМАЛІЗАЦІЮ ЗАДАЧІ МАРШРУТИЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ ІЗ ЧАСОВИМИ ВІКНАМИ

Вступ. Задача маршрутизації транспорту (Vehicle Routing Problems, VRP) полягає у виявленні та оптимізації маршруту до заданих точок-споживачів для транспортних засобів (ТЗ), що знаходяться у депо [1]. Предметом розгляду стала маршрутизація транспортних засобів із часовими вікнами.

Опис проблеми. Маршрутизація транспорту відноситься до комбінаторних задач, які можна подати у вигляді графа $G(V, E)$:

$V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ – множина вершин (v_0 — депо, $v_1, \dots, v_n$ — споживачі);

E — множина ребер $\{(v_i, v_j) \mid i \neq j\}$;

C — матриця невід’ємних відстаней (вартості шляху) c_{ij} між споживачами;

m — кількість ТЗ;

R_i — маршрут i -ого ТЗ ($i=1..m$);

$C(R_i)$ — вартість маршруту R_i ;

q_i — об’єм вантажу, що поставляється i -му споживачеві.

З кожною вершиною V_i асоційована деяка кількість товарів, що мають бути доставлені відповідному споживачеві. Завдання маршрутизації полягає у визначенні такої множини маршрутів m з мінімальною загальною вартістю, щоб кожна вершина множини V була відвідана тільки одним транспортним засобом тільки один раз. Крім того, всі маршрути повинні починатися і закінчуватися в депо (v_0).

Розв’язком задачі є розбиття множини V на підмножини (маршрути) та виконання порядку обходу на кожній підмножині (перестановка вершин маршруту) [1].

Цільовою функцією в загальному випадку є вартість розв’язку задачі:

$$F_{VRP} = \sum C(R_i), \quad (1)$$

де $C(R_i)$ — сума довжин ребер маршруту R_i , $i = 1, \dots, m$.

У класичному варіанті без часових вікон потрібно знайти допустимий розв’язок з мінімальною вартістю. Також в даній роботі вводяться наступні обмеження для умов задачі:

- Обсяг вантажів на кожному маршруті R_i не повинен перевищувати заданої величини вантажопідйомності Q .

- Маршрутизація часовими вікнами (VRP with Time Windows, VRPTW). Наведена задача подібна VRP з основною додатковою умовою: для виконання запиту кожного клієнта v_i існує відомий проміжок часу, визначений як інтервал $[e_i, l_i]$ — *заданий горизонт (scheduling horizon)* [2].

Тобто реальний момент виконання замовлення відповідно до отриманого розв'язку повинен бути всередині інтервалу. Маршрутизація транспортних засобів із часовими вікнами є актуальною NP-важкою науковою задачею [1-2].

Мета дослідження: Таким чином, з урахуванням вищезазначеного, метою дослідження є формалізація задачі маршрутизації ТЗ із часовими вікнами задля того, щоб мінімізувати значення результуючої цільової функції шляхом мінімізації загальної кількості ТЗ, загального шляху усіх ТЗ і загального часу очікування, необхідних для обробки запитів клієнтів в призначені інтервали часу. У порівнянні зі звичайним VRP, ТЗ, який прибув раніше нижньої часової межі у VRPTW, чекає її настання.

Основна частина: Визначення відстані між вершинами відбувається за стандартною формулою для прямокутної системи координат. Дані кожного споживача включають розміщення його вершини графу, об'єму вантажу q_i , інтервалу $[e_i, l_i]$, та часу, що буде затрачено на обслуговування даного клієнта. Для розв'язання поставленої задачі та мінімізації цільової функції (1) слід обраним методом побудувати для подальшої оптимізації початковий набір маршрутів, що включатиме маршрут для кожного ТЗ. Їх можна представити у наступному вигляді:

$$V_l = \{\{v_{11} \dots v_{1N}\}, \{v_{21} \dots v_{2D}\} \dots, \{v_{m1} \dots v_{mk}\}\} \quad (2)$$

Кожен з векторів відноситься до окремого транспортного засобу. Разом вони формують загальний вектор маршрутів, що підлягає обрахунку цільової функції та оптимізації.

Для кожного елементу маршруту за формулою 3 можна розрахувати його вартість:

$$C(R_i) = \begin{cases} d, & T_c \geq T_0 \\ d + (T_0 - T_c), & T_c < T_0 \end{cases} \quad (3)$$

де T_0 – значення початку часового вікна для даного клієнта; T_c – поточний час на момент початку етапу маршруту.

Сума вартостей відповідно до формули (1) складе потрібну нам цільову функцію.

На векторі, отриманому за формулою (2), можна виконувати ітеративний оптимізаційний процес, шукаючи кращі розв'язки в околі шляхом застосування локального пошуку. В результаті ми розвиваємо проблему, що розглядається, одразу у двох напрямках – це й задача маршрутизації транспорту з часовими вікнами і класична оптимізаційна задача на просторі перестановок. Для класичної задачі відомі ефективні та швидкі алгоритми пошуку наближених та оптимальних розв'язків, що дозволить значно спростити розв'язок задачі маршрутизації ТЗ із часовими вікнами.

Виконана формалізація задачі маршрутизації ТЗ із часовими вікнами була застосована для побудови алгоритму розв'язання відомих задач [2] на практиці. Для цього на першому етапі для побудови початкового

маршруту був застосований детермінований алгоритм. Починаючи з першого ТЗ виконувалось довантаження найбільш завантаженого транспортного засобу. Якщо новий клієнт вимагає більше вантажу, ніж є вільного місця в будь-якому з застосованих ТЗ, додаємо ще один ТЗ. Після додавання кожного нового клієнту до маршруту відбувається **жадібна ітеративна оптимізація частково побудованого маршруту**. Відповідно до неї вузли вектору клієнтів, що віднесені до одного ТЗ з (2) сортуються за жадібним принципом згідно (3). Спочатку визначаються значення цільової функції до кожного з клієнтів від депо і обирається найменше з них. Відповідний вузол стає першим в маршруті і процедура оптимізації повторюється вже від нього аж доки усі вузли маршруту не будуть відсортовані.

На другому етапі в рамках виконання роботи було розроблено та впроваджено до програмної реалізації задачі маршрутизації транспортних засобів за наявності часових вікон два методи оптимізації наближеного розв'язку, отриманого на етапі 1. Для цього множину маршрутів наближеного розв'язку, отриману на етапі 1 ми представляємо у вигляді вектору, шукаючи кращі розв'язки в околі шляхом застосування локального пошуку. Першим методом оптимізації є метод вектору спаду, другим – імітаційний відпал. Тестування виконувалось для розмірності 100 клієнтів, результати роботи алгоритму вже після етапу 1 були в деяких випадках менш ніж у два рази гіршими, ніж кращі відомі розв'язки. Після етапу 2 результати наблизились до оптимальних; в деяких випадках були знайдені оптимальні розв'язки.

Висновки. В результаті виконаної формалізації задачі маршрутизації ТЗ із часовими вікнами її було зведено до класичної оптимізаційної задачі на просторі перестановок. Це дозволило значно спростити розв'язок задачі маршрутизації ТЗ із часовими вікнами. Дослідження алгоритму маршрутизації ТЗ із часовими вікнами, розробленого для ілюстрації отриманих результатів, на суперкомп'ютері СКІТ показало досить високу його ефективність за невеликої обчислювальної складності. Час пошуку розв'язків для розмірності 100 клієнтів не перевищував 40 секунд.

В подальшому планується впровадити інші методи та алгоритми комбінаторної оптимізації на просторі перестановок для їх порівняльного аналізу ефективності пошуку розв'язків VRPTW з вже впровадженими.

1. *Rahimi-Vahed, Alireza, Teodor Gabriel Crainic, Michel Gendreau and Walter Rei* A path relinking algorithm for a multi-depot periodic vehicle routing problem // *Journal of Heuristics*. – 2013. – 19(3). – P. 497-524.
2. *Solomon, Marius M.* Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints // *Operations research*. – 1987. – 35(2). – P. 254-265.

УДК 519.6

Г.Г. Цегелик, Л.І. Фундак*, Н.В. Грипинська***

(* Львівський національний університет імені Івана Франка,

** Хмельницький національний університет)

**АПАРАТ МАЖОРАНТ І МІНОРАНТ ТА ЇХНІХ ДІАГРАМ
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО**

В [1] побудовано апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, який використано для апроксимації функцій; побудови чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем, точних на певних класах функцій (якщо не враховувати операцій заокруглення); розробки чисельних методів оптимізації як гладких, так і негладких та розривних функцій. За так звані точки зображення значень функції $f(x)$ взято $(x_i, -\ln|f(x_i)|)$.

Далі розглядається побудова одночасно апарату мажорант і мінорант та їхніх діаграм функцій, заданих таблично, де за точки зображення значень функції $f(x)$ беруться точки $(x_i, f(x_i))$. Такий підхід значно спрощує побудову апарату та й чисельні методи, розроблені з використанням цього апарату, будуть ефективнішими.

Розглянемо функцію дійсної змінної $y = f(x)$, яка задана своїми значеннями у деяких точках x_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Нехай

$$|y_i| \leq M \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

де M – деяка стала.

Означення 1. Точку $P_i(x_i, f(x_i))$ з координатами $x = x_i$, $y = f(x_i) = y_i$ в площині xu назовемо *точкою зображення значення функції $y = f(x)$ в точці $x = x_i$* .

Припустимо, що точки зображення $P_i(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$, в площині xu побудовані. Множину цих точок позначимо через S , а її опуклу оболонку – через $C(S)$. На рис.1 побудована опукла оболонка множини S , яка складається з дев'яти точок P_i .

Для кожного $x \in [x_1, x_n]$ визначимо дві точки $B_x(x, \alpha_x)$ і $D_x(x, \beta_x)$, де

$$\alpha_x = \sup_{(x, y) \in C(S)} y, \quad \beta_x = \inf_{(x, y) \in C(S)} y.$$

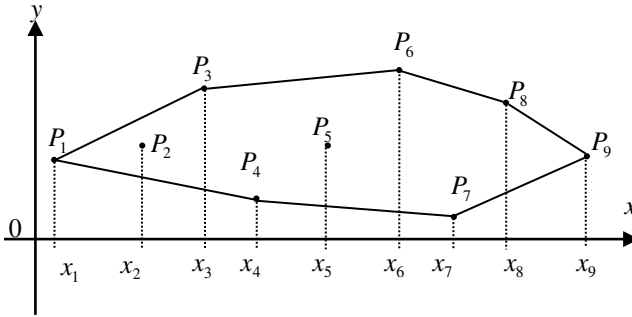


Рис. 1. Опукла оболонка множини точок P_i .

Множина точок $B_x(x, \alpha_x)$, $x \in [x_1, x_n]$, утворює лінію $\mathcal{G}_f$, яка обмежує $C(S)$ зверху, а множина точок $D_x(x, \beta_x)$, $x \in [x_1, x_n]$, утворює лінію δ_f , яка обмежує $C(S)$ знизу. Ці лінії є неперервними ламаними лініями і їхні рівняння мають відповідно вигляд

$$y = \alpha(x) \text{ і } y = \beta(x),$$

де $\alpha(x) = \alpha_x$, $\beta(x) = \beta_x$.

Із побудови $\mathcal{G}_f$ і δ_f випливає, що:

- кожна вершина $\mathcal{G}_f$ і δ_f розміщена в одній із точок зображення P_i значення функції $y = f(x)$ в точці x_i ($i = 1, 2, \dots, n$);
- кожна точка зображення P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) знаходиться на $\mathcal{G}_f$ або δ_f , або між ними.

Позначимо

$$M_f(x) = \alpha(x), \quad m_f(x) = \beta(x), \quad x \in [x_1, x_n].$$

Тоді для кожного x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) виконуються нерівності

$$f(x_i) \leq M_f(x_i), \quad f(x_i) \geq m_f(x_i).$$

Означення 2. Функції $y = M_f(x)$ і $y = m_f(x)$, визначені на проміжку $[x_1, x_n]$, називатимемо, відповідно, *мажорантою* і *мінорантою* функції $y = f(x)$ на цьому проміжку.

Означення 3. Ламані лінії $\mathcal{G}_f$ і δ_f , визначені на проміжку $[x_1, x_n]$, називатимемо, відповідно, *діаграмою мажоранти* і *діаграмою міноранти* функції $y = f(x)$ на цьому проміжку.

Нехай

$$M_f(x_i) = T_i, \quad m_f(x_i) = t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Означення 4. Величини

$$R_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad r_i = \frac{t_{i+1} - t_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; R_n = -\infty, r_n = \infty)$$

називатимемо, відповідно, *i*-им *числовим нахилом* діаграми $\mathcal{G}_f$ та *i*-им *числовим нахилом* діаграми δ_f .

Означення 5. Якщо точка зображення P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) розміщена у вершині $\mathcal{G}_f$ або δ_f , то індекс i називатимемо, відповідно, *вершинним індексом* $\mathcal{G}_f$ або δ_f . Якщо точка зображення P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) знаходиться на $\mathcal{G}_f$ або δ_f , то індекс i називатимемо, відповідно, *діаграмним індексом* $\mathcal{G}_f$ або δ_f . Індеси $i = 1$ та $i = n$ віднесемо до вершинних індексів.

Множину всіх вершинних індексів $\mathcal{G}_f$ і δ_f позначимо, відповідно, через I_1 та I_2 , а множину діаграмних індексів, відповідно, через G_1 і G_2 . Очевидно, $I_1 \subset G_1$, $I_2 \subset G_2$ і $T_i = f(x_i)$ для всіх $i \in G_1$, $t_i = f(x_i)$ для всіх $i \in G_2$.

Якщо φ_i – кут між відрізком $B_{x_i}B_{x_{i+1}}$ діаграми $\mathcal{G}_f$ і додатним напрямком осі абсцис, то кутовий коефіцієнт відрізка $B_{x_i}B_{x_{i+1}}$ визначатиметься за формулою

$$k_i = \frac{\alpha_{x_{i+1}} - \alpha_{x_i}}{x_{i+1} - x_i} = \frac{T_{i+1} - T_i}{x_{i+1} - x_i} = R_i = \operatorname{tg} \varphi_i.$$

Якщо ψ_i – кут між відрізком $D_{x_i}D_{x_{i+1}}$ діаграми δ_f і додатним напрямком осі абсцис, то кутовий коефіцієнт відрізка $D_{x_i}D_{x_{i+1}}$ визначатиметься за формулою

$$k_i = \frac{\beta_{x_{i+1}} - \beta_{x_i}}{x_{i+1} - x_i} = \frac{t_{i+1} - t_i}{x_{i+1} - x_i} = r_i = \operatorname{tg} \psi_i.$$

Якщо $\{i_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, s; s \leq n$) – послідовність вершинних індексів $\mathcal{G}_f$, то $R_1 = R_{i_1} > R_{i_2} > \dots > R_{i_s} = R_n = -\infty$.

Якщо $\{i_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, m; m \leq n$) – послідовність вершинних індексів δ_f , то $r_1 = r_{i_1} < r_{i_2} < \dots < r_{i_m} = r_n = \infty$.

Нехай p і q – два послідовні вершинні індекси $\mathcal{G}_f$, а індекс i задовольняє умову $p < i < q$. Розглянемо відрізок $B_{x_p}B_{x_q}$ діаграми $\mathcal{G}_f$.

Тоді

$$\frac{\alpha_{x_q} - \alpha_{x_p}}{x_q - x_p} = \frac{\alpha_{x_i} - \alpha_{x_p}}{x_i - x_p}, \quad \frac{T_q - T_p}{x_q - x_p} = \frac{T_i - T_p}{x_i - x_p}.$$

Звідси

$$T_i = \frac{x_q - x_i}{x_q - x_p} T_p + \frac{x_i - x_p}{x_q - x_p} T_q.$$

Якщо $f(x_p) = a_p$, $f(x_q) = a_q$, то

$$T_i = \frac{x_q - x_i}{x_q - x_p} a_p + \frac{x_i - x_p}{x_q - x_p} a_q.$$

Аналогічно одержуємо формулу для мажоранти на проміжку $[x_p, x_q]$:

$$M_f(x) = \frac{x_q - x}{x_q - x_p} a_p + \frac{x - x_p}{x_q - x_p} a_q.$$

Якщо тепер r і s – два послідовні вершинні індекси δ_f , а індекс i задовольняє умову $r < i < s$, то розглядаючи відрізок $D_{x_p} D_{x_q}$ діаграми δ_f , аналогічно одержуємо

$$t_i = \frac{x_s - x_i}{x_s - x_r} a_r + \frac{x_i - x_r}{x_s - x_r} a_s$$

і формулу міноранти $m_f(x)$ на проміжку $[x_r, x_s]$

$$m_f(x) = \frac{x_s - x}{x_s - x_r} a_r + \frac{x - x_r}{x_s - x_r} a_s,$$

де $f(x_r) = a_r$, $f(x_s) = a_s$.

Твердження. Якщо для функції $y = f(x)$, заданої таблицею значень (1), виконується умова (2), то

$$\max_{1 \leq i \leq n} f(x_i) = \max_{x \in [x_1, x_n]} M_f(x), \quad \min_{1 \leq i \leq n} f(x_i) = \min_{x \in [x_1, x_n]} m_f(x).$$

У цьому разі якщо

$$\max_{1 \leq i \leq n} f(x_i) = f(x_l), \quad \min_{1 \leq i \leq n} f(x_i) = f(x_s),$$

то

$$\max_{x \in [x_1, x_n]} M_f(x) = M_f(x_l) = T_l, \quad \min_{x \in [x_1, x_n]} m_f(x) = m_f(x_s) = t_s,$$

де $l \in G_1$, $s \in G_2$.

1. Цегелик Г. Г. Апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г. Г. Цегелик. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 190с.

ВИБІР СЕРЕДИННИХ УМОВ ДЛЯ БУДОВИ ЛАНЦЮГА ГРАФА

Відома задача побудови мінімального ланцюга неорієнтованого графа, визначеного сукупністю вершин і ребер. Для практичних потреб часто виникає задача побудови не мінімального, а максимального ланцюга графа, щоб отримати якнайбільше покриття за певними додатковими умовами. Тобто маємо задачу побудови ланцюга графа в такому формулюванні. Задано неповний граф $G = (V, E)$ з кількістю вершин $n = |V|$. Граф розглядаємо як незважений або з ребрами однакової ваги.

Треба відшукати максимальний простий ланцюг між двома заданими вершинами V_a, V_b , тобто шлях з максимальною кількістю вершин:

$$(V_a, V_1, V_2, \dots, V_k, V_b), k \rightarrow \max, V_i \neq V_j \text{ при } i \neq j, \text{ крім, можливо, } V_a \text{ і } V_b$$

Базовий алгоритм відшукування максимального простого ланцюга побудовано на підставі методу пошуку з поверненнями і опубліковано в праці [1].

Задача побудови максимального простого ланцюга має два випадки: 1) для кожної заданої початкової V_a і кінцевої V_b вершин знайти максимально можливий простий ланцюг без додаткових умов; 2) шукати максимальний простий ланцюг з умовою, що деякі зазначені вершини мають бути наявні в знайденому ланцюзі, або/і деякі вершини не повинні бути в знайденому ланцюзі. Розв'язок другого випадку побудовано на визначеному понятті серединної умови ланцюга графа.

Серединні умови поділяємо на ізольовані [2] і зв'язані [3].

Узагальненою серединною умовою задачі побудови простого ланцюга визначимо вектор $Z = \{r_i(M)\}, i = 1, 2, \dots, |M|$, де $M = \{V\} \setminus \{V_a, V_b\}$ – множина вершин, які не є граничними для шуканого ланцюга, $r_i(M)$ – предикат для кожної вершини номер i з допустимими значеннями $\{-1; 0; +1\}$. При $r_i = +1$ вершина i повинна входити до ланцюга L , при $r_i = -1$ не повинна бути в ланцюзі L , а при $r_i = 0$ наявність чи брак вершини в ланцюгу не визначено. У загальному випадку предикат $r_i(M)$ є функцією від усіх вершин множини M .

Ізольована серединна умова типу 1 (або $[+1; 0]$) є вектором $Z = \{r_i(V_i)\}, i = 1, 2, \dots, |M|$, де $r_i(V_i) = 1$ для вершин i , які повинні входити до ланцюга L , і $r_i(V_i) = 0$ для всіх інших вершин. За умовою типу 1 усі вершини взаємно незалежні.

Умову типу 1 застосовуємо у випадках, коли максимальний ланцюг має обов'язково проходити через деякі фіксовані вершини, хоча порядок проходження через такі фіксовані вершини не визначений.

Ізольована серединна умова типу 2 (або $[-1;0]$) є вектором $Z = \{r_i(V_i)\}, i = 1, 2, \dots, |M|$, де $r_i(V_i) = -1$ для вершин i , які не повинні бути у ланцюзі L , і $r_i(V_i) = 0$ для всіх інших вершин. За умовою типу 2 всі вершини взаємно незалежні.

Умову типу 2 застосовуємо у випадках, коли з максимального ланцюга треба вилучити деякі фіксовані вершини.

Ізольована серединна умова типу 3 (або $[\pm 1;0]$) є вектором $Z = \{r_i(V_i)\}, i = 1, 2, \dots, |M|$, де $r_i(V_i) = 1$ для вершин i , які повинні входити до ланцюга L , $r_i(V_i) = -1$ для вершин i , які не повинні бути у ланцюзі L , і $r_i(V_i) = 0$ для всіх інших вершин. За умовою типу 3 всі вершини взаємно незалежні.

Умову типу 3 застосовуємо у випадках, коли одночасно максимальний ланцюг має обов'язково проходити через деякі фіксовані вершини і в цьому разі з ланцюга треба вилучити інші фіксовані вершини.

Зв'язана серединна умова типу 4 (або $[pos(+1);0]$) є вектором $Z = \{r_i(M)\}, i = 1, 2, \dots, |M|$, де $r_i(M) = 1$ для вершин i , які повинні бути включені до ланцюга L і для яких виконується умова $U(pos_i) = true$, і $r_i(M) = 0$ для всіх інших вершин. За умовою типу 4 вершини, які повинні бути включені до ланцюга L , взаємно залежні щодо порядку розташування в ланцюзі.

Позначимо pos_i позицію вершини i у знайденому ланцюзі як відстань від вершини V_a . Тоді умова $U(pos_i)$ буде визначена як

$$U(pos_i) = (pos_l < pos_i < pos_r); \text{ для всіх } l = 1, 2, \dots, i-1; r = i+1, i+2, \dots, k.$$

l – вершини, розташовані на шляху ланцюга перед вершиною i ; r – вершини, розташовані на шляху ланцюга після вершини i ; k – кількість вершин, для яких $r_i(M) = 1$.

Умову типу 4 застосовуємо у випадках, коли максимальний ланцюг має обов'язково проходити через деякі фіксовані вершини, і порядок проходження через такі фіксовані вершини визначений додатковою умовою $U(pos_i)$, принаймні для окремих вершин.

Зв'язана серединна умова типу 5 (або $[pos(+1);-1;0]$) є вектором $Z = \{r_i(M)\}, i = 1, 2, \dots, |M|$, де $r_i(M) = 1$ для вершин i , які повинні бути включені до ланцюга L і для яких виконується умова $U(pos_i) = true$,

$r_i(M) = -1$ для вершин, які не повинні бути у ланцюзі L , і $r_i(M) = 0$ для всіх інших вершин. Умову $U(pos_i)$ визначають так само, як для серединної умови типу 4. За умовою типу 5 вершини, які повинні бути включені до ланцюга L , взаємно залежні щодо порядку розташування в ланцюзі.

Умову типу 5 застосовуємо у випадках, коли потрібно розв'язати задачу з такими додатковими обмеженнями: а) максимальний ланцюг має обов'язково проходити через деякі фіксовані вершини; б) порядок проходження через такі фіксовані вершини визначений умовою $U(pos_i)$, принаймні для однієї пари вершин; в) з ланцюга потрібно вилучити інші фіксовані вершини.

На основі визначеного поняття конструктивної повноти серединної умови [2] маємо таку зведену таблицю властивостей серединних умов:

Таблиця. Властивості серединних умов

Тип умови	Повнота щодо вершин	Повнота щодо ланцюгів
тип 1	ні	ні
тип 2	так	ні
тип 3	так	ні
тип 4	ні	ні
тип 5	так	так

Інтерпретація повноти серединної умови щодо вершин означає обернене формулювання задачі побудови максимального ланцюга: чи можна записати сукупність серединних умов $Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_N$ таку, щоб розв'язками задачі були всі можливі підмножини вершин, які належать хоча б одному простому ланцюгу від V_a до V_b , який можна побудувати за структурою графа. Аналогічно – щодо всіх можливих ланцюгів.

1. Черняхівський В.В. Рекурсивний алгоритм побудови максимального простого ланцюга неповного графа / В.В.Черняхівський // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 13. – С. 45-50.
2. Черняхівський В. Ізольовані серединні умови та їхні властивості для задачі максимізації побудови простого ланцюга графа / В.Черняхівський // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2013. – Вип. 20. – С. 109-117.
3. Черняхівський В. Задачі побудови простого ланцюга графа для зв'язаних серединних умов / В.Черняхівський // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2014. – Вип. 21. – С. 139-147.

УДК 627.324.2/3:532.72

Ю.В. Чуй, П.М. Мартинюк

(Національний університет водного господарства та природокористування)

ПРО ВПЛИВ НАПІВПРОНИКНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА СТИБОК НАДЛИШКОВИХ НАПОРІВ В ҐРУНТІ (ДВОВИМІРНИЙ ВИПАДОК)

Нехай задано область Ω , яка складається з однорідного ґрунту та містить тонкі напівпроникні включенням. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що таке включення одне (γ^* на рис. 1).

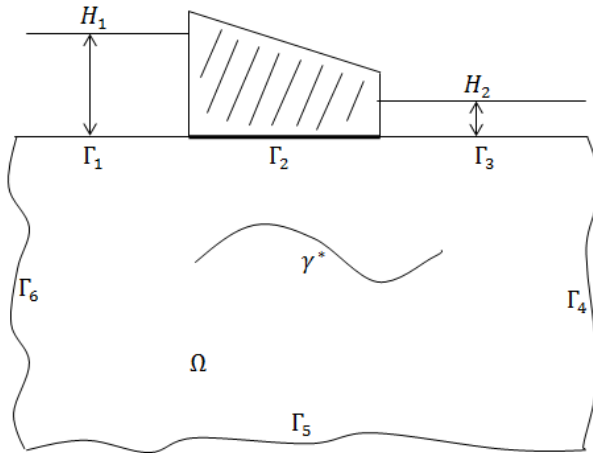


Рисунок 1. – Досліджувана область ґрунту з напівпроникним включенням

Математична модель двовимірної задачі процесу фільтраційної консолідації ґрунту в області Ω з урахуванням впливу перенесення солей в неізотермічному режимі буде описуватись наступною крайовою задачею [1, 2]:

$$\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} [\nabla \cdot (K \nabla h - \nu \nabla c - \mu \nabla T)] = \frac{\partial h}{\partial t}, (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (D \nabla c + D_T \nabla T) - (u, \nabla c) - \gamma_1 (c - C_m) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\lambda(c) \nabla T) - \rho c_\rho (u, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (3)$$

$$u = -K(c, T, e) \nabla h + \nu(c) \nabla c + \mu \nabla T, \quad (4)$$

$$(u, n)|_{(x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6} = 0, \quad (5)$$

$$h|_{(x,y) \in \Gamma_1} = H_1, \quad h|_{(x,y) \in \Gamma_3} = H_2, \quad (6)$$

$$(D\nabla c + D_T \nabla T - uc, n)|_{(x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6} = 0, \quad (7)$$

$$c|_{(x,y) \in \Gamma_1} = c_1, \quad c|_{(x,y) \in \Gamma_3} = c_2, \quad (8)$$

$$(\lambda(c) \nabla T - \rho c_\rho uT, n)|_{(x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6} = 0, \quad (9)$$

$$T|_{(x,y) \in \Gamma_1} = T_1, \quad T|_{(x,y) \in \Gamma_3} = T_2, \quad (10)$$

$$(u, n)_{\gamma^*}^{\pm} = -\frac{k^{\gamma^*}}{d} (h^+ - h^-) + \frac{\nu^{\gamma^*}}{d} (c^+ - c^-) + \frac{\mu^{\gamma^*}}{d} (T^+ - T^-), \quad (11)$$

$$(x, y) \in \gamma^*, t > 0$$

$$(q_c, n)_{\gamma^*}^{\pm} = (1 - \alpha) \left((u, n)_{\gamma^*}^{\pm} - \frac{D^{\gamma^*}}{d} (c^+ - c^-) - \frac{D_T^{\gamma^*}}{d} (T^+ - T^-) \right), \quad (12)$$

$$(x, y) \in \gamma^*, t > 0,$$

$$(q_T, n)_{\gamma^*}^{\pm} = \rho c_\rho (u, n)_{\gamma^*}^{\pm} T^{\pm} - \frac{\lambda^{\gamma^*}}{d} (T^+ - T^-), (x, y) \in \gamma^*, t > 0, \quad (13)$$

$$[(u, n)]|_{\gamma^*} = 0, [(q_c, n)]|_{\gamma^*} = 0, [(q_T, n)]|_{\gamma^*} = 0, t > 0, \quad (14)$$

$$q_c = uc - D\nabla c - D_T \nabla T, \quad q_T = \rho c_\rho uT - \lambda(c) \nabla T, \quad (15)$$

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y), \quad c(x, y, 0) = c_0(x, y), \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (16)$$

де h – надлишковий напір; c – концентрація хімічних речовин в поровій рідині; T – температура; $K = K(c, T, e)$ – коефіцієнт фільтрації; ν – коефіцієнт хімічного осмосу; μ – коефіцієнт термічного осмосу; γ – питома вага порової рідини; e – коефіцієнт пористості ґрунту; ξ – коефіцієнт бічного тиску ґрунту; a – коефіцієнт стисливості ґрунту; u – вектор швидкості фільтрації; D – коефіцієнт конвективної дифузії; D_T – коефіцієнт термодифузії; C_m – концентрація граничного насичення; γ_1 – коефіцієнт швидкості масообміну; σ – пористість ґрунту; λ – коефіцієнт ефективної теплопровідності вологого ґрунту; ρ – густина порового розчину; c_ρ – питома теплоємність порового розчину; c_T – об’ємна теплоємність ґрунту; d – товщина напівпроникного включення; k^{γ^*} , ν^{γ^*} , μ^{γ^*} , D^{γ^*} , $D_T^{\gamma^*}$, λ^{γ^*} – характеристики напівпроникного включення

γ^* ; $\mathbf{n}$ – певним чином зорієнтований вектор напрямних косинусів нормалі до напівпроникного включення; $h_0(x, y)$, $c_0(x, y)$, $T_0(x, y)$, H_1 , H_2 , c_1 , c_2 , T_1 , T_2 – задані функції; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 = \Gamma$ – межа області Ω .

Домноживши рівняння (1)-(3) та кожну з початкових умов (16) на функції $(s_1(x, y); s_2(x, y); s_3(x, y)) \in H_0$ та проінтегрувавши одержані рівності по області Ω , після застосування формули Остроградського-Гауса, врахувавши граничні умови (5)-(10) та умови спряження (11)-(14), отримаємо задачу в слабкій постановці. Її (задачу) розв'язую методом скінченних елементів (МСЕ) [3], попередньо дискретизувавши область Ω скінченноелементною трикутною сіткою із подвійною нумерацією вузлів на включенні [4]. Наближений узагальнений розв'язок шукаю у вигляді лінійної комбінації базисних функцій МСЕ з коефіцієнтами, залежними лише від часу. Для відшукування цих коефіцієнтів із задачі Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь використано схему Кранка-Ніколсона.

У результаті проведення чисельних експериментів досліджено вплив теплосолеперенесення на розподіл надлишкових напорів, зокрема в околі розміщення напівпроникного включення. У випадку урахування явищ теплосолеперенесення процес фільтраційної консолидації прискорюється (поле надлишкових напорів розсіюється швидше). На включенні спостерігається стрибок напорів. При збільшенні параметра α , який відповідає за ступінь ідеальності напівпроникного включення, стрибок напору збільшується. Це пояснюється фактом, що чим більше α , тим менше проходить солей через напівпроникне включення. Тобто солі накопичуються з однієї сторони включення і зростає вплив осмотичної фільтрації.

1. *Власюк А.П.* Математичне моделювання консолидації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах: Монографія / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 416 с.
2. *Власюк А.П.* Чисельне розв'язування задач консолидації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло- масо переносу методом радіальних базисних функцій / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.
3. *Савула Я.Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я.Г. Савула. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.
4. *Сергиенко И.В.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.

С.М. Шахно, О.Я. Боднар, Г.П. Ярмола

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД НЬЮТОНА-БРОЙДЕНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо нелінійне рівняння вигляду

$$H(x) \equiv F(x) + G(x) = 0, \quad (1)$$

де оператори F і G визначені на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями у банаховому просторі Y . F – диференційовний за Фреше оператор, G – неперервний оператор, диференційовності якого, в загальному випадку, не вимагається. Потрібно знайти розв'язок $x^* \in D$, який задовольняє рівняння (1).

Найвідомішим методом розв'язування рівняння (1) є класичний метод Ньютона. Проте він незастосовний у разі відсутності аналітично заданих похідних. У цьому випадку можна використовувати різниці та комбіновані ітераційні процеси.

Враховуючи властивості операторів F і G , нами запропоновано комбінований процес, побудований на базі методів Ньютона і Бroyдена [1]. Його ітераційна формула має вигляд

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k) + B_k]^{-1} H(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

де B_0 – задано, а B_{k+1} визначається за формулою

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) s_k^T}{s_k^T s_k}, \quad s_k = x_{k+1} - x_k, \quad y_k = G(x_{k+1}) - G(x_k).$$

Для забезпечення хорошого початкового наближення B_0 обирається як $G(x_{-1}; x_0)$, а x_{-1} близьким до x_0 , тобто, $\|x_0 - x_{-1}\| = 10^{-4}$. Тут $G(x; y)$ – поділені різниці першого порядку оператора G за точками x та y . У випадку систем нелінійних алгебричних рівнянь $G(x; y)$ – це матриця, елементи якої визначаються за формулою

$$G(x; y)_{ij} = \frac{G(x_1, \dots, x_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - G(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, \dots, y_n)}{x_j - y_j}.$$

Алгоритм методу Ньютона-Бройдена.

1. Задати початкові наближення x_{-1} та x_0
2. Обчислити $F'(x_0)$, $B_0 = G(x_{-1}; x_0)$, $H_0 = F(x_0) + G(x_0)$ та розв'язати $(F'(x_0) + B_0)s_0 = -H_0$ відносно s_0 .

3. Для $k = 0, 1, 2, \dots$ поки $\|x_{k+1} - x_k\| \geq \varepsilon$ і $\|H(x_{k+1})\| \geq \varepsilon$ виконати:

3.1. обчислити $x_{k+1} = x_k + s_k$, $F'(x_{k+1})$, $H_{k+1} = F(x_{k+1}) + G(x_{k+1})$ та $y_k = G(x_{k+1}) - G(x_k)$;

3.2. перерахувати B_{k+1} за формулою $B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) s_k^T}{s_k^T s_k}$;

3.3. розв'язати $(F'(x_{k+1}) + B_{k+1})s_{k+1} = -H_{k+1}$ відносно s_{k+1} .

Запропонований ітераційний алгоритм тестувався на багатьох прикладах. Розглянемо систему з трьома рівняннями. Для зручності позначимо компоненти вектора невідомих наступним чином: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$. В результаті система набуде вигляду

$$\begin{cases} z^2(1-y) - xy + |y - z^2| = 0, \\ z^2(x^3 - x) - y^2 + |3y^2 - z^2 + 1| = 0, \\ 6xy^3 + y^2z^2 - xy^2z + |x + z - y| = 0. \end{cases}$$

Відомо, що точний розв'язок системи $x^* = (-1, 2, 3)$.

Запропонований комбінований метод (2) порівнювався з відомими ітераційними процесами, зокрема з базовим методом Бroyдена. У наступній таблиці наведено кількість ітерацій, потрібних для отримання розв'язку системи, для різних початкових наближень x_0 та точності ε .

Таблиця. Кількість ітерацій.

ε	$x_0 = [-1.5; 2.5; 3.5]$		$x_0 = [-1.5; 3; 4]$	
	Метод Ньютона-Бroyдена	Метод Бroyдена	Метод Ньютона-Бroyдена	Метод Бroyдена
10^{-5}	7	10	7	13
10^{-10}	10	15	11	17
10^{-15}	13	18	14	21

Отримані результати вказують про перевагу комбінованого ітераційного процесу (2) перед методом Бroyдена.

1. Дэннис Дж. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. – Москва: Мир, 1988. – 440 с.

ВПЛИВ ПРУЖНОГО СТРИЧКОВОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ

Розглянемо поздовжній зсув уздовж осі Oz анізотропного півпростору ($y > 0$) з пружними характеристиками матеріалу a_{ij} ($i, j = 4, 5$). З огляду на характер антиплоскої задачі напружено-деформований стан у кожній площині, перпендикулярній до напрямку зсуву, однаковий і тому достатньо обмежитися аналізом полів у одній із них, зокрема xOy .

Усередині тіла вздовж відрізка L' розміщене нахилене під кутом φ до межі півпростору $y = 0$ тонке пружне включення з пружними характеристиками матеріалу a_{ij}^0 ($i, j = 4, 5$). Включення має довжину $2a$ і малу порівняно з довжиною товщину $2h$. У центрі O_0 відрізка L' розмістимо початок двох локальних декартових систем координат $x_0O_0y_0$ і $s_0O_0n_0$ ($O_0s_0 \parallel L'$, $O_0x_0 \parallel Ox$), зв'язаних залежністю

$$z \equiv x + iy = z_0 + z_{00}, \quad z_0 \equiv x_0 + iy_0, \quad s_0 + in_0 = z_0 e^{-i\varphi},$$

де $z_{00} = iH$ – координати центра включення в основній системі координат xOy ; H – величина заглиблення включення.

За принципом спряження методу функцій стрибка тонке включення вилучається з розгляду, а його вплив на тіло зводиться до утворення на L' стрибків вектора напружень та похідної від вектора переміщень:

$$\sigma_{n_0z}^- - \sigma_{n_0z}^+ = f_3(s_0), \quad \frac{\partial}{\partial s_0}(w^- - w^+) = f_6(s_0), \quad s_0 \in L'. \quad (1)$$

Причому $f_3(s_0) = f_6(s_0) = 0$, якщо $s_0 \notin L'$. Функції стрибка, взагалі кажучи, є невідомими функціями.

Умови взаємодії тонкого пружного анізотропного включення із зовнішнім середовищем, які зв'язують між собою напруження та переміщення на поверхнях матриці, що прилягають до протилежних боків включення, мають вигляд

$$\mathbf{S}^+(s_0) + \mathbf{S}^-(s_0) = \left(2\mathbf{N} + \frac{1}{h} \int_{-a}^{s_0} \mathbf{f}(t) dt \right) \mathbf{L}, \quad s_0 \in [-a, a]. \quad (2)$$

$$\text{Тут } \mathbf{S}(z) = \left(\sigma_{n_0z}(z), \frac{\partial w(z)}{\partial s_0} \right), \quad \mathbf{f}(t) = (f_3(t), f_6(t)), \quad \mathbf{L} = \frac{1}{a_{44}^0} \begin{pmatrix} -a_{45}^0 & |r'^0|^2 \\ a_{44}^0 & -a_{45}^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N} = (N_1, N_2) - \text{вектор апіорних констант, } N_1 = \sigma_{s_0 z}^0(-a) \frac{a'_{44}}{\max(a'_{44}, a'_{44})},$$

$$N_2 = \frac{\min(a'_{44}, a'_{44})}{a'_{44}} [-a'_{44} \sigma_{n_0 z}^0(-a) - a'_{45} \sigma_{s_0 z}^0(-a)], \quad r'^0 = \sqrt{(a'_{45})^2 - a'_{44} a'_{55}}.$$

Сталі a'_{km} характеризують пружні властивості матеріалу у системі координат $s_0 O_0 n_0$.

Повний розв'язок задачі подамо у вигляді суперпозиції однорідного, основного збуреного та збуреного коригувального розв'язків. Однорідний розв'язок відповідає впливу зовнішнього навантаження на тіло без дефекту, а тому під час переходу через вісь включення він не викликає стрибків напружень і переміщень. Тому збурений розв'язок повинен задовольняти нульові крайові умови і породжувати стрибки напруження і переміщення (1) на лінії L' .

Отримано основний збурений розв'язок для півплощини в системі координат xOy :

$$\sigma_{yz}^0 = \frac{\gamma'}{4} t_3(z) + \frac{\bar{\gamma}'}{4} t_3(\bar{z}) + \frac{i\gamma'}{4a'_{55}\alpha'} t_6(z) - \frac{i\bar{\gamma}'}{4a'_{55}\alpha'} t_6(\bar{z}),$$

$$\sigma_{xz}^0 = \frac{\delta'}{4} t_3(z) + \frac{\bar{\delta}'}{4} t_3(\bar{z}) + \frac{i\delta'}{4a'_{55}\alpha'} t_6(z) - \frac{i\bar{\delta}'}{4a'_{55}\alpha'} t_6(\bar{z}),$$

$$\frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{a_{45}\gamma' + a_{55}\delta'}{4} t_3(z) + \frac{a_{45}\bar{\gamma}' + a_{55}\bar{\delta}'}{4} t_3(\bar{z}) +$$

$$+ \frac{i(a_{45}\gamma' + a_{55}\delta')}{4a'_{55}\alpha'} t_6(z) - \frac{i(a_{45}\bar{\gamma}' + a_{55}\bar{\delta}')}{4a'_{55}\alpha'} t_6(\bar{z}),$$

де $\gamma' = \alpha' \sin \varphi + i(\cos \varphi - \beta' \sin \varphi)$, $\delta' = \alpha' \cos \varphi - i(\beta' \cos \varphi + \sin \varphi)$,

$$\alpha' = \frac{\sqrt{a'_{44}a'_{55} - (a'_{45})^2}}{a'_{55}}, \quad \beta' = \frac{a'_{45}}{a'_{55}}, \quad t_r(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{f_r(t)dt}{t-z}, \quad r=3,6,$$

$$z = x(\cos \varphi - \beta' \sin \varphi) + (y-H)(\sin \varphi + \beta' \cos \varphi) + i\alpha'[(y-H)\cos \varphi - x\sin \varphi].$$

В результаті розв'язування задачі з відповідною крайовою умовою, отримано збурений коригувальний розв'язок

$$\sigma_{yz}^1 = -\frac{\gamma'}{4} \left[t_3(z^\alpha) + \frac{i}{a'_{55}\alpha'} t_6(z^\alpha) \right] - \frac{\bar{\gamma}'}{4} \left[t_3(\bar{z}^\alpha) - \frac{i}{a'_{55}\alpha'} t_6(\bar{z}^\alpha) \right],$$

$$\sigma_{xz}^1 = -\beta' \hat{\sigma}_{yz}^1 - \frac{i\alpha'\gamma'}{4} \left[t_3(z^\alpha) + \frac{i}{a'_{55}\alpha'} t_6(z^\alpha) \right] + \frac{i\alpha'\bar{\gamma}'}{4} \left[t_3(\bar{z}^\alpha) - \frac{i}{a'_{55}\alpha'} t_6(\bar{z}^\alpha) \right],$$

$$\frac{\partial w^1}{\partial x} = -\frac{i\alpha a_{55}\gamma'}{4} \left[t_3(z^\alpha) + \frac{i}{a'_{55}\alpha'} t_6(z^\alpha) \right] + \frac{i\alpha a_{55}\bar{\gamma}'}{4} \left[t_3(\bar{z}^\alpha) - \frac{i}{a'_{55}\alpha'} t_6(\bar{z}^\alpha) \right].$$

Тут $z^\alpha = -k_1^\alpha (x + (\beta - i\alpha)y) - k_2^\alpha$, $k_1^\alpha = \beta' \sin \varphi - \cos \varphi + i\alpha' \sin \varphi$,
 $k_2^\alpha = H(\sin \varphi + \beta' \cos \varphi) + i\alpha' H \cos \varphi$.

Підставимо граничні значення повного розв'язку в умови взаємодії (2) і отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно функцій стрибка $f_3(t)$, $f_6(t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{-a}^{s_0} \mathbf{f}(t) \mathbf{L} dt + \mathbf{t}(s_0) \mathbf{V}^\alpha - \frac{1}{2} \mathbf{t}(\tilde{z}) \mathbf{D}^\alpha - \frac{1}{2} \mathbf{t}(\tilde{\bar{z}}) \bar{\mathbf{D}}^\alpha = \\ = 2\mathbf{S}^0 \Big|_{n_0=0} - 2\mathbf{NL} \quad (s_0 \in [-a, a]), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{де} \quad \mathbf{V}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -a'_{55}\alpha' \\ \frac{1}{a'_{55}\alpha'} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma' d_1 & \gamma' d_2 \\ \frac{i\gamma' d_1}{a'_{55}\alpha'} & \frac{i\gamma' d_2}{a'_{55}\alpha'} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}(t) = (t_3(t), t_6(t)),$$

$$d_1 = \sin \varphi (i\alpha - \beta) - \cos \varphi, \quad d_2 = a'_{45} d_1 + a'_{55} (\cos \varphi (\beta - i\alpha) - \sin \varphi),$$

$$\tilde{z} = -k_1^\alpha (s_0 \cos \varphi + (\beta - i\alpha)(s_0 \sin \varphi + H)) - k_2^\alpha.$$

Систему сингулярних інтегральних рівнянь для паралельного до межі півпростору включення отримано з (3) підстановкою $\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{-a}^{x_0} \mathbf{f}(t) \mathbf{L} dt + \mathbf{t}(x_0) \mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{t}(x_0 - 2i\alpha H) \mathbf{D} - \frac{1}{2} \mathbf{t}(x_0 + 2i\alpha H) \bar{\mathbf{D}} = \\ = 2\mathbf{S}^0 \Big|_{y_0=0} - 2\mathbf{NL} \quad (x_0 \in [-a, a]), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{55}\alpha \\ 1/(a_{55}\alpha) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -i & a_{55}\alpha \\ 1/(a_{55}\alpha) & i \end{pmatrix}.$$

Систему сингулярних інтегральних рівнянь (4) з додатковою умовою розв'язано методом колокацій. За відомими функціями стрибка можна обчислити напружено-деформований стан у довільній точці півпростору з включенням.

Досліджено напружений стан анізотропних півпросторів з вільним і жорстко защемленим краями біля тонкого пружного включення для повного діапазону його пружних властивостей від тріщини до абсолютно жорсткого.

Г.М. Щербата

(ТЗОВ “ЕЛЕКС”, м. Львів)

МЕТА МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ОДНОВИМІРНОГО ГЕТЕРОДИФУЗНОГО МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ З ДОПОМОГОЮ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

В процесі дослідження процесів гетеродифузного масоперенесення виникає необхідність аналізувати концентрацію домішки для різних вхідних параметрів моделі. Це призводить до багатократного розв'язування задачі аналізу (задачі розрахунку) для різних вхідних параметрів. Така необхідність виникає також у випадках розв'язування задач ідентифікації параметрів та задач оптимізації. У багатьох випадках необхідно знаходити значення розв'язку (або певної характеристики від розв'язку) не у всіх точках області, а лише у невеликій кількості точок (або в одній точці, в якій вибрана характеристика приймає максимальне чи мінімальне значення).

Для економії часу і обчислювальних ресурсів в процесі багатократних розв'язувань задачі аналізу доцільно використовувати простіші моделі (meta-models, surrogate models), які в певному діапазоні параметрів моделі з необхідною точністю обчислюють значення вибраних характеристик системи [1, 2].

В процесі побудови мета моделі можна виділити такі основні етапи: побудова плану експериментів та вибір аналітичного представлення мета моделі. В даній роботі запропонована поліноміальна регресійна модель для обчислення максимального значення сумарної концентрації забруднювача у шарі ґрунту на основі одновимірної моделі гетеродифузного масоперенесення. Побудована мета модель дала можливість отримати розв'язок задачі мінімізації максимального значення сумарної концентрації домішки шляхом вибору коефіцієнтів дифузії та коефіцієнтів інтенсивності процесів переходу частинок з одного стану в інший.

Для опису процесу переносу домішкової речовини у шарі ґрунту використовуємо рівняння математичної моделі, запропонованої в роботі [3]. Запишемо в матричній формі, приведені до безрозмірного вигляду, рівняння моделі:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) + Qc + f, \quad (\xi, \tau) \in \Omega_\xi \times \Omega_\tau, \quad (1)$$

$$\Omega_\xi = [\xi_0, \xi_e], \quad \Omega_\tau = [0, \tau_e],$$

де $c = [c_1, c_2, c_3]^T$ - концентрація домішкової речовини в поровому розчині, поверхні і скелеті ґрунту відповідно; $f = [f_1, f_2, f_3]^T$ - інтенсивність внутрішніх джерел забрудника в кожній із фаз середовища. Матриці D та Q утворені з безрозмірних кінематичних коефіцієнтів дифузії d, d_1, d_2 та безрозмірних коефіцієнтів переходу a, a_1, a_2 :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & d_1 & 0 \\ d_2 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ a & -(1+a_2) & a_1 \\ 0 & a_2 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Рівняння (1) доповнюється відповідними початковою та крайовими умовами.

В даній роботі для отримання наближеного розв'язку початково-крайової задачі використовуються напівдискретні апроксимації Гальоркіна та метод скінченних елементів [4]. В результаті початково-крайова задача приводиться до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР) відносно вузлових значень концентрацій. Для розв'язування отриманих СЗДР використовується неявні методи (методи, що базуються на формулах диференціювання назад, схема Кранка - Ніколсона).

Розглянемо приклад шару ґрунту, на верхній границі якого діє постійне джерело забрудника [3,4]. На цій границі задано значення сумарної концентрації c_s : $c_1(0, \tau) = \alpha c_s$, $c_2(0, \tau) = (1 - \alpha)c_s$. Параметр α ($0 \leq \alpha \leq 1$) задає долю домішкової речовини, яка попадає з поверхні ґрунту в поровий розчин та адсорбований на скелеті ґрунту шар води відповідно. На нижній частині шару задані умови масоізоляції: $\partial c_1 / \partial \xi|_{\xi=\xi_e} = \partial c_2 / \partial \xi|_{\xi=\xi_e} = 0$. В початковий момент часу забруднення в шарі ґрунту відсутнє: $c(\xi, 0) = 0$.

Для даної задачі було проведено серію обчислювальних експериментів для різних значень параметрів моделі $u_m = [d, d_1, d_2, a, a_1, a_2]^T$ [3,4]. В результаті обчислювальних експериментів встановлено, що найвище значення сумарної концентрації домішки $c_s(\xi, \tau, u_m) = c_1(\xi, \tau, u_m) + c_2(\xi, \tau, u_m) + c_3(\xi, \tau, u_m)$ в будь-який момент часу τ для різних значень параметрів моделі досягається біля верхньої границі. З плином часу значення сумарної концентрації зростає.

Позначимо через u, u_z відповідно вектори параметрів моделі, значення яких можуть змінюватись та залишатися незмінними в процесі повторних розрахунків (вектори u, u_z утворюють вектор параметрів

моделі u_m). Розглянемо функцію $\psi(u) = c_s(\xi_*, \tau_e, u_m)$, яка визначає значення сумарної концентрації домішки в кінцевий момент часу τ_e в точці ξ_* із її максимальним значенням. Для обчислення функції $\psi(u)$ для різних значень параметрів запропонована поліноміальна регресійна мета модель другого порядку.

Приведемо результати числових досліджень для наступних безрозмірних характеристик шару ґрунту: $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $a_1 = 0.001$, $a_2 = 0.01$, $c_s = 1$, $\xi_e = 10$, $\alpha = 0.5$, $\tau_e = 200$. В ролі вектора u виберемо вектор параметрів $u = [u_1, u_2]^T = [d, a]^T$. Дані параметри належать області $U = \{u : u^- \leq u \leq u^+\}$, $u^- = [u_1^-, u_2^-]^T = [d^-, a^-]^T$, $u^+ = [u_1^+, u_2^+]^T = [d^+, a^+]^T$, $u^- = [0.08, 9.60]^T$, $u^+ = [0.14, 10.40]^T$.

Початковий план експерименту складається із k_e точок, які рівномірно покривають область зміни параметрів $U : (u_{1i}, u_{2i}) \in U$, $i_j = \overline{1, k_{je}}$, $j = 1, 2$, $u_{ji} = u_j^- + (i_j - 1)h_j$, $h_j = (u_j^+ - u_j^-)/(k_{je} - 1)$, $k_e = k_{1e} \cdot k_{2e}$, $k_{1e} = 4$, $k_{2e} = 3$, $k_e = 12$. В точках експерименту (u_{1i}, u_{2i}) проводимо розрахунок згідно повної моделі (розв'язуємо вихідну початково крайову задачу для значень параметрів (u_{1i}, u_{2i})) і обчислюємо в цих точках значення сумарної концентрації $\psi_{i_1 i_2} = \psi(u_{1i}, u_{2i})$, $i_j = \overline{1, k_{je}}$, $j = 1, 2$.

Функцію $\psi(u)$ апроксимуємо мета моделлю $\hat{\psi}(u)$ у вигляді поліному другого порядку:

$$\hat{\psi}(u) = \beta_0 + \beta_1 \tilde{u}_1 + \beta_2 \tilde{u}_2 + \beta_3 \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 + \beta_4 \tilde{u}_1^2 + \beta_5 \tilde{u}_2^2, \quad (2)$$

$$\tilde{u}_j = (u_j - u_j^-)/(u_j^+ - u_j^-), \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Зауважимо, що мета модель (2) записана у вигляді квадратичної функції відносно змінних $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, які отримані в результаті нормування (3) параметрів моделі. При цьому змінні $\tilde{u}_j$, $j = 1, 2$ належать проміжку $[0, 1]$.

Значення коефіцієнтів $\beta = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_5]^T$ знаходимо шляхом мінімізації суми квадратів похибок $e_{i_1 i_2}^2$ в точках експерименту між точним значенням функції $\psi(u)$ та мета функцією $\hat{\psi}(u)$:

$$E(\beta) = \sum_{i_1=1}^{k_{1e}} \sum_{i_2=1}^{k_{2e}} e_{i_1 i_2}^2 = \sum_{i_1=1}^{k_{1e}} \sum_{i_2=1}^{k_{2e}} \psi(u_{1i_1}, u_{2i_2}) - \hat{\psi}(u_{1i_1}, u_{2i_2})^2. \quad (4)$$

В результаті мінімізації функціоналу (4) для повних і неповних поліномів другої степені найкращим з точки зору статистичних властивостей оцінок

коефіцієнтів $\beta_i, i=0,1,\dots,6$ (всі коефіцієнти значимі згідно статистики Стьюдента) виявився наступний поліном:

$$\hat{\psi}(u) = 6.93 - 1.82\tilde{u}_1 + 0.28\tilde{u}_2 - 0.11\tilde{u}_1\tilde{u}_2 + 0.43\tilde{u}_1^2. \quad (5)$$

Коефіцієнт β_5 біля $\tilde{u}_2^2$ статистично незначимий і в моделі (5) відсутній. Зауважимо, що відносна похибка апроксимації сумарної концентрації домішки в точках експерименту з допомогою мета моделі (5) не перевищує 0.1%. Таким чином, мета модель досить добре наближує функцію $\psi(u)$.

Мета модель (5) використано для розв'язування мінімізації максимального значення сумарної концентрації домішки: знайти $u_* = [u_{*1}, u_{*2}]^T = [d_*, a_*]^T$ із умови мінімуму функції

$$\psi(u_*) = \min_{u \in U} \psi(u). \quad (6)$$

Розв'язування задачі оптимізації (6) приводить до необхідності багатократного розв'язування початково-крайової задачі для системи рівнянь (1). Тому критерій мети $\psi(u)$ в задачі (6) було замінене функцією $\hat{\psi}(u)$, яка обчислюється згідно (5). В результаті розв'язування задачі оптимізації із критерієм мети у вигляді функції (5) отримано наступну точку мінімуму: $u_* = [0.14, 9.6]^T = [d^+, a^-]^T$, яка знаходиться на границі області допустимих значень U (в кутовій точці). Оптимальне значення згідно мета моделі рівне $\hat{\psi}(u_*) = 5.5432$. Згідно повної моделі отримано ту ж саму точку мінімуму із значно більшими обчислювальними затратами. Значення в точці мінімуму рівне $\psi(u_*) = 5.5406$. Таким чином, використання мета моделі дозволило значно зекономити обчислювальні ресурси при багатократному розв'язуванні задач аналізу для різних параметрів моделі.

1. Forrester A.I.J. Engineering design via surrogate modelling : a practical guide / A.I.J. Forrester, A. Sobester, A.J. Keane. – John Wiley & Sons Ltd, 2008. – 238 p.
2. Queipo N. V. Surrogate-based analysis and optimization / N.V. Queipo, R.T. Haftka, W. Shyy et al. // Prog. Aerosp. Sci. – 2005. – Vol. 41 – P. 1-28.
3. Чапля Є. Я. Математичне моделювання гетеродифузного масопереносу / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
4. Щербата Г. Застосування методу скінченних елементів до розв'язування задач одновимірної гетеродифузії / Г. Щербата // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 206-215.

М.В. Щербатий

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ІМІТАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Нехай поведінка системи в просторово-часовій області Ω моделюється початково-крайовою задачею:

$$F(t, x, y, y_t, y_x, y_{xx}, u) = 0, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (1)$$

Шукана функція y , яка характеризує поведінку системи, залежить від ряду параметрів моделі системи. Позначимо через $u \in R^n$ вектор параметрів моделі, якими можна керувати. Для заданого значення параметрів u , та знайденої з рівняння (1) функції поведінки y , обчислимо характеристики системи $\psi_i(u) = \tilde{\psi}_i(u, y(u))$, $i = 0, 1, \dots, m$. Одна із заданих характеристик (наприклад, $\psi_0(u)$) вибирається в ролі критерію мети. Інші відіграють роль обмежень і утворюють множину допустимих керувань

$$U_{\partial} = \{u : u \in U, \psi_i(u) \leq 0, i = \overline{1, m}\}, \quad (2)$$

де U – множина керувань, яка у більшості випадків задає межі зміни керувань

$$U = \{u \in R^n : u^- \leq u \leq u^+, u^- \in R^n, u^+ \in R^n\}. \quad (3)$$

Задача оптимізації полягає у знаходженні такого керування $u_* \in U_{\partial}$, для якого

$$\psi_0(u_*) = \min_{u \in U_{\partial}} \psi_0(u). \quad (4)$$

Розв'язування задач оптимізації (1)-(4) приводить до необхідності багаторазового розв'язування прямої задачі (задачі аналізу) (1) для різних значень параметрів оптимізації u . Складність математичних моделей, які описують поведінку системи вимагає великої кількості обчислень при кожному розв'язуванні задачі аналізу (1) та задачі аналізу чутливості і, часто, ставить під сумнів можливість розв'язування задачі оптимізації [1].

Тому доцільним є використання імітаційного підходу в процесі розв'язування задач оптимізації [2, 3, 4]. Згідно даного підходу на різних етапах оптимізації слід використовувати моделі різного ступеню складності (meta-models, surrogate models), які замінюють вихідну модель (1). Ці моделі, як правило, записуються в аналітичній формі і апроксимують відповідні характеристики системи $\psi_i(u)$, $i = 0, 1, \dots, m$ в певних підобластях $U^{(j)} \subset U$, $j = 1, 2, \dots$ (j -номер ітерації згідно мета-моделей) в процесі оптимізації. Визначення параметрів спрощених

моделей базується на обчислювальних експериментах з моделлю найвищого рівня, а також на основі даних спостережень [2 - 5].

В процесі побудови мета моделей на кожній ітерації можна виділити наступні етапи [5]:

1. побудова початкового плану експерименту;
2. вибір аналітичного представлення мета моделі;
3. вибір нового плану експерименту;
4. оновлення мета моделі згідно нового плану експерименту.

На першому етапі вибираємо підобласть $U^{(j)} \subset U$, в якій генеруємо послідовність точок експерименту $u_j^{(k)}$, $k = \overline{1, k_{ej}}$. Точки експерименту можуть бути вибрані одним із наступних способів: рівномірно розподілені в області $U^{(j)}$; згенеровані за правилом латинського гіперкубу; ортогональної вибірки; кутових точок гіперкубу та центральної точки. Цей набір точок можуть доповнювати точки, в яких попередньо визначені розглядувані характеристики. В точках експерименту здійснюється розрахунок згідно повної моделі (1) та обчислюються відповідні характеристики $\psi_i(u_j^{(k)})$, $i = \overline{0, m}$, $k = \overline{1, k_{ej}}$.

Важливою складовою мета моделі є її аналітичне представлення, тобто вибір простих аналітичних залежностей $\hat{\psi}_i^{(j)}(u)$, $i = \overline{0, m}$ між параметрами моделі та характеристиками системи. Існують параметричні (поліноміальна регресія, моделі Крігінга) та непараметричні (багатовимірна регресія адаптивними сплайнами, радіальні базисні функції) представлення мета моделей. Параметричні моделі передбачають наявність функціональної залежності між параметрами моделі та характеристиками системи у всій підобласті зміни параметрів. Непараметричні моделі використовують різні типи моделей в різних підобластях зміни параметрів. Оцінка параметрів моделей здійснюється різними методами (наприклад, методом найменших квадратів чи методом максимальної правдоподібності).

Якщо побудовані на другому етапі мета моделі адекватно апроксимують відповідні характеристики системи, то розв'язуємо наступну задачу оптимізації: знайти таке керування $u_* \in U_\theta^{(j)}$, для якого

$$\hat{\psi}_0^{(j)}(u_{j*}) = \min_{u \in U_\theta^{(j)}} \hat{\psi}_0^{(j)}(u), \quad (5)$$

$$U_\theta^{(j)} = \{u : u \in U^{(j)}, \hat{\psi}_i^{(j)}(u) \leq 0, i = \overline{1, m}\}, \quad (6)$$

$$U^{(j)} = \{u \in R^n : u_j^- \leq u \leq u_j^+, u_j^- \in R^n, u_j^+ \in R^n\}. \quad (7)$$

В протилежному випадку зменшуємо підобласть $U^{(j)}$, вибираємо новий план експерименту та оновлюємо модель згідно нового плану експерименту.

Після розв'язування задачі (5)-(7) обчислюємо значення характеристик $\psi_i(u_{j*})$ в оптимальній точці на j -ій ітерації згідно повної моделі. Якщо значення характеристик $\psi_i(u_{j*})$, $\hat{\psi}_i^{(j)}(u_{j*})$, $i = 0, 1, \dots, m$ є близькими, то точку u_{j*} приймаємо за розв'язок вихідної задачі оптимізації (1)-(4). В протилежному випадку переходимо до наступної $(j + 1)$ -ої ітерації згідно мета моделей.

Зауважимо, що задачі оптимізації (5)-(7) є досить простими з точки зору кількості обчислень. Вони містять прості аналітичні залежності для обчислення характеристик системи і не вимагають розв'язування вихідної задачі (1).

Описаний підхід з використанням поліноміальних регресійних моделей застосовано для розв'язування задач ідентифікації параметрів та мінімізації максимальної концентрації домішки для процесів гетеродифузного масоперенесення. Математичною моделлю даних процесів є система рівнянь в частинних похідних та звичайного диференціального рівняння [6].

1. Large-Scale PDE-Constrained Optimization / L.T.Biegler, ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 20013. – 357 p.
2. Toropov V. Simulation approach to structural optimization / V. Toropov // Structural Opt. – 1989. - Vol. 1. – P. 37-46.
3. Savula Ya.H. Simulative approach to solution of optimal design problems of shell construction / Ya.H. Savula, M.V. Shcherbatyy, K.S. Ivankiv // J. of Appl. Comp. Science, Technical University, Lodz. Poland. –2004. -Vol. 12, No 2, - P. 87-106.
4. Simpson T.W. Design and analysis of computer experiments in multidisciplinary design optimization: A review of how far we have come – or not / T.W. Simpson, V. Toropov, V. Balabanov, F.A.C. Viana // 12th AIAA/ISSMO Multidis. Anal. and Opt. Conf. British Columbia, Canada – Sep. 10-12, 2008. – AIAA 2008-5802. – 22 p.
5. Forrester A.I.J. Engineering design via surrogate modelling : a practical guide / A.I.J. Forrester, A. Sobester, A.J. Keane. – John Wiley & Sons Ltd, 2008. – 238 p.
6. Чапля, Є. Я. Математичне моделювання гетеродифузного масопереносу / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.

Ю. Щербина, Р. Ракус

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

АЛГОРИТМ ВІОЛИ-ДЖОНСА ЯК ОСНОВА ДЛЯ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБЛИЧЧЯ

В роботі розглянуто алгоритм Віоли-Джонса для задачі визначення положення обличчя на зображенні

З розвитком технологій та глобальною автоматизацією процесів, однією з задач комп'ютерного зору стає розпізнавання образів на зображеннях та відеоматеріалах. Зокрема, пошук обличчя на зображенні є першим кроком для вирішення широкого кола задач. Одним з алгоритмів пошуку обличчя на зображенні є алгоритм Віоли-Джонса, описаний у 2001 році Паулом Віолою та Міхелем Джонсом.

Вхідними даними задачі пошуку обличчя є зображення для аналізу, мінімальний та максимальний розмір можливого обличчя.

Першим кроком алгоритму є отримання інтегрального представлення зображення – матриця, розміри якої співпадають з розмірами вхідного зображення, та значення елемента i -того рядка та j -того стовпця рівна сумі інтенсивностей пікселів, що знаходяться вище та лівіше даного елемента.

Наступним кроком алгоритму є сканування зображення плаваючим вікном – це деякий чотирикутник, який змінює свій розмір від мінімального розміру обличчя до максимального, та покриває все зображення, змінюючи свої координати. Для кожного вікна застосовується класифікатор, який дає відповідь на питання чи є в даному чотирикутнику шуканий об'єкт, в даному випадку обличчя.

Класифікатор, який визначає чи містить дане вікно обличчя є каскадом – набір стадій каскаду, кожна з яких може дати одну з двох відповідей: шуканий об'єкт точно не знайдено, та можливо тут є шуканий об'єкт. У випадку другої відповіді відбувається перехід до наступної стадії каскаду.

Кожну стадію каскаду ще називаються сильним класифікатором, якій є комбінацією так званих слабких класифікаторів. Формула (1) показує як шукається значення стадії каскаду, або сильного класифікатора.

$$h_{strong} = \begin{cases} true, & \sum_j h_j * w_j \geq threshold, \\ false, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (1)$$

В даній формулі h_j та w_j значення та вага відповідно j -того слабкого класифікатора, а $threshold$ – деякий поріг стадії.

Слабкий класифікатор – це деякий класифікатор, який трошки краще ніж генератор довільних відповідей може сказати, чи дане вікно містить шуканий об’єкт. Складається він з Хаар-ознаки та ваги. Хаар-ознака – це деякий чотирикутник, частина якого чорного кольору, а інша частина білого. Значенням слабого класифікатора є значення його Хаар-ознаки – різниця сум пікселів які знаходяться під чорною та білою областями ознаки. Обрахування даної суми за допомогою інтегрального представлення зображення не потребує багато операцій. Комбінація слабких класифікаторів є сильним класифікатором, який досить точно може сказати, чи шуканий об’єкт знайдено.

Алгоритм описує процес пошуку об’єкту на зображенні. Побудова та навчання класифікатора описане в наступному розділі.

Вхідними даними для навчання каскаду під розпізнавання обличчя є набір зображень шуканих об’єктів, набір негативних зображень, набір ознак хаара всіх розмірів і позицій в вхідних зображеннях, F_{target} – максимально допустимий відсоток хибних результатів класифікатора, f – максимально допустима кількість неправильно визначених позитивних об’єктів на одну стадію, та d – мінімально допустима кількість правильно визначених позитивних зображень на стадію.

Доки не буде виконуватись умова F_{target} додаємо нову стадію каскаду. Стадія тренується доти, доки не виконуватимуться умови d та f для поточної стадії. Алгоритм тренування стадії можна описати наступним чином:

- Дано множину вхідних прикладів зображень $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, де y приймає значення 1 або 0 для обличч та інших об’єктів відповідно.
- Ініціалізація початкових ваг $w_{1,i} = 1/2m$, де m – кількість негативних об’єктів, для негативних об’єктів, та $w_{1,i} = 1/2l$, де l – кількість позитивних об’єктів, для позитивних об’єктів.
- Для $t = 1 \dots T$:

1. Нормалізуємо ваги за формулою (2). Ці ваги є розподілом імовірності.

$$w_{t,i} \leftarrow \frac{w_{t,i}}{\sum_{j=1}^n w_{t,j}}. \quad (2)$$

2. Для кожної ознаки j потрібно тренувати класифікатор h_j . Помилка класифікатора обраховується за формулою (3).

$$e_j = \sum_i w_i |h_j(x_i) - y_i|. \quad (3)$$

3. Вибираємо класифікатор h_t з найменшою похибкою e_t .

4. Оновлюємо ваги використовуючи формулу (4), в якій $e_i = 0$ якщо приклад x_i класифікований правильно, $e_i = 1$ в іншому випадку, і β_i обчислюється за формулою (5).

$$w_{t+1,i} = w_{t,i} \beta_i^{1-e_i}, \quad (4)$$

$$\beta_t = \frac{e_t}{1-e_t}. \quad (5)$$

- Фінальний класифікатор будується за формулою (6), де a_t обчислюється за формулою (7).

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \sum_{t=1}^T a_t h_t(x) \geq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T a_t, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases} \quad (6)$$

$$a_t = \log \frac{1}{\beta_t}. \quad (7)$$

1. *Viola P.* Rapid object detection using a boosted cascade of simple features / P. Viola, M.J. Jones // IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. – Kauai, Hawaii, USA. – 2001. – V. 1. – P. 511-518.
2. *Viola P.* Robust Real-Time Face Detection / P. Viola, M.J. Jones // International Journal of Computer Vision. – 2004. – 57 (2).
3. *Ole Helvig Jensen* Implementing the Viola-Jones Face Detecton Algorithm / Ole Helvig Jensen // Kongens Lyngby. – 2008.

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ ОБЧИСЛЕНЬ В МАТЕМАТИЧНІЙ ПІДГОТОВЦІ СТУДЕНТІВ

Інформатизація освіти є частиною глобального процесу інформатизації сучасного суспільства і одним із стратегічних напрямів розвитку освіти, визначених Національною стратегією розвитку освіти в Україні на 2012-2021 роки. Світові процеси і тенденції інформатизації вимагають реформування системи професійної підготовки майбутніх фахівців, впровадження у вищу освіту інноваційних за змістом методів, засобів та форм навчання, «створення потужної інформаційної інфраструктури у вищих навчальних закладах з розвиненим інформаційно-комп'ютерним навчальним середовищем, впровадження Інтернет-технологій, електронного навчання, комунікаційних мереж» [1].

Сучасна університетська освіта повинна поєднувати фундаментальну та професійну підготовку. Таке поєднання можливе на основі діяльнісно-компетентнісного підходу до організації навчального процесу з використанням інноваційних технологій навчання. Тому розробка та впровадження інформаційних освітніх технологій і засобів навчання, які здатні підвищити рівень та ефективність навчального процесу, забезпечити формування професійної компетентності майбутнього фахівця, а в кінцевому рахунку – вдосконалити систему освіти, є актуальною проблемою сьогодення. До нових освітніх технологій відносяться інтерактивні технології навчання, методи і засоби яких реалізують діяльнісно-компетентнісний підхід до навчання і на сьогодні є обов'язковими складовими інформаційного навчального середовища вищого навчального закладу.

Окремої уваги в процесі вдосконалення підготовки фахівців нової формації заслуговує розробка та впровадження нових засобів навчання, що визначається, в першу чергу, загальним розвитком комп'ютерної техніки. Комплексне використання програмно-апаратних засобів дозволяє інтенсифікувати навчальний-пізнавальний процес, наповнити його новим змістом, стимулювати мотивацію та самовдосконалення студентів, підвищити якість та ефективність навчання.

Але разом з тим залишається багато питань, що потребують подальших досліджень. Насамперед це стосується застосування комп'ютерних засобів в професійній підготовці майбутніх фахівців математики та інформатики.

Реалізація діяльнісно-компетентнісного підходу в підготовці спеціаліста з математики (інформатики) сьогодні неможлива без

використання пакетів прикладних програм професійного спрямування – систем комп'ютерної математики (СКМ) [2].

Метою даної роботи є розгляд питань застосування засобів інтерактивних обчислень в сучасних СКМ в процесі професійної підготовки бакалаврів, спеціалістів та магістрів напрямів математика та інформатика з метою підвищення ефективності формування ключових та предметно-галузевих, зокрема математичної та інформатичної компетентностей майбутніх фахівців.

Серед великої кількості пакетів прикладних програм професійного спрямування виділимо універсальні СКМ Wolfram Mathematica, Махута, Maple, MatLab, MathCAD. Кожна із вказаних систем включає засоби символьних та/або наближених обчислень, візуалізації результатів, підготовки вхідних даних у вигляді файлів, підсистеми для створення і розширення спеціалізованих бібліотек для розв'язання різноманітних задач наукового та навчального призначення.

Використання вказаних СКМ в навчальному процесі є надзвичайно актуальним і перспективним, але, не зважаючи на різноманітні акції для навчальних закладів, вартість цих систем робить їх недоступними для більшості студентів. Саме тому стає надзвичайно актуальним використання засобів інтерактивних обчислень в середовищі сучасних СКМ.

Сьогодні швидко розвивається і стає все більш поширеною послуга on-line обчислень на спеціалізованих Інтернет-серверах. Підключення комп'ютерів навчальних закладів до глобальної мережі Інтернет і/або до корпоративної мережі Інтранет дозволяє не тільки користуватись інтерактивними довідниками, підручниками, посібниками, іншими навчально-методичними та інформаційними матеріалами, але й виконувати інтерактивні обчислення. Часто такі обчислення виконуються на потужних комп'ютерах з розпаралелюванням обчислювальних операцій, що забезпечує високу швидкість обчислень.

Серед переваг нової технології обчислень з використанням інтерактивних засобів відзначимо:

- немає необхідності купувати та інсталиувати дорогі програмні засоби на комп'ютері кінцевого користувача – достатньо підключити комп'ютер до Інтернету і звернутись до обчислювального серверу через браузер Microsoft Internet Explorer (версії 5.5 і вище) або інший;
- можливість доповнювати систему специфічними функціями для розв'язування задач в конкретній області науки;
- виконані обчислення (методики обчислень) дуже просто опублікувати в Інтернет чи в Інтранет для інтерактивного використання.

Інтерактивні обчислення в середовищі однієї з найпотужніших і найпопулярніших (більше 1,8 млн. легальних користувачів) системи

MathCAD виконуються з використанням технології MAS/MCS (MathCAD Application Server/MathCAD Calculation Server). Спеціалізований сервер MAS, розроблений компанією Mathsoft, забезпечує доступ до інтерактивних матеріалів та розрахунків за допомогою стандартного програмного забезпечення, не вимагаючи інсталяції додаткових програм чи модулів. Маючи велику кількість вбудованих функцій, MAS дозволяє розв'язувати широкий спектр прикладних задач та отримувати чисельні (наближені), символічні і/або графічні результати.

Один з відомих Інтернет-проектів інтерактивних обчислень в системі MathCAD підтримується освітнім математичним сайтом Exponenta.ru спільно з Санкт-Петербурзьким державним політехнічним університетом і надає користувачеві можливість виконання інтерактивних обчислень в таких розділах математики як математичний аналіз, лінійна алгебра, чисельні методи та математична статистика [3].

Інший відомий Інтернет-проект інтерактивних обчислень в системі MathCAD підтримується Московським енергетичним інститутом і ТОВ «Триєру» і [4]. На цьому обчислювальному сервері користувач має змогу розв'язувати як задачі з окремих розділів математики (математичного аналізу, лінійної алгебри, диференціальних рівнянь і систем, теорії ймовірностей і статистики), так і задачі економіки, тепло - та електроенергетики, будівництва, аналітичної хімії та інші.

Крім того на сайтах вказаних проектів розміщено велику кількість методичних та довідкових матеріалів, варіанти завдань для самостійного виконання, тести для самоперевірки.

Висновки. Використання засобів інтерактивних обчислень в сучасних системах комп'ютерної математики забезпечить підвищення ефективності та якості професійної підготовки з математики та інформатики у вищих навчальних закладах, сприятиме формуванню математичної та інформатичної компетентностей майбутніх фахівців.

1. Дослідження світових тенденцій розвитку інформатизації освіти / [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://ivo.kneu.edu.ua/ua/education2_0/proj_soit/informedu/
2. Дьяконов В.П. Компьютерная математика / В.П. Дьяконов // Статьи Соросовского Образовательного журнала, 2001/ [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/1161.html>
3. Освітній математичний сайт Exponenta.ru / [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://mas.exponenta.ru/about/>
4. Офіційний сайт ТОВ «Триєру» / [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/trenager/trenager.htm>

УДК 519.6

М.Я. Бартіш, О.В. Ковальчук

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ОГЛЯД ТРИКРОКОВИХ МЕТОДІВ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГАУССА-НЬЮТОНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЕРЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо задачу розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$P(x) = 0, \quad P: R^n \rightarrow R^m, \text{ де } m \geq n \quad (1)$$

Дану задачу можна розглядати частковим випадком задачі про найменші квадрати

$$\min \frac{1}{2} P(x)^T P(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i(x)^2$$

Одним із відомих методів для розв'язування (1) є метод Гаусса-Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \left[P'(x_k)^T P'(x_k) \right]^{-1} P'(x_k)^T P(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

В [2] був запропонований трикроковий метод наступного вигляду

$$\begin{aligned} u_k &= x_k - \left[P'(x_k)^T P'(x_k) \right]^{-1} P'(x_k)^T P(x_k), \\ v_k &= x_k - \beta_k P'(x_k)^T P(x_k), \\ x_{k+1} &= \arg \min_{\lambda} \|P(u_k + \lambda(v_k - u_k))\|, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\beta_k > 0, \quad \lambda \in R, \quad k = 0, 1, \dots$$

Доведено, що швидкість збіжності методу (3) є не менша ніж швидкість збіжності базового методу (2).

Пропонується розглянути модифікацію методу (2), для ефективнішого використання матриці $\left[P'(x_k)^T P'(x_k) \right]^{-1} P'(x_k)^T$, яку отримуємо на попередньому кроці, а саме використовувати матрицю повторно на наступному кроці обчислення.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \left[P'^T(x_0) P'(x_0) \right]^{-1} P'^T(x_0) P(x_0) \\ u_k &= x_k - \left[P'^T(x_k) P'(x_k) \right]^{-1} P'^T(x_k) P(x_k) \\ v_k &= x_k - \beta_k \left[P'^T(x_{k-1}) P'(x_{k-1}) \right]^{-1} P'^T(x_{k-1}) P(x_k), \\ x_{k+1} &= \arg \min_{\lambda} \|P(u_k + \lambda(v_k - u_k))\|, \end{aligned} \quad (4)$$

де β_k вибирається так, щоб $\|P(v_k)\| < \|P(x_k)\|$, $\lambda \in R$, $k = 0, 1, \dots$

Наступна теорема доводить, що швидкість збіжності методу (4) є не менша ніж швидкість збіжності базового методу (2), а практичні експерименти показують, що кількість обчислень вектор функції $P(x)$ вже є меншою ніж в методі (3).

Теорема 1. Нехай x^* - розв'язок задачі (1). Якщо

- 1) $P(x)$ – неперервно-диференційована в області $D \subset R^n$;

$$D = \{x \in R^n : \|x - x_0\| \leq 2B\|P(x_0)\|\}$$

- 2) $\forall x \in D \quad \|P'(x)\| \leq M_1$,

- 3) $\forall x, y \in D \quad P'(x)$ задовольняє умові Ліпшиця $\|P'(x) - P'(y)\| \leq L\|x - y\|$;

- 4) $\forall x \in D$ існує обернений оператор $[P'^T(x)P'(x)]^{-1}$, причому

$$\|[P'^T(x)P'(x)]^{-1}\| \leq B;$$

- 5) початкове наближення x_0 вибрано так, що $q = B^3 M_1^2 L \|P(x_0)\| < 1$.

Тоді послідовність $\{x_k\}$, яка побудована за (3.15) є коректно визначена, збігається і має місце оцінка

$$\|P(x_k)\| \leq \left(\prod_{i=0}^{k-2} \mu_{k-i}^{2^i} \right) q^{2^k-1} \|P(x_0)\|,$$

де $0 < \mu_k \leq 1$.

Використовуючи ідею двокрокового методу, який був запропонований в [1], пропонуємо трикроковий метод із швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$ [2].

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - [P'^T(\theta_0)P'(\theta_0)]^{-1} P'^T(\theta_0)P(x_0) \\ u_k &= x_k - [P'^T(\theta_k)P'(\theta_k)]^{-1} P'^T(\theta_k)P(x_k) \\ v_k &= x_k - [P'^T(\theta_{k-1})P'(\theta_{k-1})]^{-1} P'^T(\theta_{k-1})P(x_k), \\ x_{k+1} &= \arg \min \|P(v_k + \lambda(u_k - v_k))\| \\ \theta_0 &= x_0, \quad \theta_k = \frac{v_k + x_k}{2}, \quad \lambda \in R, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 2 Нехай

- 1) $P(x)$ - двічі неперервно - диференційовний в області $D \subset R^n$

$$D = \{x \in R^n : \|x - x_0\| \leq 2BM_1 \|P(x_0)\|\}$$

- 2) $\forall x \in D \quad \|P'(x)\| \leq M_1, \quad \|P''(x)\| \leq M_2$;

3) $\forall x, y \in D$ $P''(x)$ задовольняють умови Ліпшиця

$$\|P''(x) - P''(y)\| \leq L \|x - y\|$$

4) $\forall x \in D$ існує оператор $[P^T(x)P'(x)]^{-1}$, причому $\|[P^T(x)P'(x)]^{-1}\| \leq B$;

5) в D існує точка x^* , яка є розв'язком задачі (1), причому $P(x^*) = 0$;

б) початкове наближення x_0 вибрано так, що

$$q = \max \left\{ M_1^2 B^3 M_2, \sqrt{C M_1 B^4} \right\} \|P(x_0)\| < 1,$$

$$\text{де } C = \left(B M_2^2 M_1^2 + L M_1 \left(\left(1 + \frac{1}{2} B M_1^2 \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \right).$$

Тоді послідовність $\{x_k\}$, побудована методом (5), коректно визначена та збігається до x^* і має місце оцінка

$$\|P(x_{k+1})\| \leq \left(\prod_{i=1}^k \mu_i^{t_{k-i+1}} \right) q^{D_{k+1}} \|P(x_0)\|$$

де

$$D_{k+1} = 2D_k + D_{k-1} + 2, \quad D_{-1} = -1, \quad D_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\mu_i \in (0; 1],$$

$$t_k = 2t_{k-1} + t_{k-2}, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad k = 3, 4, \dots$$

Проводячи чисельні експерименти із даними методами, можна стверджувати, що трикрокові методи є набагато ефективнішими коли задача яку нам потрібно розв'язати має певні особливості.

Приклад 1. Розширена функція Вуда

$$P_k(x) = 10(x_i^2 - x_{i+1}), \quad \text{mod}(k, 6) = 1$$

$$P_k(x) = x_i - 1, \quad \text{mod}(k, 6) = 2$$

$$P_k(x) = \sqrt{90}(x_{i+2}^2 - x_{i+3}), \quad \text{mod}(k, 6) = 3$$

$$P_k(x) = x_{i+2} - 1, \quad \text{mod}(k, 6) = 4$$

$$P_k(x) = \sqrt{10}(x_{i+1} + x_{i+3} - 2), \quad \text{mod}(k, 6) = 5$$

$$P_k(x) = (x_{i+1} - x_{i+3}) / \sqrt{10}, \quad \text{mod}(k, 6) = 0$$

$$m = 3(n-2), \quad i = 2\text{div}(k+5, 6) - 1$$

$$x^0 = (-1, \dots, -1)$$

$$x^* = (1, \dots, 1)$$

Таблиця 1. – Порівняльні характеристики методів

Метод\N		4×6	16×42	20×54	40×116	52×150
(2)	Н	70	83	84	90	91
	К	1996	56118	91064	410763	710158
(3)	Н	45	49	58	61	62
	К	1922	33832	63677	176754	484698
(4)	Н	43	47	54	63	59
	К	2016	32645	59526	288660	461504
(5)	Н	40	30	31	34	37
	К	1796	20790	24130	155750	289391

В табл.1 використано наступні позначення Н – номер ітерації на якій отримано розв'язок, К – кількість обчислень, еквівалентних кількості обчислень вектор функції, витрачених на отримання розв'язку. Точність обчислення є 10^{-8} .

Як видно з табл.1 трикрокові методи здійснюють меншу кількість обчислень вектор функції $P(x)$, на відміну від методу Гаусса-Ньютона (2). Ця перевага трикрокових методів збільшується із збільшенням розмірності системи.

1. *Бартіш М.Я.* Про одну модифікацію методу Гаусса-Ньютона / М.Я. Бартіш, С.М. Шахно, А. І. Чипурко // Вісн. Львів. у-ту сер. мех.-мат. – 1995. – № 42. – С. 35-38.
2. *Бартіш М.* Трикрокові ітераційні алгоритми розв'язування систем нелінійних рівнянь / М. Бартіш, Н. Огородник // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 12. – С. 23–31.
3. *Бартіш М.Я.* Трикроковий метод із швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$ для розв'язування перевизначених систем нелінійних рівнянь / М. Бартіш, О. Ковальчук // Міжнародна наукова конференція Сучасні проблеми математичного моделювання то обчислювальних методів. – м. Рівне, 19-22 лютого 2015 р. С. 22.

МАТЕМАТИЧНЕ І КОМПЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ЗАБРУДНЕННЯ ІЗ НАВКОЛИШНІМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Забруднення атмосфери є однією із найсерйозніших екологічних проблем промислових міст. Тому виникає необхідність розв'язання задачі моделювання поширення забруднення в атмосфері від точкових стаціонарних джерел з метою зменшення їх впливу на екосистему.

Сформульована і проаналізована математична модель взаємодії забруднення із навколишнім середовищем із урахуванням конвективних і дифузійних процесів поширення забруднення.

Загальний фон забруднення і стан навколишнього середовища можна охарактеризувати двома величинами, а саме: $u(t, x, y)$ – концентрація забруднення та $v(t, x, y)$ – густина біомаси в момент часу t у точці з координатами x, y . Будемо вважати, що концентрація забруднення усереднюється за третьою координатою.

Процес взаємодії опишемо системою рівнянь [2,3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x - x_i, y - y_i) - gu - \frac{Auv}{B+u} + k_x \frac{\partial u}{\partial x} + k_y \frac{\partial u}{\partial y} + D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= rv \left(1 - \frac{v}{K} \right) - Cuv. \end{aligned} \quad (1)$$

Функція $f(x - x_i, y - y_i)$ характеризує джерело забруднення, координати якого (x_i, y_i) ; α_i – потужність джерела забруднення; gu – член, що описує розпад і хімічне перетворення забруднення;

$\frac{Au}{(B+u)}$ – функція впливу довкілля на забруднення; r, K – параметри логістичного рівняння, що описує динаміку біомаси при відсутності забруднення; Cuv – функція впливу забруднення на природу; (k_x, k_y) – вектор середньорічного вітру; D – коефіцієнт дифузії забруднення. Всі параметри системи вважаємо постійними і невід'ємними, за винятком (k_x, k_y) .

Уведемо безрозмірні величини:

$$u^* = \frac{u}{C}, \quad v^* = \frac{v}{AC}, \quad a_i = \alpha_i C, \quad u_0 = r, \quad \lambda = BC, \quad p = \frac{r}{KAC}.$$

У результаті із (1) отримаємо таку систему рівнянь (для зручності зірочки опущено):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i=1}^m a_i f(x-x_i, y-y_i) - gu - \frac{uv}{\lambda+u} + k_x \frac{\partial u}{\partial x} + k_y \frac{\partial u}{\partial y} + D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u_0 v \left(1 - \frac{pv}{u_0}\right) - uv.\end{aligned}\quad (2)$$

Тут u_0 – гранично допустима концентрація забруднення для даної екосистеми, p – характеристика екосистеми.

По просторових та часовій координатах заміна змінних не проводилась.

Аналіз розміщення нуль-ізоклін системи (2) показує, що в області R_2^+ є один, два або три положення рівноваги [1]. У залежності від параметрів моделі маємо різні типи стаціонарних точок. Наприклад, точка $A_1(a/g, 0)$ – сідло, якщо $u_0 > a$, в інших випадках A_1 – стійкий вузол. Якісна поведінка системи суттєво залежить від кількості і характеру її локальних точок рівноваги.

Розглянемо чисельний розв'язок системи (2) в області Ω з межею Γ_Ω отриманий методом Рунге [4]. Систему рівнянь (2) доповнюємо початковими і граничними умовами

$$\begin{aligned}u(0, x, y) &= \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ v(0, x, y) &= \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ u(t, x, y) &= \tilde{u}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_\Omega, \quad t \geq 0, \\ v(t, x, y) &= \tilde{v}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_\Omega, \quad t \geq 0,\end{aligned}\quad (3)$$

де $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\tilde{u}(x, y)$, $\tilde{v}(x, y)$ – задані функції.

Розв'язок задачі (2)-(3) будемо шукати у прямокутній області Ω : $[0, a] \times [0, b]$. Функцію $f(x-x_i, y-y_i)$ визначимо так:

$$\begin{aligned}f(x-x_i, y-y_i) &= [S_-(x-x_i) + S_+(x-(x_i+dx_i))^* \\ &[S_-(y-y_i) + S_+(y-(y_i+dy_i))],\end{aligned}$$

де S_+ , S_- – асиметричні одиничні функції; dx_i, dy_i – довжина і ширина i -го джерела забруднення.

На рис.1 наведемо результати роботи програми при наступних значеннях параметрів моделі:

$$u_0 = 0.4; p = 0.5; \lambda = 2.2; g = 1; k_x = 1; k_y = -0.1; D = 3.4.$$

Потужності джерел забруднення: $\alpha_1 = 15$, $\alpha_2 = 30$.

Крайові умови нульові. Початкові умови:

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 1 \text{ або } \psi(x, y) = 0$$

у залежності від координат.

Результати наведені для моменту часу $t = 10$.

Спостерігається значне погіршення стану природи у напрямку поширення забруднення від потужнішого джерела.

$t=10$

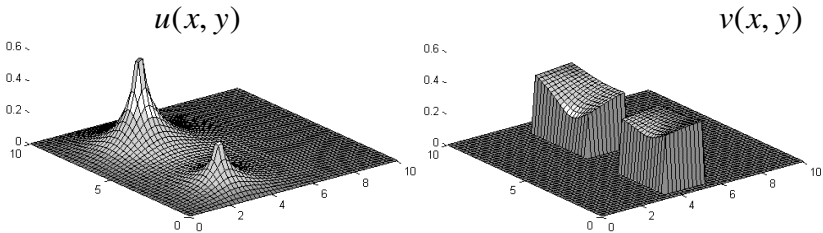


Рис.1. Розподіл концентрації забруднення та густини біомаси у момент часу $t = 10$

Аналіз отриманих результатів свідчить про поступову деградацію природи у напрямку конвективних потоків забруднення.

1. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. – М.: Наука. 1990.- 488 с.
2. Братусь А.С. Математические модели экологии и динамические системы с непрерывным временем /Братусь А.С., Новожилов А.С. – М.: МГУ, 2004.-436с.
3. Новожилов А.С. Идентификация параметров одной динамической системы моделирующей взаимодействие загрязнения с окружающей средой //Известия РАН, серия Теория и Системы Управления. – 2002. – № 3.- С. 102-105.
4. Самарский А.А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / Самарский А.А., Вабищевич П.Н. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 480 с.

Д.В. Кравцов

(Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара)

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВІДНОВЛЕННЯ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ ЗА НЕПОВНОЮ ІНФОРМАЦІЄЮ

Розглядається обернена задача знаходження розподілу сили на поверхні тіла, яка викликає в певній кількості точок всередині тіла певні задані напруження.

Тіло займає півпростір, обмежений площиною, до якої і прикладається сила. В області всередині тіла, яка має форму паралелепіпеда, задаються значення напружень σ^* , а саме $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$.

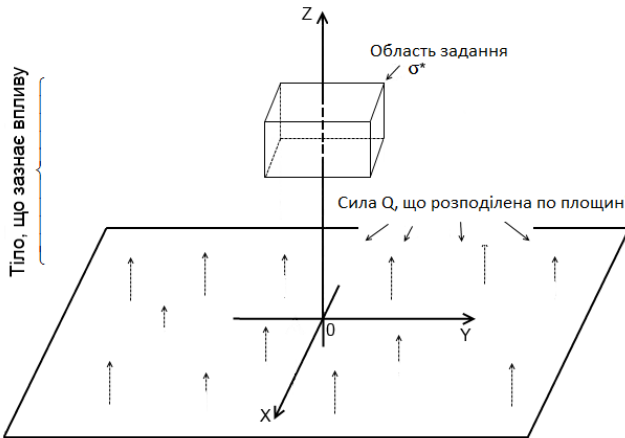


Рисунок 1. Схема навантаження на півпростір

Робиться перенос системи координат так, щоб тіло було обмежене площиною XOY при $Z=0$, тобто тіло займає весь півпростір $Z>0$ (рис.1), при цьому вісь Z проходить перпендикулярно граням паралелепіпеда через його центр симетрії.

Вважаємо, що навантаження діє на квадраті $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$, де a –

довжина сторони квадрата. Для полегшення розрахунків та узагальнення результатів усі відстані, сили та напруження зводяться до безрозмірного вигляду так, щоб довжина сторони квадрату дорівнювала 1. За цими значеннями треба знайти розподіл сили по площині, який викликав саме ці напруження, а після цього знайти напруження в певній кількості інших точок, де вони не були задані.

Проблема ускладнюється тим, що ця задача є некоректна за Адамаром, тобто значні зміни розподілу сили на поверхні тіла слабо впливають на значення напружень у ньому (особливо у віддалених точках). Одним з методів розв'язання таких задач є метод регуляризації Тихонова [1].

Вводиться функціонал відхилю від значень напружень у заданих точках $J(q) = \|A(q) - \sigma^*\|^2$, де $A(q)$ – зв'язок між прикладеною до площини силою та напругою всередині тіла, а Q – множина всіх сил, які можна прикласти до поверхні тіла. Для отримання зв'язку між розподілом навантаження на поверхні і напруженнями в заданих точках, необхідно розв'язати пряму задачу, відому як задача Бусінеска[2].

Метод Тихонова також передбачає введення функціоналу – стабілізатора, який множиться на параметр. Це необхідно для позбавлення від осциляцій. Функціонал Тихонова був взятий у такому вигляді $T(q, a) = J(q) + \alpha \cdot \Omega(q)$.

Стабілізатор був узятий у наступній формі [1]:

$$\Omega(q) = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \left(q(x, y)^2 + \left(\frac{\partial q(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy$$

Метод Тихонова потребує мінімізації функціоналу $T(q, a)$ за q при $\alpha \rightarrow 0$ для чого буде використаний метод локальних варіацій після попередньої дискретизації задачі, яка зроблена таким чином:

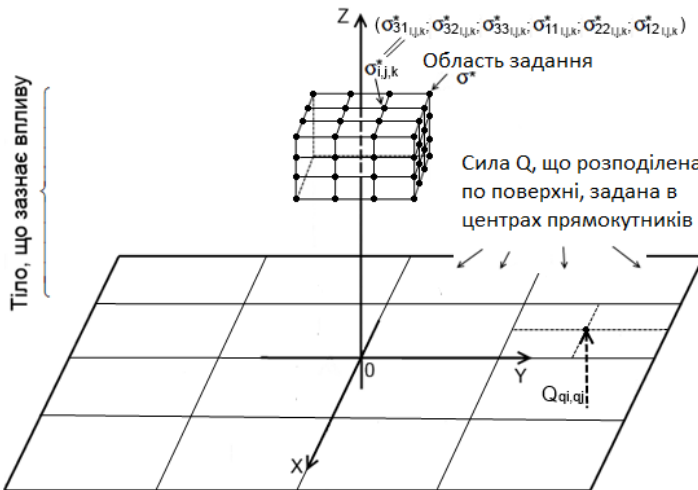


Рисунок 2. Дискретизація задачі

Область на якій розподілено навантаження, розбиваємо на прямокутники, у межах кожного з яких навантаження вважаємо сталими. Область, де задані значення σ^* , розбивають на паралелепіпеди, у вузлах яких і задаються значення напружень (рис.2). Для розв'язання задачі мінімізації функціоналу Тихонова використовувався метод локальних варіацій [3].

Після побудови алгоритму були зроблені розрахунки для конкретних прикладів при різних параметрах, що дозволило перевірити достовірність роботи алгоритму.

Розглянемо результат для наступних параметрів: розбиття поверхні 8x8; $\mu=0.3$; куб зі стороною 0.1, де задані напруження; напруження задані в точках області з розбиттям 5x5x5; відстань від площини до області заданих напружень дорівнює 0.1; зробимо ітерації від $\alpha=1$ до $\alpha=10^{-9}$; крок методу локальних варіацій дорівнює 1/65; еталонний розподіл сили має параболічну форму $0,5-x^2-y^2$ (Таблиця 2, рисунок зліва).

Таблиця 1. – Числові результати роботи алгоритму.

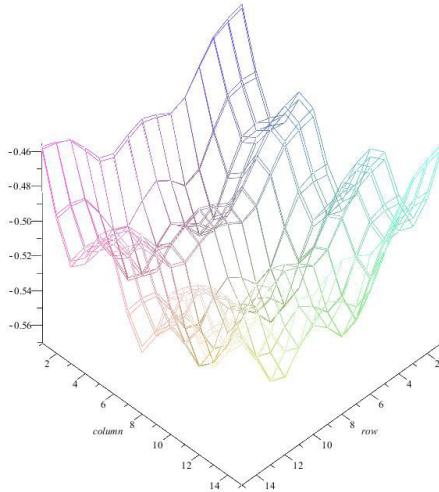
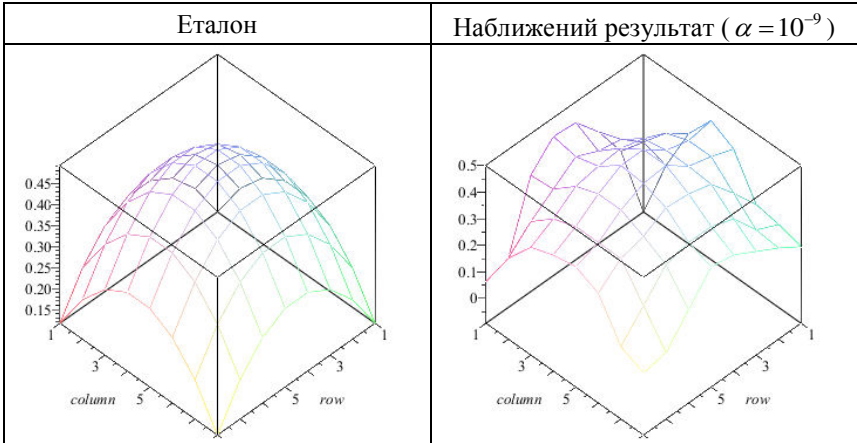
Значення α	Відхил від еталонного результату	Відхил по заданим напруженням
	$\sum_{qi=1}^M \sum_{qj=1}^N (q_{qi,qj}^{etalon} - q_{qi,qj}^{отримане})^2$	$\sum_{i=1}^{SigmaA} \sum_{j=1}^{SigmaB} \sum_{k=1}^{SigmaC} (\sigma_{i,j,k}^* - \sigma_{i,j,k}^{отримане})^2$
10^0	1.5351	0.39986
10^{-1}	0.9309	0.13583
...	...	...
10^{-8}	0.0930	0.000463
10^{-9}	0.1649	0.000457

Порівняємо еталонні та отримані за алгоритмом результати при $\alpha=10^{-9}$.

Можна побачити, що похибка з'являється через розбіжності біля границі, а в центрі практично збігається. Такий феномен можна пояснити, зокрема, за допомогою принципу Сен-Венана – чим далі від області заданих напружень діє сила (а напруження задані по центру), тим менше ця сила на них впливає, а отже і знайти її значно важче.

Порівнявши, скажімо, графіки напружень σ_{22} (рис.4), побачимо, що вони досить близькі.

Таблиця 2. – Розподіл сили по поверхні

Рисунок 4. Накладені один на одного графіки напруження σ_{22} при $Z=0,1$

1. Кузьменко В.І. Расчёт контактных напряжений по результатам измерений внутри детали/В.І.Кузьменко. – М.: Изд. АН СССР МТТ, 1989. – С. 50-55.
2. Новацький В. Теория упругости/В.Новацький. – М.: Мир, 1975. – С. 223-231.
3. Баничук Н.В. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций / Н.В. Баничук, В.М. Петров, Ф.Л. Черноусько. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 1966, № 6, Т. 6. – С. 947-961.

УДК 517.988

С.В. Колосова, В.С. Луханін, М.В. Сидоров

(Харківський національний університет радіоелектроніки)

**ПРО ІСНУВАННЯ ДОДАТНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ І ПОБУДОВУ
ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ
З РІВНЯННЯМ ЛАНЕ-ЕМДЕНА**

Метою роботи є розгляд можливості побудови двобічних наближень до додатного розв'язку крайової задачі

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^q \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

в залежності від значень параметра q . Диференціальне рівняння задачі (1) називається рівнянням Лане-Емдена, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – обмежена область. Якщо $q > 0$, задача (1) є математичною моделлю задачі про розподіл густини газу в зірках [1].

На конусі K невід'ємних в $C(\Omega)$ функцій (такий конус є нормальним [2, 3]) введемо у розгляд нелінійне операторне рівняння

$$\begin{aligned} u &= Tu, \\ Tu &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u^q(\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (2)$$

Властивості оператора T значно залежать від значень параметра q . У зв'язку з цим подальший розгляд поділимо на дві частини: $q > 0$ і $q < 0$.

Нехай $q > 0$. Тоді, очевидно, з $u_1 \leq u_2$ ($u_1, u_2 \in K$) випливає $Tu_1 \leq Tu_2$, і, отже, оператор T є монотонним на конусі K . Крім цього, оператор T цілком неперервний на K [3, 4].

З властивості u_0 -угнутості оператора T вигляду (2), $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$,

за умови неспадання функції $f(u) = u^q$ випливає єдиність додатного розв'язку задачі (1) [3, 4]. Дослідження на u_0 -угнутість призвело до умови $0 < q < 1$.

Виділимо для оператора T інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle = \{u \mid v_0 \leq u \leq w_0\}$ такий, що $T \langle v_0, w_0 \rangle \subset \langle v_0, w_0 \rangle$. Покладемо $v_0(\mathbf{x}) = \varepsilon \omega(\mathbf{x})$, $\varepsilon = \text{const} > 0$, $\omega(\mathbf{x}) > 0$ в Ω , $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$, при цьому для визначення ε скористаємося співвідношенням

$$v_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_0^q(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq v_0(\mathbf{x}),$$

що приводить до умови

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \omega(\mathbf{x}) \leq \varepsilon^{q-1} \int_{\Omega} \omega^{2q}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \cdot \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (3)$$

Далі, покладемо $w_0 = \alpha = \text{const} > 0$. Умова $Tw_0 \leq w_0$ приводить до

$$Tw_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \alpha^q d\mathbf{s} = \alpha^q \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \alpha^q u_0 \leq \alpha,$$

звідки маємо

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \alpha^{1-q}. \quad (4)$$

Отже, конусний відрізок $\langle \varepsilon \omega(\mathbf{x}), \alpha \rangle$ є інваріантним для оператора T вигляду (2) при $0 < q < 1$, якщо ε і α обрані з умов (3) та (4). Для прискорення збіжності послідовних наближень бажано брати α як можна меншим, а ε – як можна більшим.

Функція $\omega(\mathbf{x})$ із вказаними властивостями може бути побудована з використанням конструктивного апарату теорії R -функцій [5].

Враховуючи розглянуті властивості оператора T приходимо до висновку, що послідовні наближення, побудовані за схемою

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

збігаються за нормою простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку u^* задачі (1) при $0 < q < 1$, за будь якого початкового наближення $u_1 \in \langle v_0, w_0 \rangle$ [2]. Обираючи в якості початкових наближень $u_1 = v_0$ та $u_1 = w_0$, отримуємо нерівності

$$\varepsilon \omega = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_k \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_k \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \alpha.$$

Нехай $q < 0$. Позначимо $q = -p$, $p > 0$.

Аналогічно попередньому на конусі K невід'ємних в $C(\bar{\Omega})$ функцій, який є нормальним, вводимо у розгляд нелінійне операторне рівняння

$$u = Bu,$$

$$Bu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{1}{u^p(\mathbf{s})} d\mathbf{s}. \quad (5)$$

У цьому випадку з $u_1 \leq u_2$ ($u_1, u_2 \in K$) випливає $Bu_1 \geq Bu_2$, і, отже, оператор B є антитонним на конусі K . Крім того, оператор B вигляду (5) є цілком неперервним в $C(\Omega)$, оскільки $f(u) = \frac{1}{u^p}$ при $0 < u < +\infty$, $p > 0$ є неперервною функцією [3, с.264].

Враховуючи антитонність оператора B , побудуємо інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle = \{u \mid v_0 \leq u \leq w_0\}$, такий, що $B \langle v_0, w_0 \rangle \subset \langle v_0, w_0 \rangle$, наступним чином.

Розглянемо схему послідовних наближень

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s}}{w_n^p(\mathbf{s})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

В (6) покладемо $w_0 = \beta = \text{const} > 0$, отримуємо

$$w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s}}{\beta^p} = \frac{1}{\beta^p} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{u_0(\mathbf{x})}{\beta^p}.$$

Нашою метою є вибором β досягти виконання нерівності $w_1 \leq w_0$, або $\frac{u_0(\mathbf{x})}{\beta^p} \leq \beta$, звідки для β отримаємо умову

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta^{1+p}. \quad (7)$$

Далі, елемент $w_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s}}{w_1^p(\mathbf{s})}$ внаслідок антитонності оператора B задовольняє нерівностям $w_1 \leq w_2 \leq w_0 = \beta$. Продовжуючи процес (6), отримаємо нерівності

$$w_1 \leq w_3 \leq \dots \leq w_{2n-1} \leq w_{2n} \leq \dots \leq w_2 \leq w_0 = \beta,$$

і, отже, можна покласти

$$v_0 = w_1(\mathbf{x}).$$

Дослідження оператора B на u_0 -псевдоугнутість приводить до умови $0 < p < 1$.

Розглянуті властивості оператора B дозволяють зробити висновок, що задача (1) з $q < 0$ має єдиний додатний розв'язок u^* , послідовні наближення до якого можна отримати за схемою

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s}}{w_n^p(\mathbf{s})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

при цьому маємо нерівності

$$v_0 = w_1 \leq w_3 \leq \dots \leq w_{2n+1} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_{2n} \leq \dots \leq w_2 \leq w_0 = \beta.$$

Обчислювальний експеримент для задачі (1) проведено в області

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbf{R}^2$$

для $q = \frac{1}{2}$ та $q = -\frac{1}{2}$.

Для випадку $q = \frac{1}{2}$ взяли $\alpha = \frac{1}{16}$, $\varepsilon = \frac{1}{256}$, а для $q = -\frac{1}{2}$ обрали $\beta = 0,6$.

В таблиці 1 наведено значення $w_{10}(\mathbf{x})$ та $v_{10}(\mathbf{x})$, $w_4(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ для $q = \frac{1}{2}$ та $q = -\frac{1}{2}$ відповідно в точках області Ω з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,1i$, $\varphi_j = 0,1j\pi$, $i = 2,6,8$, $j = 1,3,5$. (значення в решті четвертях симетричні).

Таблиця 1 – Значення наближень $v_{10}(\mathbf{x})$ та $w_{10}(\mathbf{x})$, $w_4(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$

φ	$q = \frac{1}{2}$				$q = -\frac{1}{2}$			
		ρ				ρ		
		0,2	0,6	0,8		0,2	0,6	0,8
$\frac{\pi}{10}$	w_{10}	0,0414	0,0256	0,0135	w_4	0,4545	0,3237	0,1987
	v_{10}	0,0413	0,0256	0,0135	w_5	0,4207	0,2996	0,1839
$\frac{3\pi}{10}$	w_{10}	0,0414	0,0255	0,0258	w_4	0,4540	0,3212	0,1930
	v_{10}	0,0412	0,0255	0,0258	w_5	0,4203	0,2973	0,1786
$\frac{\pi}{2}$	w_{10}	0,0414	0,0258	0,0137	w_4	0,4540	0,3229	0,1991
	v_{10}	0,0413	0,0258	0,0137	w_5	0,4202	0,2988	0,1842

Як бачимо, точний розв'язок u^* задачі (1) затиснуто між $v_{10}(\mathbf{x})$ та $w_{10}(\mathbf{x})$ при $q = \frac{1}{2}$, $w_4(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ при $q = -\frac{1}{2}$.

1. Галахов Е.И. Положительные решения квазилинейных эллиптических уравнений // Матем. заметки. – Т. 78, Вып. 2. – С. 202 – 211.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
3. Опоицев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Труды Моск. матем. общества. – Т. 36, 1978. – С. 237 – 273.
4. Опоицев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

УДК 519.6

О.Г. Наконечный, П.М. Зінько

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ІГРОВІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ІНФОРМАЦІЙНОГО ПРОТИБОРСТВА

Розглядається така ігрова математична модель:

$$\frac{db(t)}{dt} = A(t)b(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), \quad b(0) = b^0, \quad (1)$$

де $t \in [0, T]$ – час, $b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))^T$ – вектор думок (поглядів, світогляду і т.п.) людської спільноти, яка складається із n груп (агентів), $u(t) \in U_t \subset R^m$ – вектор керувань першого гравця, $v(t) \in V_t \subset R^k$ – вектор керувань другого гравця (природи), $A(t), B(t), C(t)$ – відомі матриці відповідних розмірностей.

Вважаємо, що задано бажане значення вектора думок $b^1(T)$.

Задача полягає у знаходженні керування $u(\cdot)$ першого гравця, яке обчислюється як розв'язок такої оптимізаційної задачі

$$\max_{v(\cdot)} \|b(T) - b^1(T)\|^2 \rightarrow \min_{u(\cdot)}. \quad (2)$$

Вибираємо керування $u(\cdot)$ у вигляді $u(t) = S(t)b(t)$, $t \in [0, T]$, де матриці $S(t)$ – невідомі. Тоді задача (2) зводиться до наступної:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \max_{v(\cdot)} (b_i(T) - b_i^1(T))^2 \rightarrow \min_{S(\cdot)},$$

де $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Для знаходження оптимальних значень матриць $S(t)$ застосовується матричний принцип максимуму Понтрягіна [2].

1. *Наконечный О.Г.* Оцінювання параметрів в умовах невизначеності / О.Г. Наконечный // Наукові записки КНУ імені Тараса Шевченка, серія: «Кібернетика». – 2004. – С. 102-111.
2. *Наконечный А.Г.* Минимаксные регуляторы для линейных систем с изменяющейся структурой / О.Г. Наконечный, Ю.В. Поливяна // Проблемы управления и информатики, 1999. – № 5.
3. *Михайлов А.П.* Модели информационной борьбы / А.П. Михайлов, Н.А. Маревцева // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 10. – С. 19-32.

КОНЦЕПТУАЛІЗАЦІЯ ПРОБЛЕМИ ПРОГРАМНО-ЦІЛЬОВОГО УПРАВЛІННЯ ЕКОНОМІЧНИМ РОЗВИТКОМ РЕГІОНУ НА ПІДСТАВІ МОДЕЛІ БАГАТОВИМІРНОГО ЛІНІЙНОГО ОБ'ЄКТУ

Програмно-цільове управління розвитком території чи країни загалом стало провідною світовою тенденцією в управлінні видатками бюджету. Такий підхід уможливило перехід від планування ресурсів до планування результатів [1] і реалізується у формі державних цільових програм (ДЦП) різного рівня. Серед негативних тенденцій реалізації ДЦП в Україні фахівці відзначають нечіткість цілей програм та їх недосяжність, низьку ефективність використання бюджетних коштів і роблять висновок про потребу суттєвого удосконалення методології реалізації ДЦП [1, 3].

Постановка проблеми. Зазначені недоліки сучасної практики застосування програмно-цільового управління економічним розвитком регіону в Україні зумовлюють потребу розробки інструментів оптимізації управління процесом виконання регіональних програм. Тому **метою наукового дослідження** було удосконалення динамічної моделі [2, 4] розподілу коштів між сукупністю регіональних програм розвитку у контексті досяжності цілей ДЦП на засадах теорії управління багатовимірними неавтономними (нестационарними) лінійними об'єктами [5].

Змістова постановка завдання щодо оптимізації управління економічним розвитком регіону [2, 4]. Нехай для регіону R його адміністрація розглядає сукупність P_R програм соціально-економічного розвитку на період $[t_0; T]$, де t_0 – базовий рік, а T є роком завершення усіх програм. Соціально-економічний стан регіону характеризується множиною X показників. З кожною програмою $p_j \in P_R$ пов'язується підмножина показників $X_j \subseteq X$, які оцінюють стан економічного розвитку регіону під час її виконання, та множина цілей G_j економічного розвитку. Досяжність кожної цілі $g_l \in G_j$ може бути оцінена на підставі деякої групи $X_{jl} \subseteq X$ показників. На реалізацію програми $p_j \in P_R$ виділяються ресурси обсягом V_j у вартісному вимірі. Розподіл коштів за періодами у проміжку $[t_0; T]$ визначається вектором $\vec{v}(t) \in E^k$, $k = |P_R|$, де значення координати $v_j(t)$ задає обсяг виділеного ресурсу p_j -й програмі у період t . Початковий стан регіону R задається вектором $\vec{x}(t_0) \in E^n$ і очікується, що у ре-

зультаті виконання програм P_R стан регіону R буде характеризуватися у кінцевий період T вектором $\vec{x}(T) \in E^n$, $n = |X|$.

Розглянемо простір $U(t)$ можливих векторів $\vec{v}(t)$. Під управлінням $u \in U$ будемо розуміти сукупність векторів або кортеж

$$u = \langle \vec{v}(t_0), \vec{v}(t_1), \dots, \vec{v}(T) \rangle, \quad U := U(t_0) \times U(t_1) \times \dots \times U(T), \quad (1)$$

де $\vec{v}(t_\tau)$ задає розподіл ресурсів між програмами $p_j \in P_R$ у період $t_\tau \in [t_0; T]$. Простір управління U формується на підставі очевидних обмежень:

$$v_j(t) \geq 0 \quad \forall (j = \overline{1, k}) \wedge (t \in [t_0; T]); \quad \sum_{j=1}^k \sum_{t \in [t_0; T]} v_j(t) \leq V = \sum_{j=1}^k V_j, \quad (2)$$

причому V – загальний обсяг ресурсів у вартісному вимірі, виділений на реалізацію сукупності P_R програм у інтервалі $[t_0; T]$.

Оптимальним управлінням $u^* \in U$ будемо вважати таке управління виду (1), яке формує оптимальну траєкторію економічного розвитку регіону на проміжку $[t_0; T]$ згідно з деяким вибраним критерієм W і яке переводить регіон R після реалізації сукупності програм P_R з початкового стану $\vec{x}(t_0)$ у кінцевий $\vec{x}(T)$.

Динамічна модель оптимізації управління економічним розвитком регіону як задача оптимального управління неавтономним багатовимірним об'єктом. Використовуючи напрацювання [2, 4], розглядаємо регіон як неавтономний багатовимірний лінійний об'єкт з вхідним управлінням, що задається вектором змінних $\vec{v}(t) \in E^k$, і вихідним управлінням $\vec{y}(t) \in E^k$ та вектором $\vec{x}(t) \in E^n$ змінних оцінювання його стану. Для відстеження у динаміці досяжності цілей під час реалізації програм уводиться вектор $\vec{y}(t) \in E^k$ з координатами $y_j(t)$, що є узагальненими оцінками впливу програм $p_j \in P_R$ на економічний розвиток регіону у період t .

Застосувавши теорію управління лінійними нестационарними багатовимірними об'єктами [5] та вибравши за критерій оптимізації W мінімум сумарного обсягу коштів для реалізації сукупності P_R регіональних програм, здійснили концептуалізацію проблеми оптимізації програмно-цільового управління економічним розвитком регіону. Оптимальні траєкторії економічного розвитку регіону R з сукупністю P_R ДЦП на проміжку $[t_0; T]$ будуть формувати розв'язки такої оптимізаційної моделі: для вибраної множини показників X оцінювання стану регіону знайти таке

оптимальне управління u^* виду (1) реалізацією сукупності програм P_R , щоб

$$\min_{u \in U} \|u\| = \min_{\bar{v}(t) \wedge (t \in [t_0; T])} \int_0^T \sum_{j=1}^k v_j(t) dt = \|u^*\| \quad (3)$$

за умов

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = \Phi(t, t_0) \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \bar{v}(\tau) d\tau; \\ \bar{y}(t) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{C}(t) \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \bar{v}(\tau) d\tau \end{cases} \quad (4)$$

та обмежень

$$\|u\| \leq V; \quad \bar{y}(T) = \bar{y}^1; \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0; \quad v_j(t) \geq r_{jt} \quad (j = \overline{1, k}; t \in [t_0; T]), \quad (5)$$

де $\bar{y}^1$ – бажані природи значень показників множини X після реалізації всіх програм, $r_{jt} \geq 0$ формують початковий розподіл коштів між програмами у розрізі періодів, а через $\|\bullet\|_1$ позначено стандартну норму вектор-функції часу у банаховому просторі $L^p = L^p(t_0; T)$ [5] з індексом $p = 1$ [5]. Матриці $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)$ у (4) мають такий економічний зміст: $\mathbf{A}(t)$ є квадратною виміру $n \times n$ матрицею темпів приросту величин показників x_i із множини X у період t ; матриця $\mathbf{B}(t)$ розміру $n \times k$ містить затратні еластичності $b_{ij}(t)$, що визначають величину зміни показника $x_i \in X$ при зміні обсягу коштів p_j – ДЦП; $k \times n$ матриця $\mathbf{C}(t)$ встановлює міру адекватності оцінювання досяжності цілей програмами розвитку для кожного показника із множини X .

Умови існування оптимального програмно-цільового управління економічним розвитком регіону. Динамічна матрично-інтегральна модель (3)-(5) була проаналізована на предмет існування розв'язків. З цією метою застосовувався метод пошуку оптимального управління для лінійного неавтономного багатовимірного об'єкту [5], який трактує простір управління U як банаховий і використовує відому нерівність Гельдера [5]. В результаті аналізу отримали сукупність умов, які уможливають оптимальний розподіл коштів між програмами у контексті досяжності задекларованих цілей регіонального розвитку (див. Твердження).

Твердження. Для того, щоб оптимальне управління u^* виду (1), компоненти якого задовольняють рівняння $u^* = \min_{\bar{v}} \|\bar{v}\|_1 = 1 / \|\bar{w}_0\|_\infty$, було розв'язком моделі (3)-(5) необхідно і достатньо, щоб його компоненти $v_j(\tau), j = \overline{1, k}, \tau \in [t_0; T]$, задовольняли умови

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^k \left[(v_j(T))^2 - (v_j(t_0))^2 \right] = 2 \times \left| w_{j_0(t_0)}^0(T, \tau_0) \right|^{-1}; \\ \left| w_{j_0(t_0)}^0(T, \tau_0) \right| \geq V^{-1}; \\ v_j(t) \geq r_{jt} \quad (j = \overline{1, k}; t \in [t_0; T]) \end{array} \right. \quad (6)$$

де вектор-функція $\vec{w}_0(T, \tau_0)$ визначається як (символ « $\cdot$ » - транспонування матриці)

$$\vec{w}_0(T, \tau) = \mathbf{G}'(T, \tau) \vec{z}_0(\tau), \quad \mathbf{G}(t, \tau) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau), \quad (7)$$

допоміжний вектор $\vec{z}_0 \in E^k$ будується спеціальним чином, а узгоджена з $p=1$ q -норма вектора $\vec{w}_0$ визначається через координати $w_j^0(T, \tau)$ векторів $\vec{w}_0(T, \tau)$ як

$$\|\vec{w}_0\|_\infty = \left| w_{j_0(t_0)}^0(T, \tau_0) \right| = \max_{\tau \in [t_0; T]} \max_{1 \leq j \leq k} \left| w_j^0(T, \tau) \right|. \quad (8)$$

Умови (6)-(8) гарантують існування оптимальних стратегій економічного розвитку регіону на заданому проміжку управління.

Висновки. Модель (3)-(5) з умовами (6)-(8) Твердження формує концептуальне ядро спеціального комплексу динамічних економіко-математичних моделей оптимізації управління економічним розвитком регіону за допомогою ДЦП, який необхідний для практичного застосування цієї моделі. Зокрема, такий комплекс має включати моделі побудови матриць $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ та перехідної матриці $\Phi(t, t_0)$ для рівнянь (4), а також допоміжного вектора $\vec{z}_0 \in E^k$ і норми $\|\vec{w}_0\|_\infty$. На відміну від [2, 4] матриці у рівняннях (4) моделі вже є змінними у часі, що вимагатиме коректування способів їх побудови.

1. Державні цільові програми та упорядкування програмного процесу в бюджетній сфері / За ред. акад. НАН України В.М. Гейця. – Київ: Наукова думка, 2008. – 383 с.
2. Парасюк І.В. Інформаційні моделі в оцінюванні економічного розвитку регіону / І.В. Парасюк // Актуальні проблеми економіки. – 2010. – № 10 (112). – С. 231-239.
3. Середньострокова інвестиційна програма Львівської області на 2008-2011 роки (затв. рішенням обласної ради від 12.06.2007 р. №309) [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://www.loda.gov.ua/>
4. Твердохліб І.П. Оптимізація управління економічним розвитком регіону / І.П. Твердохліб, І.В. Парасюк // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – №1. – С. 53-66.
5. Чаки Ф. Современная теория управления / Ф. Чаки. – М.: Мир, 1975. – 424 с.

XXI Всеукраїнська наукова конференція

**Сучасні проблеми прикладної математики
та інформатики**
APAMCS – 2015

Збірник наукових праць

Матеріали доповідей надруковано в авторській редакції
без внесення суттєвих змін оргкомітетом

Комп'ютерне макетування – *Я.С. Гарасим*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 6,9.
Тираж 150 прим. Зам. 09/17.

Видавець та виготівник:
Львівський національний університет імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідectво про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців, виготівників і
розповсюджувачів видавничої продукції: Серія ДК № 3059
від 13.12.2007 р.