

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

XXII Всеукраїнська наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

APAMCS – 2016

5–7 жовтня 2016 року



Львів ЛНУ 2016

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

XXII Всеукраїнська наукова конференція

**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ
МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ**

APAMCS – 2016

5–7 жовтня 2016 року

Збірник наукових праць

Львів ЛНУ 2016

УДК
ББК

Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць. – Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. – 2016. – 204 с.

Редакційна колегія:

В.С.Височанський	Перший проректор, канд. фіз.-мат. наук, професор
Я.Г. Савула	завідувач кафедри прикладної математики, д-р фіз.-мат. наук, професор
І.І. Дияк	декан факультету прикладної математики та інформатики, канд. фіз.-мат. наук, доцент
М.Я. Бартіш	завідувач кафедри теорії оптимальних процесів, д-р фіз.-мат. наук, професор
М.М. Притула	завідувач кафедри дискретного аналізу та інтелек- туальних систем, д-р фіз.-мат. наук, професор
Г.Г. Цегелик	завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів, д-р фіз.-мат. наук, професор
Г.А. Шинкаренко	завідувач кафедри інформаційних систем, д-р фіз.-мат. наук, професор
С.А. Ярошко	завідувач кафедри програмування, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Оргкомітет виражає щиру вдячність спонсорам конференції:



ТзОВ “Eleks”

ТзОВ “ABTO SoftWare”

та благодійникам – випускникам кафедри програмування

ЗМІСТ

R.G. Drebotiy	9
Gaussian Quadrature Implementation For <i>HP</i> -Adaptive Finite Element Method	9
V. Lysytsya	13
A Number Of Specular Points On A Random Gaussian Stationary Curve With Moving Observer	13
T.V. Rvachova, Ye.P. Tomilova	16
Application Of Atomic Wavelets And Atomic Birkhoff-Taylor Series To Numerical Solving Of Fredholm Integral Equations Of The Second Kind ..	16
I. T. Selezov ⁽¹⁾ , R. I. Volynski ⁽²⁾	18
Modeling Of Wave Disturbance Propagation In Contacting Media	18
E.V. Semenova	21
Arithmetical Aspects For Fully Discrete Projection Method	21
V. Stelmashchuk ⁽¹⁾ , H. Shynkarenko ^(1,2)	24
Numerical Scheme For Green-Lindsay Thermopiezoelectricity Steady State Forced Vibrations Problem	24
O. M. Stepanchenko, P. M. Martyniuk	26
On The Mathematical Modelling Of An Informational Destructure Of Social Communities	26
Th. Wester, S. Garcia, D. Isaac	30
Analysis And Simulation Of A Mathematical Model Of Ebola Virus Dynamics In Vivo	30
A.B. Бешлей	31
Про застосування методу інтегральних рівнянь до задачі Діріхле для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами	31
В.О. Богаєнко, В.М. Булавацький	35
Про чисельне моделювання аномального конвективно-дифузійного процесу в умовах плоско-вертикального усталеного фільтраційного поля	35
Н.І. Бойко	37
Технології обробки інформації у динамічних системах	37
А. Я. Бомба, М. В. Бойчура	40
Метод прикладених потенціалів розв'язування коефіцієнтних задач ідентифікації параметрів	40

В. Г. Вавричук	42
Застосування SINC-апроксимацій до обчислення інтегралів.....	42
А.П. Власюк ⁽¹⁾ , Т.П. Цветкова ⁽²⁾	44
Математичне моделювання перенесення солей у випадку осушення насичено-ненасиченого ґрунтового масиву при наявності інфільтрації.....	44
В.Д.Вовк.....	46
Моделювання процесів генерації інформації засобами клітинних автоматів	46
О.В. Вовк ⁽¹⁾ , Г.А. Шинкаренко ^(1,2)	48
Збіжність h -Адаптивного МСЕ для сингулярно збурених задач дифузії-адвекції-реакції.....	48
В.І. Гавриш, Р.Б. Тушницький	52
Дослідження температурних режимів у термочутливій пластині з наскрізним включенням.....	52
Я.С. Гарасим, Б.А. Остудін, Ю.В. Шунькін.....	56
Розв'язування однієї оберненої задачі теорії потенціалу методом регуляризації на компактї, заданому у вигляді рівностей	56
Мохамад Нурі Дурайд	60
Підвищення ефективності волоконної оптики для мережевих систем .	60
Н.Д.Гернет., П.С. Кабелянц, В.Т. Лисиця.	61
Концептуальні основи створення інформаційної технології діагностики складних систем на основі візуалізації їх поточних станів	61
І.В. Гоменюк, Л.П. Оксамитна	65
Інформаційно-аналітичне забезпечення транспортної логістики	65
Гомон К.О.	68
Розв'язування задач пластичного деформування конструкцій з використанням паралельних обчислень	68
Д.А. Дегтярьов.....	70
Визначення впливу демпфірування на спектр власних частот зв'язаних згинно-крутильних коливань лопатей вітроенергетичних установок за допомогою методу скінченних елементів	70
І. Дияк.....	74
h -Адаптивна схема МСЕ для задачі теорії пружності з використанням Т-сплайнів	74
В.М.Домрачев, Р.І.Костецький, О.В.Ляховська	76

Застосування інструментів SAS Enterprise Miner для аналізу діяльності банків	76
О.О.Ємець ⁽¹⁾ , Т.М.Барболіна ⁽²⁾	79
Властивості екстремалі дробово-лінійної функції на загальній множині розміщень	79
В. А. Качановський, М. О. Киселиця, М. М. Притула	83
Про солітонні розв'язки однієї нелінійної гідродинамічної системи	83
Г.А. Квасниця, Г.А. Шинкаренко	85
Двосторонні апостеріорні оцінки похибок апроксимацій МСЕ в одновимірних крайових задачах.....	85
Ю. Є. Климюк	89
Математичне моделювання просторових процесів масоперенесення багатокомпонентних забруднюючих речовин у багатопарових кусково-однорідних пористих середовищах.....	89
О.В.Ковальчук	92
Огляд трикрокових методів на основі методу хорд для розв'язування систем нелінійних рівнянь	92
Р.В.Король, О.В. Кравченко, А.А. Златкін	96
Інформаційні технології проектування діагностичних експертних систем	96
О.В. Кравченко	98
Вплив фізичної деградації матеріалу на надійність роботи дискретного пристрою	98
Ю.В.Крак ⁽¹⁾ , О.В.Бармак ⁽²⁾ , Р.О. Багрій ⁽²⁾ , С.С.Кондратюк ⁽¹⁾	101
Комп'ютерні технології для комунікації людей з обмеженими можливостями	101
О.О. Кряжич ⁽¹⁾ , О.В. Коваленко ⁽²⁾	104
Використання методу можливих напрямків при описі забруднення місцевості радіоізотопом водню - тритієм	104
В.С. Ленько, Ю.М. Щербина	108
Відновлення графічних образів за допомогою карт Кохонена.....	108
Ю. М. Линник	112
Особливості створення ефективного семантичного ядра веб-сайту	112
В.Л Лисицький ⁽¹⁾ , Н.Д Гернет ⁽²⁾	116
Структурний та параметричний синтез розподільної підсистеми логістичної системи території	116

Н. В. Майко, В. Л. Рябічев.....	119
Покращені оцінки точності різницевої схеми для двовимірною параболічного рівняння з урахуванням ефекту від крайових умов	119
В. Мамчук	121
Розрахунок деяких турбулентних примежевих стисливих шарів	121
М. Я. Марко, Г. Г. Цегелик.....	126
Використання методу ідеальної точки для розв'язування двокритеріальної задачі планування виробництва	126
Н.В. Медвідь, В.А. Герус, П.М. Мартинок	130
Метод скінченних елементів в задачі фільтраційної консолідації грунтової греблі з водоводом та зоною вимиву	130
А. В. Мельничин	133
Особливості побудови оптимальних моделей індексів у індексних методах організації файлів баз даних	133
Г.Л. Милейко, С.Г. Солодкий	135
Про точні порядкові оцінки інформаційної складності на деяких класах експоненційно некоректних задач	135
Г. Й. Михальчук, В.І. Кузьменко	139
Метод скінченних елементів у контактних задачах біомеханіки руху	139
О. Р. Мічута, П. М. Мартинюк.....	141
Про математичну модель загальної задачі впливу кольматажу на процес консолідації ґрунтів.....	141
Д.А. Номіровський.....	143
Моделювання процесів переносу в областях з розрізами	143
А.О. Пашко	145
Про один метод статистичного моделювання дробового броунівського руху.....	145
С.О. Пискунов, В.В. Валер	148
Достовірність визначення напружено-деформованого стану при фізично-нелінійному деформуванні плоских і осесиметричних тіл....	148
Б. М. Подлевський.....	151
Побудова двосторонніх наближень до власних значень нелінійних спектральних задач	151
Поляков В.Л.....	154

Про математичне моделювання фільтрації рідини в пористих середовищах з подвійною пористістю	154
О.В. Прищепа.....	158
Про систему типу М/М/2/Ν з обмеженим числом повторних спроб ...	158
І. І. Прокопишин	160
Диференціально-різницеві ітераційні алгоритми декомпозиції області для розв'язування контактних задач	160
В. С. Проценко, Н. А. Українець	162
Про розв'язання однієї мішаної задачі теорії пружності для напівпростору з нескінченною круговою циліндричною порожниною	162
Я. Д. П'янило, А.Т. Лянце, Г.М. П'янило, О. Б. Браташ, В.О. Собко	165
Використання спектральних розкладів в задачах математичної фізики	165
П.С. Сеньо	169
Методика побудови та дослідження алгоритмів розв'язування задачі коші на основі математики функціональних інтервалів	169
Ю.М. Сибіль.....	172
Про інтегральне подання розв'язку змішаної граничної задачі для тривимірного рівняння Лапласа	172
О.В. Сосницький.....	175
Проблема неконструктивності класичних визначень екстремумів та універсальний механізм глобальної оптимізації.....	175
Н. В. Сподар, Я. Г. Савула	179
Обчислювальні аспекти різномасштабного методу скінченних елементів	179
Н. К. Тимофієва	181
Скінченні та нескінченні комбінаторні множини як аргумент цільової функції	181
Д. Ю. Унтілов, С. В. Антоненко	185
Огляд технології віртуальної реальності	185
Л.А. Фильштинський, Т.С. Сушко, Ю.О. Шевченко, Г.А. Єременко	187
Антиплоска деформація магнетоелектропружного тіла ослабленого тріщинами.....	187
О.М. Хімич, О.А. Ніколаєвська, Т.В. Чистякова	191
Алгоритм розв'язування некоректних лінійних систем на гібридних комп'ютерах	191

С.М. Шахно, А.-В.І. Баб'як, Г.П. Ярмола	195
Збіжність методу Ньютона-Потра за слабких умов	195
С.М. Шахно, Р.П. Якимчук, О.С. Довганик	197
Про деякі двокрокові методи розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів	197
С.А. Ярошко ⁽¹⁾ , С.М. Ярошко ⁽²⁾	200
Налаштування функціональності багатопотокової аплікації на етапі виконання	200

UDC 519.632.4

R.G. Drebotiy

(Ivan Franko National University of Lviv)

GAUSSIAN QUADRATURE IMPLEMENTATION FOR *HP*-ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD

Numerical quadratures are one of the most crucial component of any high order finite element solver [13]. Considering only interpolation-type quadratures, when we use polynomial elements with arbitrary degree, the amount of computations needed to assemble the global stiffness matrix and load vector depends linearly on quadrature order used for single element. Gaussian-type quadratures then are the natural choice, since they provide the ability to compute integrals of polynomials exactly and with minimal possible count of nodes. In this work we consider the problem of efficient way of finding nodes and weights for Gaussian-type quadratures.

We will study the following general form of Gaussian quadrature with weight function in 1D interval $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + R_n(f), \quad (1)$$

where $\omega(x) > 0$ is the weight function, x_i - nodes, w_i - weights of quadrature formula. $R_n(f)$ - is the error term, n we will call the order of quadrature.

Let us consider weighted Lebesgue space $L^2([a, b], \omega dx)$ with standard inner product

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)\omega(x)dx \quad (2)$$

and associated norm $\|\cdot\|$. It is well-known that [1] nodes x_i are the roots of polynomial p_n , $\deg(p_n) = n$ which is orthogonal (in the sense of product (2)) to all polynomials which degrees does not exceed $n-1$, i.e.:

$$(p_n, q_{n-1}) = 0, \quad \deg(q_{n-1}) \leq n-1. \quad (3)$$

In that case formula (1) will be *exact* for all polynomials with degrees up to $2n-1$ inclusively.

We will call the sequence of polynomials $S = \{p_k \mid \deg(p_k) = k\}_{k=0}^{\infty}$ *orthogonal* if $(p_n, p_m) = 0$, $n \neq m$.

It is not hard to see that for polynomial p_n from orthogonal sequence S property (3) is satisfied. Further we will only consider orthogonal polynomials.

Using standard Gramm-Schmidt orthogonalization procedure one can simply show that there exists unique, up to constant multipliers, sequence of orthogonal polynomials.

Let us consider the (unique) sequence of orthogonal polynomials $S = \{p_k \mid \deg(p_k) = k\}_{k=0}^{\infty}$ each of which has senior coefficient equal to 1. In that case it can be shown that the following two-step recurrence relation holds:

$$\begin{aligned} p_0(x) &\equiv 1, \\ p_1(x) &= x - \alpha_0, \\ p_n(x) &= (x - \alpha_{n-1})p_{n-1}(x) - \beta_{n-1}p_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= \frac{(xp_{n-1}, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})}, \\ \beta_{n-1} &= \frac{(p_{n-1}, p_{n-1})}{(p_{n-2}, p_{n-2})}. \end{aligned} \quad (5)$$

First two relations from (4) are directly obtained from orthogonalization procedure and dividing polynomials by senior coefficient. To obtain third equation consider the difference $xp_{n-1} - p_n$. Taking into account that $\deg(xp_{n-1} - p_n) = n-1$ we can write

$$xp_{n-1} - p_n = \sum_{s=0}^{n-1} \gamma_s p_s.$$

Considering inner product with p_k , $k < n-2$ and using the orthogonality property we get

$$(xp_{n-1}, p_k) - \underbrace{(p_n, p_k)}_{=0} = \gamma_k (p_k, p_k).$$

Using that $(xp_{n-1}, p_k) = (p_{n-1}, xp_k) = 0$, we finally get that $\gamma_s = 0$, $s < n-2$.

Now by considering $\gamma_{n-1} = \alpha_{n-1}$, $\gamma_{n-2} = \beta_{n-1}$ we arrive to

$$xp_{n-1} - p_n = \alpha_{n-1}p_{n-1} + \beta_{n-1}p_{n-2}.$$

Using now just simple terms regrouping we will obtain final relation.

To obtain (5) let us consider inner product of the last equality with p_{n-1} . Then we trivially obtain the first formula from (5) for α_{n-1} . Making the same multiplication but using now p_{n-2} , we get

$$\beta_{n-1} = \frac{(xp_{n-1}, p_{n-2})}{(p_{n-2}, p_{n-2})}.$$

Finally we need to show that $(xp_{n-1}, p_{n-2}) = (p_{n-1}, p_{n-1})$. For this we can just consider the difference

“smudge” the error by making some operations in both directions through the matrix.

1. *Цегелик Г.Г.* Чисельні методи / Цегелик Г.Г.// Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, 2007.
2. *Шахно С.М.* Чисельні методи лінійної алгебри / Шахно С.М. // Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, 2007.
3. *Szego G.* Orthogonal polynomials / Szego G.// American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1939.
4. *Gautschi W.* Orthogonal polynomials and Quadrature / Gautschi W. // Kent State University, Electronic Transactions on Numerical Analysis, Vol. 9, 1999.– 65-76.
5. *Gander W.* Polynomial recurrence, newton correction and continued fractions./ Gander W., Gonnet P. // Institute of Computational Science, ETH Zurich
6. *Golub G.* Calculation of gauss quadrature rules / Golub G., Welsch J./ Golub G. // American Mathematical Society, Mathematics of Computation.– 1969.– Vol. 23, No. 106, 221-230.
7. *Krylov V.I.* Approximate calculation of integrals / Krylov V.I. // New York, Mineola, Dover Publications, 2005.
8. *Stroud A. H.* Gaussian quadrature formulas / Stroud A. H., Secrest D.// London: Prentice-Hall, 1966.
9. *Fasino D.* Structured eigenvalue problems for rational gauss quadrature / Fasino D., Gemignani L.// Springer Science + Business Media B.V., 2007.
10. *Drebotiy R.* HP-adaptive finite element method for 1d diffusion-convection-reaction boundary value problems / R.G. Drebotiy, H.A. Shynkarenko // Manufacturing Process. Actual Problems-2014. – Opole: Politechnika Opolska, 2014. – Vol. 1. – P. 11–26.
11. *Drebotiy R.* Symmetrization of diffusion-advection-reaction problem and hp-adaptive finite element approximations / R.G. Drebotiy, H. A. Shynkarenko // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикл. мат. та інф. – 2015. ISSN: 0868-6912.
12. *Drebotiy R.* Comparison of error indicators and refinement criteria for hp-adaptation algorithm for finite element method / R.G. Drebotiy, H.A. Shynkarenko // Вісник Одеського національного університету. Математика. Механіка, Одеса, 2014 .– V.19, Is.4(24).–P.45–57. ISSN: 2304-1579.
13. *Demkowicz L.* Computing with hp-adaptive finite elements. I. One- and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems / Demkowicz L.// Austin, 2005.

UDC 519.218

V. Lysytsya

(V.N. Karazin Kharkiv National University)

A NUMBER OF SPECULAR POINTS ON A RANDOM GAUSSIAN STATIONARY CURVE WITH MOVING OBSERVER

Topicality. Statistical properties of random surfaces have been studied for many years [2]. In particular, a number of works is devoted to the study of sea surfaces [3–8]. As far as sea surface is perturbed and almost always is a random surface, for the study of its various characteristics it is necessary to apply the methods of the theory of random functions.

To solve the problems associated with ocean currents, sea surface pollution, the method of specular points is used. This method is used in computer graphics in recent years [1]. A case where in a special coordinate system, the radiation source and the observer (or detector) are still and are situated on the axis Oy has been considered in this paper. This paper describes a case where one of the objects (observer) moves. In this case, a number of specular points changes over time. This requires a new approach to the application of the method of specular points that determines the topicality of the study.

The aim of this work is to obtain improved formulas for the number of specular points on condition that the observer moves along the determined curve.

The object of research is a two-dimensional stationary random wave.

The subject of research – specular points of a stationary random wave on condition of an arbitrary location of the radiation source and the observer.

The methods of differential geometry, probability theory and the theory of random functions have been used in this paper.

Formulation of the problem. As have already been noted, the sea surface can be seen as a random function of two variables. But research of the surfaces in many problems can be reduced to consideration of random curves. Let's consider the random curve which is given in the form $y = \xi(x)$, where $\xi(x)$ - stationary random function.

In one of the works [7] the following problem has been considered. Suppose we have a source of light emission V and an observer I . The rays of light are reflected from the curve $\xi(x)$ and are scattered. But some of them pass through I . Those points A , in which the observer "sees" reflected rays are called specular points. In the work [7] considered the case where the emitter and the observer are on a straight line, which is perpendicular to the middle level of the curve and at heights h_1 and h_2 respectively. Then you can introduce the coordinate system so that the middle level of the curve coincides with the axis Ox , and observer and

emitter are located on the axis Oy (Fig. 1). We must find the total expectation of specular points.

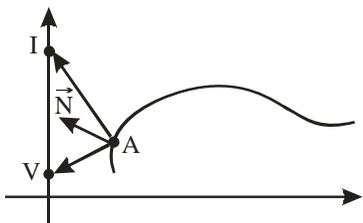


Fig. 1

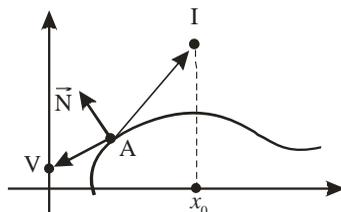


Fig. 2

With random stationary curve $y = \xi(x)$ the following functions and numerical characteristics are related: spectral density $s_\xi(\lambda)$, which is related to the correlation function $B_\xi(\tau)$ by integral ratio $B_\xi(\tau) = \int_0^\infty s_\xi(\lambda) \cos \lambda \tau d\lambda$,

moments r -s order of the spectral density $m_r = \int_0^\infty s_\xi(\lambda) \lambda^r d\lambda$ for even r .

In the work [7] a condition has been received which is satisfied by the specular points at $\xi \ll h_1, h_2$: $z'_x \approx x \cdot \kappa$, where $\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)$. Under these conditions the formula for the total expectation N of specular points is obtained:

$$N = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(F\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \alpha \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\right) \right), \quad (1)$$

where $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $\alpha = \frac{\sqrt{m_4}}{\kappa}$.

We consider the case when the emitter and the observer are not on the same vertical line (Fig. 2). Then specular points satisfy the condition $z'_x \approx x \cdot \kappa - \frac{x_0}{2h_2}$

when $\xi \ll h_1, h_2$. It is proved that in this case, the total expectation N of specular points is calculated by the formula (1). If the observer I will move along the determined curve, the height h_2 at which it is situated, will be a function of

time t . Then the value κ will be a function of time t . Number of specular points N will also depend on t . We find $N'(t)$:

$$N'(t) = \frac{\sqrt{m_4}}{h_2^2 \kappa^2} \cdot \varphi \left(\frac{\kappa}{\sqrt{m_4}} \right) \cdot h_2'.$$

From the last formula it follows that the number of specular points increases or decreases when $h_2(t)$ is growing or declining.

The results of this paper can be used in modeling of sea surfaces illuminated by different light sources. Methods may be used to calculate the total expectation N of specular points of the three-dimensional surfaces.

1. Абросимов Д. Численное моделирование изображения водной поверхности / Д.Абросимов, В.Зеленогорский, М.Крюков // Труды 9-й Междунар. конф. комп. граф. маш. зрен. – М: МГУ, 1999. – с. 255 – 260.
2. Басс Ф. Г. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности / Ф. Г. Басс, И. М. Фукс. – М. : Наука, 1972. – 424 с.
3. Гардашов Р.Г. Связь между спектром волнения и характеристиками солнечных бликов / Р.Г.Гардашов, Р.М.Мамедов, В.Ю.Осадчий // Фундамент. прикл. гидрофизика . – 2014. – т. 7. №4. – с. 40 – 48.
4. Gardashov R. The distribution of sun glints sizes on the sea surface / R. Gardashov // Centr. Eur. J. Geosci, 2011. – No. 1(2). – P.169-174.
5. Johson J. T. Quantitative Evaluation of Ocean Surface Spectral Model Influence on Sea Surface Backscattering / J. T. Johson, C. W. Chuang // Technical Report 738927-1, Grant N N00014-00-1-0349, September 2000.
6. Longuet-Higgins M. S. Reflection and refraction at a random surface. I. Pattern and Path of Specular points / M. S. Longuet-Higgins // J. Opt. Soc. Amer. – 1960. – V.50. – No. 9 – P. 838–844.
7. Longuet-Higgins M. S. Reflection and refraction at a random surface. II. The number of specular points in a Gaussian surface / M. S. Longuet-Higgins // J. Opt. Soc. Amer. – 1960. – V.50. – No. 9 – P. 845–850.
8. Longuet-Higgins M. S. Reflection and refraction at a random surface. III. Frequency of Twinkling in a Gaussian Surface / M. S. Longuet-Higgins // J. Opt. Soc. Amer. – 1960. – V.50. – No. 9 – P. 851–858.

UDC 517.96

T.V. Rvachova, Ye.P. Tomilova

(National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”)

APPLICATION OF ATOMIC WAVELETS AND ATOMIC BIRKHOFF-TAYLOR SERIES TO NUMERICAL SOLVING OF FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND

Fredholm integral equation of the second kind

$$y(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)y(t)dt$$

can be reduced to infinite system of simultaneous linear algebraic equations with the help of representation of the kernel $K(x,t)$ as double atomic Birkhoff-Taylor series [4-9]

$$K(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \in N_i} \sum_{s \in N_k} a_{i,l,k,s} \text{baf}_{i,l}(x) \text{baf}_{k,s}(t)$$

where

$$a_{i,l,k,s} = K_{i,k}^{(i+k)}(x_{i,l}, t_{k,s})$$

are partial derivatives and

$$x_{i,l} = \frac{l}{2^i} \quad t_{k,s} = \frac{s}{2^k}$$

Functions $\text{baf}_{i,l}(x)$ are so called basic functions of atomic Birkhoff-Taylor series and can be expressed as linear combinations of translates of atomic function [3]

$$\text{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}} dt,$$

which is a solution with a compact support of the functional-differential equation

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1).$$

The kernel $K(x,t)$ should belong to the class H_{ρ} , $\rho \in [1, 2)$ by the every argument, that means the infinite differentiability with the condition

$$\|\varphi^{(n)}\|_{C[0,1]} \leq c(\varphi) \rho^n 2^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

If $K(x, t)$ does not belong to H_ρ then it should be approximated by some $\tilde{K}(x, t) \in H_\rho$.

The solution of the integral equation $y(x)$ and function $f(x)$ are expanded as series with respect of orthonormal atomic wavelets [1,2]. Basic functions $baf_{i,l}(x)$ can also be expressed with respect to atomic wavelets.

The advantage of this method is that we don't need numerical integration since the transform from the basic functions to atomic wavelets does not depend on the kernel $K(x, t)$.

1. *Lemarie-Rieusset P.G.* Fonctions d'echelle interpolantes, polynomes de Bernstein et ondelettes non stationnaires / P.G Lemarie-Rieusset // Revista Mat. Iberoamericana, Vol. 13, No 1. – 1997. – p. 91-188
2. *Novikov I.Ya.* Wavelet theory / I.Ya.Novikov, V.Yu.Protasov, M.A.Skopina. – AMS, Translations Mathematical Monographs. – 239 (2011) – 506 pp
3. *Rvachov V.A.* Nekotoriye finitniye funktsii i ih primeneniya [Some functions with a compact support and their applications] / V. A. Rvachov // Matematicheskaya fizika – 1973. – No 13. – p.139–149.
4. *Rvachov V.A.* Obobschonnnyye riyady Teylora dl'a differencyruyemykh funktsiy [The generalized Taylor series for the differentiable functions] / V.A.Rvachov // Mat. metody analiza dinamicheskikh sistem. - 1982. – Вып.6. – p.99–102.
5. *Rvachev V.A.* Compactly supported solutions of functional-differential equations and their applications] / V.A. Rvachev // Russian Math. Surveys. - 1990. –V. 45:1. – p. 87–120.
6. *Rvachov V. A.* Birkhoffova interpol'atsiya polinomial'nymi splaynami chetv'ortoy stepeni [Birkhoff interpolation with polynomial splines of fourth degree] / V. A. Rvachov, T.V. Rvachova, Ye.P. Tomilova // Radioelektronni i komp'uterni systemy. - 2015. – No 1. - p. 33–38.
7. *Rvachova T. V.* On a relation between the coefficients and the sum of the generalized Taylor series / T. V. Rvachova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2003. – Vol. 10, No 2. – p. 262 – 268.
8. *Rvachova T.V.* O skorosti priblijeniya beskonechno differencyruyemykh funktsiy chastichnymi summami obobschennogo riada Teylora [On the rate of approximation of the infinitely differentiable functions by the partial sums of the generalized Taylor series] / T. V. Rvachova // Visnyk KhNU, ser. «Matemayika, prykladna matematyka i mekhanika» – 2010. – No 931. – p.93–98.
9. *Rvachova T.V.* Ob asimptotike bazisnykh funktsiy obobschennogo riada Teylora [On the asymptotics of the basic functions of a generalized Taylor series] / T. V. Rvachova // Visnyk KhNU, ser. «Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika» – 2003. – №602. – p.94–104.

UDC 531/534.57

I. T. Selezov⁽¹⁾, R. I. Volynski⁽²⁾⁽¹⁾ Department of Wave Processes, Institute of Hydromechanics NASU, Ukraine⁽²⁾ Member of Agri-ecology group of the Katif Research Center, Israel)

MODELING OF WAVE DISTURBANCE PROPAGATION IN CONTACTING MEDIA

Statement of a new problem about passing wave disturbances through the interface between two regions is presented. It is based on the generalized hyperbolic model taking into account the compressibility of media and heat time relaxation. It is assumed that physical parameters of a upper region Ω_1 and lower region Ω_2 are different. As a particular case the problem of wave propagation from the upper region into the lower ones without taking into the account the temperature field is investigated. The solution is constructed and analyzed.

Modeling power of the root system in order to improve productivity has been and remains an urgent problem of agriculture. This is directly related to the nutrient intake of the upper region of leaf cover (canopy) in the lower region (fertilize the soil). The most substantial theoretical study of the root system is represented by De Willigen et al. (2002) [3].

The models of agriculture until 1989 considered a leaf cover non-conducting moisture from the atmosphere into the soil, i.e zero conductivity $g_c = 0$ or infinite $g_c = \infty$. Ben-Asher et al. (1989) [2] have removed this limitation by considering the finite conductivity of canopy, which led to the actual description of the passage of moisture in the soil, with the ultimate speed. This traditional model is based on discrete representation of functions, averaging over the coordinates and time in the works of Penman (1948), Monteith (1964). Accounting moisture permeability through the screen requires complex modeling (Balaji R. and Sundar V., 2004) [1].

This report is based on the continuum consideration, i. e. on the theory of differential equations. In the study of the propagation of wave disturbances, the models describing by the hyperbolic equations with the finite speed of propagation are most appropriate. This is in accordance with the reality of the world: Maxwell (1864), Einstein (1907). There may be instances when hyperbolic equations can not describe the perturbations with finite speed: Hersh (1964), Misokhata (1965).

In terms of differential equations it is possible to distinguish conditionally three areas (Selezov, 2009) [4]: the first – elliptic equations, the second – parabolic and hyperbolic-parabolic equations, the third – hyperbolic equations. First is evanescent disturbances – frozen world (example – the Poisson equation

$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0$, which describes the electric field $\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi$ of a point charge ρ); the second describes the propagation of disturbances with infinite velocity (example – diffusion equation $D\nabla^2\varphi = \partial\varphi/\partial t$); third corresponds to real physical process of propagation of disturbances with finite velocity (example – equation of acoustics $\nabla^2 u = c_0^{-2}\partial^2 u/\partial t^2$).

The first option is not suitable for the screen problem, the second includes in part the diffusion field, the third is the most suitable for describing the propagation of substances.

The properties of the upper medium are strongly dependent on temperature, humidity and evaporation. Temperature range is described by the Clausius-Clapeyron pressure as a function of temperature taking into account the 1 and 2 laws of thermodynamics and additional postulates: Truesdell (1972).

Generalized model of compressible inviscid fluid, which takes into account the effects of compressibility and relaxation time, includes (Selezov, 2009) [4] the equation of conservation of momentum, generalized equation of a state, generalized equation of heat propagation.

Notations shown in (Selezov and Kryvonos, 2013) [5]. This model describes the propagation of disturbances with finite velocity in contrast to the traditional model of the diffusion of heat propagation, which describes the propagation of heat with infinite speed. The parameters of the model depends on the state of the medium: temperature, thermal conductivity, moisture, density, elastic properties.

After linearization we obtain a system of equations for scalar quantities φ and \hat{t} :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_0^2\nabla^2\varphi = -\beta c_0^2 \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} + \rho_0 g, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{t}}{\partial t^2} - c_h^2 \nabla^2 \hat{t} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \nabla^2 \varphi, \quad (2)$$

where φ is the potential of velocity ($\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$); $c_0 = \sqrt{K/\rho_0}$; $c_h = \sqrt{K/\tau}$.

Equation (1) includes on the right the term taking into account the temperature field and the equation (2) includes the term with a temporary relaxation (third from the left) and terms taking into account the dilatation field (on the right side).

We consider the upper and lower semi-infinite regions, separated by a layer (screen) of a small thickness, and matching conditions are being demolished on the undisturbed middle surface.

The problem is considered in a coordinate system x, y, z whose axis Oz is directed upwards, with the origin on the middle surface. Excluding mass force

$\vec{F} = \rho g \vec{e}_3$ and when the required functions are independent of the transverse coordinates x and y we obtain a system of coupled equations

$$\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial t^2} = \beta_s \frac{\partial \hat{t}}{\partial t}, \quad s = 1, 2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{t}_s}{\partial z^2} - \frac{1}{c_h^2} \frac{\partial^2 \hat{t}_s}{\partial t^2} - \frac{1}{K} \frac{\partial \hat{t}_s}{\partial t} = -\frac{1}{K} \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} \quad s = 1, 2 \quad (4)$$

and matching conditions at the interface

– dynamic-type impedance condition

$$\rho_1 c_{01} \varphi_1(z, t) \Big|_{z=0} = \rho_2 c_{02} \varphi_2(z, t) \Big|_{z=0} \quad (5)$$

– kinematic condition

$$\frac{\partial \varphi_1(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \varphi_2(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (6)$$

– temperature condition

$$\hat{t}_1(z, t) \Big|_{z=0} = \hat{t}_2(z, t) \Big|_{z=0} \quad (7)$$

and heat flux condition

$$(k_1 + \tau_1 \partial_t) \frac{\partial \hat{t}_1(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = (k_2 + \tau_2 \partial_t) \frac{\partial \hat{t}_2(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (8)$$

The system of equations (3), (4) can be reduced to one the resolving of the fourth order equation for φ or \hat{t} . This equation has two complex conjugate roots in the space of Laplace image, or in the steady state. Solving the initial-boundary value problem for the system of equations (1)-(8) is connected with the numerical inversion of the Laplace transform.

We consider the reduced stationary problem without taking into account the temperature field in the case when plane harmonic wave propagates from infinity of the upper region. The problem (3) – (6) is reduced to the Helmholtz equation review. From obtained solutions the ratio of the amplitude of the transmitted wave to the amplitude of the incident wave is determined. It was shown that in actual “upper atmosphere – soil” substance may pass to 20%.

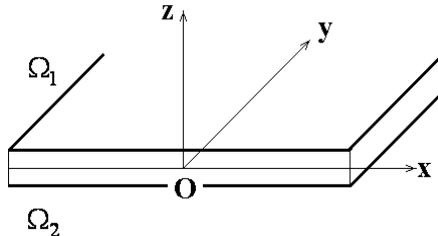


Fig. Geometry of the problem

The problem of nutrient inputs from the upper region over a leaf cover into the lower region (fertilize the soil) is of great importance. To effectively growing need optimal feeding regime of the root system. This optimization problem is too difficult because of the large number of factors affecting agricultural products.

Permeability of screen (canopy) for moisture in the case of a finite conductivity of the canopy (without limiting values of conductivity) can be investigated following the work Balaji and Sundar [1].

1. *Balaji R. and Sundar V.* Theoretical and experimental investigation on the wave transmission through slotter screens // *Oceanic Engineering International*. – 2004. – **8**, No. 2. – P. 69–90.
2. *Ben-Asher J., Meek D. W., Hutmacher R. B., and Phene C. J.* Computational approach to assess actual transpiration from aerodynamic and canopy resistance // *Agron. J.* – 1989. – **81**. – P. 776–782.
3. *De Willigen P, Heinen M, Mollier A and Van Noordwijk M.* Two- dimensional growth of a root system modelled as a diffusion process. I. Analytical solutions // *Plant and Soil*. – 2002. – **240**. – P. 225–234.
4. *Selezov I. T.* On wave hyperbolic model for disturbance propagation in magnetic fluid // In: *Operator Theory: Advances and Applications*. – Basel / Switzerland: Birkhauser, 2009. – **191**. – P. 221–225.
5. *Selezov I.T. and Kryvonos Yu.G.* Wave problems of biohydrodynamics and biophysics (In Russian). – Kiev: Nauk. Dumka, 2013. – 308 pp.

УДК 539.3

E.V. Semenova

(Institute of Mathematics NAN Ukraine Kiev)

ARITHMETICAL ASPECTS FOR FULLY DISCRETE PROJECTION METHOD

Let's consider periodic integral equation

$$Au = Du + \sum_{p=0}^q A_p u = f \quad (1)$$

where $Du = \int_0^1 k_0(t-s)u(s)ds$, $A_p u = \int_0^1 k_p(t-s)a_p(t,s)u(s)ds$, for

$p = 0...q$. Here for all $p = 0...q$ the functions f, k_p are periodic and a_p are biperiodic infinitely smooth functions such that

$\|a_p\|_{\eta_1, \eta_2}^2 := \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} |\hat{a}(k, l)|^2 e^{2\eta_2(|k|^{1/\eta_1} + |l|^{1/\eta_2})} < \infty, \eta_1 \geq 1, \eta_2 > 0$. Assume that

Fourier coefficients of functions $k_p(t)$, $p = 0, \dots, q$ are known exactly and such that operator A creates isomorphism between spaces H^λ and $H^{\lambda+1}$, where H^λ , $-\infty < \lambda < \infty$ are the Sobolev spaces of 1-periodic functions with the norm

$$\|u\|_\lambda := (\hat{u}(0))^2 + \sum |n|^{2\lambda} |\hat{u}(n)|^2)^{1/2},$$

where $\{\hat{u}(n)\}$ are Fourier coefficients by trigonometric basis.

We suppose that $f \in H^{\mu+1}$ for some unknown $\mu > \alpha + 1/2$. Let instead of $a_p(t, s)$, $f(t)$ we have only some their perturbations such that

$$M^{-2} \left(\sum_{i,j=1}^M |a_{p,\varepsilon}(iM^{-1}, jM^{-1}) - a_p(iM^{-1}, jM^{-1})| \right)^{1/2} \leq \varepsilon, \quad p = 0, \dots, q,$$

$$N^{-1} \left(\sum_{j=1}^N |f_\delta(jN^{-1}) - f(jN^{-1})|^2 \right)^{1/2} \leq \delta \|f\|_{\mu-\alpha}.$$

The approximation to (1) is constructed by fully discrete projection method (FDPM), i.e.

$$A_{M,\varepsilon} u_{N,\varepsilon,\delta} = Du_{N,\varepsilon,\delta} + P_l \sum_{p=0}^q A_{p,M,\varepsilon} P_l u_{N,\varepsilon,\delta} = Q_N f_\delta, \quad (2)$$

where $A_{p,M,\varepsilon} u = \int_0^1 k_p(t-s) P_{D_M} Q_{M,M} a_{p,\varepsilon}(t,s) u(s) ds$, and $u_{N,\varepsilon,\delta}$ is approximate solution. Here $P_l, Q_N, Q_{M,M}$ are orthogonal and interpolation projections. Proposed method is similar to [2], but here we introduce additional projection to reduce amount of arithmetic operations up to $N \log N$. So, we state the aim to save the best accuracy of FDPM with reduced amount of arithmetical operations.

We propose to chose discretization parameters M and N for FDPM by a priori way:

$$M = O(\log^\eta \frac{1}{\varepsilon}), \quad N = O(\delta^{\frac{1}{\alpha-\mu}}). \quad (3)$$

Theorem 1. Let M and N are chosen according to (2). Then the error bound of FDPM for (1) is the following

$$\|u - u_{N,\varepsilon,\delta}\|_\lambda \leq c_2 (\delta^{\frac{\mu-\lambda}{\alpha-\mu}} + \varepsilon \log^{\eta\lambda'} \frac{1}{\varepsilon}),$$

where $\lambda' = 2\lambda - \alpha$ and c_2 is some positive constant. Moreover the total amount of arithmetical operations for constructiong matrix $A_{M,\varepsilon}$ is $O(N \log N)$.

Following [1] for fast solving of (2) we propose to use GMRES. The procedure is the following: we construct the sequence $u_{n,N,\delta,\varepsilon}$ for $n = 1, 2, \dots$ that satisfies the condition

$$\|S_N u_{n,N,\delta,\varepsilon} - f_N\|_\alpha = \min_{u \in K_n(S_N, f_N)} \|S_N u - f_N\|_\alpha,$$

where $S_N = D + P_l \sum_{p=0}^q A_{p,M,\varepsilon} P_l$ and $K_n(S_N, f_N)$ is well-known Krylov space. As the stopping rule we consider the discrepancy principle

$$\|S_N u_{n,N,\delta,\varepsilon} - f_N\|_\alpha \leq c\delta \|f_N\|_\alpha, \quad (4)$$

where $u_{n,N,\delta,\varepsilon}$ is n -th iteration of GMRES that we consider as approximate solution to $u_{N,\delta,\varepsilon}$.

Theorem 2. Let the conditions of Theorem 1 be satisfied and n is the first number that fulfils (4). Then the accuracy of GMRES is the following

$$\|u_{n,N,\delta,\varepsilon} - u_{N,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leq c \left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda-2\alpha} \delta,$$

where c is some positive constant. Moreover the amount of arithmetical operations for solving (2) by GMRES is $O(N \log N)$.

Remark 1. We note that taking into account Theorems 1 and 2 the general accuracy is the following

$$\|u - u_{n,N,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leq c_2 \left(\delta^{\frac{\mu-\lambda}{\mu-\alpha}} + \varepsilon \log^{\eta\lambda'} \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Besides, the total amount of arithmetical operations for solving (2) by GMRES is $O(N \log N)$.

1. Saranen J. \ Fast solvers of integral and pseudodifferential equations on closed curves / J. Saranen, G.Vainikko // Math.Comp.--1998.-- **67**. --P. 1473--1491.
2. Semenova E.V. \ A The accuracy of Fully Discrete Projection Method on one class of PD equation/ E.V.Semenova, E.A.Volonets // Dynamical system.--2012.-- **2**.--P. 309--321.

UDC 519.6

V. Stelmashchuk⁽¹⁾, H. Shynkarenko^(1,2)⁽¹⁾ Ivan Franko National University of Lviv,⁽²⁾ Politechnika Opolska)

**NUMERICAL SCHEME FOR GREEN-LINDSAY
THERMOPIEZOELECTRICITY STEADY STATE FORCED
VIBRATIONS PROBLEM**

The classic linear mathematical model of the thermopiezoelectricity (see [1-2]) does not quite correctly describe the pyroelectricity phenomenon. For this reason, various modifications of the classic thermopiezoelectricity model were proposed (see [3]): Lord-Shulman, Green-Lindsay, Chandrasekharaiah-Tzou, Hetnarski-Ignaczak, Green-Naghdi, etc.

In this research we investigate the Green-Lindsay theory of thermopiezoelectricity. Like in the classic theory, it is assumed that the behavior of piezoelectric can be described in terms of elastic displacement vector $\mathbf{u} = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^d$, $d = 1, 2, 3$, electric potential $p = p(x, t)$, temperature increment $\theta = \theta(x, t)$, which satisfy the system of coupled equations of motion, electrodynamics and heat conduction (see [1-2]). In the Green-Lindsay model the above mentioned system of partial differential equations, in comparison to the classical thermopiezoelectricity, contains the constitutive relations for the stress, the entropy and the electric induction, which are generalized by introducing two different relaxation times $t_1 > t_0 > 0$ into consideration.

The following variational problem is formulated on the basis of initial boundary value problem of Green-Lindsay thermopiezoelectricity:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{given } \psi_0 = (\mathbf{u}_0, p_0, \theta_0) \in \Phi, \mathbf{v}_0, \theta_{10} \in H \text{ and } (l, r, \mu) \in L^2(0, T; \Phi'); \\ \text{find } \psi = \{\mathbf{u}(x, t), p(x, t), \theta(x, t)\} \in L^2(0, T; \Phi) \text{ such that} \\ m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - e(p(t), \mathbf{v}) - \\ - \gamma(\theta(t) + t_1 \theta'(t), \mathbf{v}) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle, \\ g(p'(t), q) + e(q, \mathbf{u}'(t)) + z(p(t), q) + \pi(\theta'(t) + t_1 \theta''(t), q) = \langle r(t), q \rangle, \\ s(\theta'(t) + t_0 \theta''(t), \xi) + k(\theta(t), \xi) + \pi(\xi, p'(t)) + \\ + \gamma(\xi, \mathbf{u}'(t)) = \langle \mu(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\ g(p(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall q \in Q, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0, \quad s(\theta'(0) - \theta_{10}, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in Z. \end{array} \right. \quad (1)$$

We suppose that the pyroelectric specimen is subjected to harmonic loadings with known angular frequency $\omega = const > 0$:

$$l(t) = (l_1 + il_2)e^{-i\omega t}, \quad r(t) = (r_1 + ir_2)e^{-i\omega t}, \quad \mu(t) = (\mu_1 + i\mu_2)e^{-i\omega t}, \quad \forall t \in (0, T].$$

In this case the solutions of problem (1) also have the following structure:

$$\mathbf{u}(x, t) \cong (\mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2)e^{-i\omega t}, \quad p(x, t) \cong (p_1 + ip_2)e^{-i\omega t}, \quad \theta(x, t) \cong (\theta_1 + i\theta_2)e^{-i\omega t}.$$

After some simplifications we come to the following variational problem describing steady state forced vibrations of pyroelectric specimen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{given } \omega > 0, t_1 > t_0 > 0, \langle \chi_\omega, w \rangle \in W' = \Phi' \times \Phi'; \\ \text{find } \psi = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, p_1, p_2, \theta_1, \theta_2) \in W = \Phi \times \Phi \text{ such that} \\ \Pi_\omega(\psi, w) = \langle \chi_\omega, w \rangle \quad \forall w = (v_1, \xi_1, \eta_1, v_2, \xi_2, \eta_2) \in W. \end{array} \right. \quad (2)$$

The well-posedness of variational problem (2) is proved.

Then after applying Galerkin procedure with finite element approximations, we obtain the following the system of linear algebraic equations for calculation of nodal values of the unknown amplitudes:

$$\left[\begin{array}{cccccc} \omega \mathbf{A} & [-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}] & 0 & \mathbf{E}^T & -\omega t_1 \mathbf{Y}^T & \mathbf{Y}^T \\ [-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}] & \omega \mathbf{A} & -\mathbf{E}^T & 0 & -\mathbf{Y}^T & -\omega t_1 \mathbf{Y}^T \\ 0 & \mathbf{E} & \omega^{-1} \mathbf{Z} & \mathbf{G} & -\omega t_1 \mathbf{\Pi}^T & \mathbf{\Pi}^T \\ -\mathbf{E} & 0 & -\mathbf{G} & \omega^{-1} \mathbf{Z} & -\mathbf{\Pi}^T & -\omega t_1 \mathbf{\Pi}^T \\ \omega t_1 \mathbf{Y} & \mathbf{Y} & \omega t_1 \mathbf{\Pi} & \mathbf{\Pi} & \mathbf{D} & -\mathbf{H} \\ -\mathbf{Y} & \omega t_1 \mathbf{Y} & -\mathbf{\Pi} & \omega t_1 \mathbf{\Pi} & \mathbf{H} & \mathbf{D} \end{array} \right] \times \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \times [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2]^T = \\ & = [-\mathbf{L}_2, \mathbf{L}_1, \omega^{-1} \mathbf{R}_1, \omega^{-1} \mathbf{R}_2, \omega^{-1} \mathbf{F}_1 + t_1 \mathbf{F}_2, \omega^{-1} \mathbf{F}_2 - t_1 \mathbf{F}_1]^T, \\ & \text{where } \mathbf{D} = \omega^{-1} \mathbf{K} + \omega(t_1 - t_0) \mathbf{S}, \mathbf{H} = -(1 + \omega^2 t_0 t_1) \mathbf{S} + t_1 \mathbf{K}. \end{aligned}$$

Here $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ are the nodal values of elastic displacement, electric potential and temperature increment amplitudes respectively. The matrix of the system of linear algebraic equations (3) is positively defined, so its solution always exists.

1. *Стельмащук В.* Числове моделювання динамічних задач піроелектрики / В.Стельмащук, Г.Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – Випуск 22, 2014. – с. 92-107.
2. *Шинкаренко Г.А.* Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. I. Постановка задач и анализ установившихся вынужденных колебаний / Г.А.Шинкаренко // Дифференц. уравнения. – Т.29, №.7, 1993. – С. 1252-1260.
3. *Hetnarski R.B.* Generalized Thermoelasticity / R. B. Hetnarski and J. Ignaczak // Journal of Thermal Stresses. – Vol. 22. – 1999. – pp. 451-476.

UDC 51-77

O. M. Stepanchenko, P. M. Martyniuk

(The National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

ON THE MATHEMATICAL MODELLING OF AN INFORMATIONAL DESTRUCTURE OF SOCIAL COMMUNITIES

Introduction. Social community – is a group of people, united by a certain idea and believes and that can be located in a certain habitation area $\Omega_x \subset E^2$. An informational destruction in our understanding is the change in believes of some individuals contrary to the common ones in the community, as well as the ideological withdrawal of an individual from the community.

One of the ways to change the believes of an individual is to create an informational field, that would generate an “informational tension”, which would cause “informational upheavals” of individuals for the exclusion from the community’s believes field.

Some ideas on the mathematical modeling of the information expansion in social networks with the use of differential equations were described in articles [1-5].

Some ideas on the modeling of the social communities’ informational destruction processes will be described further.

Volumetric informational forces: an analogy to the processes in saturated porous environments. It is known, that the components of an intensive volumetric filtration force in saturated porous environments (i.e. soils) are determined the following way:

$$X = \Phi_x = -\gamma \frac{\partial h}{\partial x}, \quad Y = \Phi_y = -\gamma \frac{\partial h}{\partial y}, \quad Z = \Phi_z = -\gamma \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (1)$$

where $\gamma = g\rho$ - specific weight of a porous fluid; h - it’s strength. Thus, the intensities of the voluminous filtration force are generated by the fluid’s strength gradients. Such method will be used in analogy to the “voluminous informational forces”: the intensities of such forces in a social community are generated by the information gradient. Indeed, if a society lives in a stable informational field, whatever the “size” of such a field would be – the processes will be stable. An instability is generated by an informational “discharge”, which produces an informational gradient (the question of an economic state of the social community is not taken into consideration for now)

We would like to point out, that the above mentioned is a hypothesis. Therefore, and intensity voluminous IT-force can be written as:

$$X_i = -\gamma_i \frac{\partial I}{\partial x}, \quad (2)$$

where γ_i - specific information weight (it's importance) for the community;
 I - the amount of the information; $\frac{\partial I}{\partial x}$ - the informational gradient in the given dimension. Another approach is based on the analogies to Darsey's law, which looks like this:

$$\mathbf{u} = (u_x; u_y; u_z) = -k \nabla h. \quad (3)$$

Then (1) and (3) result in:

$$X = \Phi_x = \frac{\gamma}{k} u_x.$$

Therefore, the components of a intensive voluminous filtration force are proportional to the filtration speed. For the voluminous intensity of an informational force in correspondence to the above mentioned we have:

$$X_i = \frac{\gamma_i}{d} u_{xi},$$

where d - is the "popularity" of the information, u_{xi} - the informational flow speed. The idea of the analogy between the Darsey's, Fick's and Furje's laws and the information spread expansion via social online networks are stated and sustained in [1] in this article we suggest to describe the information expansion processes via social networks in analogy to the diffusion processes in the chemical substances. In the article [2] the following differential equation of the information expansion is suggested:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = d \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + f(I, x, t),$$

where $I(x, t)$ - the volume of the information (or the density of the users attracted, which is, according to the authors the same thing); $f = f(I, x, t)$ - the

given information generation intensity; $J(x, t) = -d \frac{\partial I}{\partial x}$ - informational stream;

d - "diffusion coefficient", the content of which lies in the popularity of the information.

Let's examine Ω_y - the area of people's believes, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \Omega_y$. Here y_i ($i = \overline{1, m}$) represents the axis of disposition to the belief given, where $y_i \in [-1; 1]$, $y_i = -1$ - means an absolutely negative, and $y_i = 1$ - an absolutely positive attitude. The cyberspace of the information expansion in the problem examined is $\Omega = (\Omega_x, \Omega_k, \Omega_y)$, where Ω_x , $(x, y) \in \Omega_x$, - is the physical area of the community's residence, Ω_k , $\mathbf{K} = (k_1, k_2, \dots, k_l) \in \Omega_k$ - is the area of the information expansion channels (social networks, radio, television etc.), and is

characterized by cyber distances. Further we assume, that Ω consists of the vectors $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. In that case, the information expansion is described by the following equation:

$$\frac{\partial I(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla I) + f(\mathbf{X}, t),$$

where \mathbf{D} is the tensor of the information diffusion coefficients, that consists of \mathbf{D}_x , \mathbf{D}_k , \mathbf{D}_y – the tensors of the information diffusion coefficients in a territorial dimension, through the information expansion channels, and in the believes area accordingly.

Informational tension, displacement, deformations and the influence of informational. According to the definition of a tension in solid environments:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta s}$$

where ΔF -- is an effort, applied to the area Δs (which is located in space), when this area is pulled together to a dot; $\boldsymbol{\sigma}$ - tension tensor.

As far as the social communities and informational flows are concerned, an analogical equation can be suggested:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta p}, \quad (4)$$

where ΔF_i - is an informational effort, Δp - the “area” of a social community element, which is pulled together to a dot.

According to [5] if a model of a linearly deformed body is used, the filtration forces cause filtration tension in soils. For instance, the equations in a two-dimensional case look the following way:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \gamma \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \gamma \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad \Delta h = 0, \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_z) = 0.$$

Similar equations can be suggested for a component of an informational tension tensor in phase space (Ω, t)

In the mechanics of a deformed solid body, tensions cause displacements and voluminous deformations of a solid body. The simplest model – is the model of a perfectly resilient body, for which the simplified Hooke’s law is used. The same relations can be applied for a description of the tensely-deformed state of social communities in case of the informational forces influence (2). Such mathematical models for the social communities will be analogical to those for the porous environments (i.e. Bio-Florine models). New researches are needed in this direction. The described opinion and hypothesis define only a conceptual model for the researches to follow.

Mathematical modeling of social communities’ informational destruction In the article [6] based on the full-scale experiments for soils

washout by the filtration flows it is shown, that a particle starts moving having shifted the tensions τ_w , which are initiated by the filtration forces, and exceed the restraining tensions τ_c of the particle in soil's skeleton. The washout intensity in particular is defined as

$$\dot{m} = \begin{cases} k_{er} (|\tau_w| - \tau_c), & |\tau_w| > \tau_c \\ 0, & |\tau_w| \leq \tau_c \end{cases}$$

where k_{er} – soil washout coefficient.

Here lies the analogy to the social processes in case of an informational influence. When the “shifting” tensions, initiated by the informational-streaming forces exceed the restraining tensions, which keep the individual in the community's beliefs area, a shift in the individual's beliefs occurs in the direction of the shift.

In the articles [7,8] other approaches are used, which are based on the critical filtration pressure and speed gradients. All these approaches can be used in analogically for social communities and informational flows.

Conclusions. The further research of the authors will be all about justification and verification of the mathematical models through the practical realization and approbation on specific examples.

1. Wang H. Modeling Information Diffusion in Online Social Networks with Partial Differential Equations [digital resource] / H. Wang, F. Wang, K. Xu. – 2013. – the resource is accessible by the following link: <http://arxiv.org/pdf/1310.0505.pdf>.
2. Characterizing Information Diffusion in Online Social Networks with Linear Diffusive Model [digital resource] / [F. Wang, H. Wang, K. Xu etc]. – 2013. – the resource is accessible by the following link: <http://www.public.asu.edu/~kxu01/papers/2013/ICDCS2013.pdf>.
3. Spatiotemporal diffusion modeling of global mobilization in social media: The case of the 2011 Egyptian revolution / K. Hazel Kwon, Weiai Wayne Xu, Haiyan Wang, Jaime Chon // International Journal of Communication. – 2016. – 10. – P. 73-97.
4. Partial differential equations with Robin boundary condition in online social networks / Guowei Dai, Ruyun Ma, Haiyan Wang, Feng Wang, Kuai Xu // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. – 2015. – Vol. 20, №6. – Pp. 1609-1624.
5. Ivanov P. Soils and bases of the hydro technical buildings. The mechanics of soils. / P. Ivanov – Moscow: Vysshaya Shkola, 1991. – p. 447
6. Bonelli S. The scaling law of piping erosion / S. Bonelli, O. Brivois, D. Lachouette // 18^{eme} Congres Francais de Mecanique, Grenoble. – 2007. – Pp. 1–6.
7. Bomba A. Complex modelling of the nonlinear filtration-suffusion processes in the soil dams / A. Bomba, V. Havryljuk, A terebus, M Hlapuk // The Messenger of the National University of Water and Environmental Engineering. Technical Science Section – 2011. - #3(55) – p. 70-77.
8. Poliakov V. Filtration deformations in the drained soils: the theory and addendum / V. Poliakov. – Kiev: Argar Media Group, 2014. – p.382

UDC

Th. Wester, S. Garcia, D. Isaac

(US Naval Academy, Annapolis, MD, USA)

**ANALYSIS AND SIMULATION OF A MATHEMATICAL MODEL OF
EBOLA VIRUS DYNAMICS IN VIVO**

Ebola is known to evade detection by the immune system during infection. In this paper, we use mathematical modeling as a tool to investigate and analyze the immune system dynamics in the presence of Ebola virus infection. The resulting model is a system of non-linear ordinary differential equations derived from known biological dynamics and a few biologically reasonable assumptions. In this paper, we prove existence and uniqueness as well as positivity and boundedness of the solutions to the differential equations. In addition, we derive the viral and immune reproduction numbers, and analyze the local asymptotic stability of the differential equation model. Furthermore, we run numerical simulations to illustrate the impact the variation of the parameters has on the behavior of the system. The analysis we develop provides thresholds for both determining the persistence and elimination of Ebola virus from the immune system, and represents the known biological dynamics of Ebola virus infection.

УДК 519.6

А.В. Бешлей

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО
ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ
КОЕФІЦІЄНТАМИ**

Диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами часто виникають при математичному моделюванні різноманітних фізичних процесів. До задач такого класу можна віднести задачу електричної імпедансної томографії (ЕІТ), яка виникає, зокрема, в медицині. Ця задача є оберненою й потребує спеціальних алгоритмів, що можуть містити багатократне виконання прямих задач ЕІТ, тому важливим є їх чисельне розв'язування для якого ми використаємо метод інтегральних рівнянь.

Розглянемо пряму задачу ЕІТ. Нехай $D \subset R^2$ – обмежена однозв'язна область з границею $\Gamma \in C^2$. Необхідно знайти функцію $u \in H^1(D)$, що задовольняє еліптичне рівняння

$$Au(x) = \operatorname{div}(\sigma(x) \operatorname{grad} u(x)) = 0, \quad x \in D \quad (1)$$

та граничну умову Діріхле

$$u = f \quad \text{на } \Gamma, \quad (2)$$

де $\sigma \in C^\infty(\bar{D})$, $\sigma > 0$, $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ – задані функції. Відомо [1,2], що для введених обмежень на функції σ та f існує єдиний розв'язок u , який належить відповідному простору Соболева. Для зведення диференціальної задачі до просторово-граничного інтегрального рівняння використаємо функцію Леві.

Функція $P(x, y)$, $x, y \in D$ називається функцією Леві (параметріком) диференціального оператора A , якщо

$$A_x P(x, y) = \delta(x - y) + R(x, y),$$

де δ – функція Дірака і функція R має слабку особливість при $x = y$ [1].

Розв'язок задачі (1)-(2) подамо у вигляді суми потенціалів простих шарів

$$u(x) = \int_D \theta(y) P(x, y) dy + \int_\Gamma \varphi_0(y) P(x, y) ds(y), \quad x \in D \quad (3)$$

з невідомими функціями густин $\theta \in C(D)$, $\varphi_0 \in C(\Gamma)$. Для визначення функцій θ і φ_0 отримаємо систему

$$\begin{cases} \theta(x) + \int_D \theta(y)R(x, y)dy + \int_{\Gamma} \varphi_0(y)R(x, y)ds(y) = 0, & x \in D, \\ \int_D \theta(y)P(x, y)dy + \int_{\Gamma} \varphi_0(y)P(x, y)ds(y) = f(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \quad (4)$$

Вважатимемо, що гранична крива Γ має параметричне подання
Зробимо заміни змінних в подвійних інтегралах отриманої системи (4)

$$\begin{cases} y_1 = p_1(\xi, \tau) = \xi x_1(\tau), \\ y_2 = p_2(\xi, \tau) = \xi x_2(\tau), \end{cases}$$

$(\xi, \tau) \in \Pi = [0, 1) \times [0, 2\pi)$, якобіан $J(\xi, \tau) = \xi(x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_2(\tau)x_1'(\tau))$.

Тоді можна записати систему (4) так:

$$\begin{cases} \varphi(\eta, t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \hat{R}(\eta, t; \tau) d\tau = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{P}(t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \hat{P}(t; \tau) d\tau = \tilde{f}(t), t \in [0, 2\pi), \end{cases}$$

$$\varphi(\eta, t) = \theta(p(\eta, t)), \varphi_0(t) = \varphi_0(x(t))|x'(t)|, \tilde{f}(t) = f(x(t)).$$

Ядра системи інтегральних рівнянь матимуть наступний вигляд

$$\tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) = 2\pi R(p(\eta, t), p(\xi, \tau))J(\xi, \tau), \hat{R}(\eta, t; \tau) = 2\pi R(p(\eta, t), x(\tau)),$$

$$\tilde{P}(t; \xi, \tau) = 2\pi P(x(t), p(\xi, \tau))J(\xi, \tau), \hat{P}(t; \tau) = 2\pi P(x(t), x(\tau)).$$

Варто відмітити, що ядра \tilde{R} та \hat{P} мають різні особливості. Сильну особливість в ядрі $\tilde{R}(\eta, t; \eta, \tau)$ виділяємо в такій формі

$$\tilde{R}(\eta, t; \eta, \tau) = \tilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) \frac{1}{2 \sin^2(0.5(\tau - t))},$$

$$\tilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) = \begin{cases} 2 \frac{(x(t) - x(\tau)) \cdot \text{grad}\sigma(\eta x(t))}{\eta \sigma(\eta x(\tau)) |x(t) - x(\tau)|^2} J(\eta, \tau) \sin^2(0.5(\tau - t)), t \neq \tau, \\ 0, t = \tau. \end{cases}$$

Логарифмічну особливість в ядрі \hat{P} подамо в такому вигляді

$$\hat{P}(t, \tau) = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} + \hat{P}^{(2)}(t, \tau)$$

$$\hat{P}^{(2)}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{|x(t) - x(\tau)|^2}{4 \sin^2(0.5(t - \tau)) / e}, & t \neq \tau, \\ \frac{1}{2} \ln(e|x'(t)|^2), & t = \tau. \end{cases}$$

Після використання квадратурних формул інтерполяційного типу та колокації у квадратурних вузлах отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_{mi} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \bar{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \hat{R}(\eta_m, t_i; t_j) = 0, \\ \left[\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \tilde{P}(t_i; \eta_k, t_j) + \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \left[\frac{1}{2} F_j(t) + \frac{1}{2n} \hat{P}^{(2)}(t_i, t_j) \right] \right] = \tilde{f}(t_i), \end{cases}$$

де $\varphi_{mi} \approx \varphi(\eta_m, t_i)$, $\varphi_{0j} \approx \varphi_0(t_j)$, $m = 1, \dots, N, i = 0, \dots, 2n - 1$,

$$\bar{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \tilde{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j), & m \neq k, \\ T_j(t) \tilde{R}^{(1)}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j), & m = k, \end{cases}$$

$\alpha_k \in R$ - квадратурні ваги, $\eta_k \in (0,1), k = 1, \dots, N$, $t_i = i\pi/n, i = 0, \dots, 2n - 1$ - квадратурні вузли та вагові функції

$$F_k(t) = -\frac{1}{2n} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(t - t_k) + \frac{1}{n} \cos n(t - t_k) \right),$$

$$T_k(t) = -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \sin m(t - t_k) - \frac{1}{2n} \sin n(t - t_k).$$

Розв'язавши цю систему, отримуємо наближені значення невідомих густин, а відтак, можна знайти наближений розв'язок прямої задачі ЕІТ.

Приклад 1. Відомо, що для функції $\sigma = (\alpha + \beta x_1 + \gamma x_2)^2$ і гармонічної функції ψ , функція

$$u_{ex}(x) = \frac{\psi(x)}{\sigma^{1/2}(x)}, x \in D$$

задовольняє вихідне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Нехай $\Gamma = (\cos(t), \sin(t))$, $\sigma(x) = (2 + x_1 + x_2)$, $\psi(x) = x_1^2 - x_2^2, x \in D$.

Відтворюватимемо розв'язок на кривих $\tilde{\Gamma}_k = (1 - 0.25k)x(t), k = 1, 2, 3$.

Таблиця 1. Абсолютні похибки значень функції

N	n	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_2)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_3)}$
3	16	0.0397314	0.0231322	0.0025849
	32	0.0372878	0.0231545	0.0024905
	64	0.0372534	0.0231534	0.0024902
7	16	0.0173609	0.0065667	0.0011628
	32	0.0077216	0.0048765	0.0007252
	64	0.0066850	0.0046931	0.0006763
13	16	0.0099312	0.0023847	0.0004775
	32	0.0038182	0.0018201	0.0003767
	64	0.0017964	0.0014230	0.0002696

Приклад 2. Нехай $\Gamma = (0.2 \cos(t), 0.4 \sin(t) - 0.3 \sin(t)^2)$, σ, ψ з прикладу 1.

Таблиця 2. Абсолютні похибки значень функції

N	n	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_2)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_3)}$
3	16	0.0017832	0.0019469	0.0002833
	32	0.0017703	0.0019348	0.0002492
	64	0.0017706	0.0019393	0.0002521
7	16	0.0003595	0.0004525	0.0000918
	32	0.0002389	0.0004521	0.0000601
	64	0.0002448	0.0004540	0.0000466
13	16	0.0003231	0.0001306	0.0000347
	32	0.0000365	0.0001449	0.0000154
	64	0.0000376	0.0001462	0.0000063

Проведені чисельні експерименти підтверджують достовірність та ефективність запропонованого підходу.

1. *Mikhailov S. E.* Analysis of united boundary-domain integro-differential and integral equations for a mixed BVP with variable coefficients // *Math. Meth. Appl. Scie.*, 2006. – 29. – P. 715–739.
2. *Pomp A.* The boundary-domain integral method for elliptic systems. With applications in shells. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1683, Berlin. – Heidelberg, Springer-Verlag, 1998. - 163 p.

УДК 517.9:519.6

В.О. Богаєнко, В.М. Булавацький

(Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ)

**ПРО ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АНОМАЛЬНОГО
КОНВЕКТИВНО-ДИFUЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ В УМОВАХ
ПЛОСКО-ВЕРТИКАЛЬНОГО УСТАЛЕНОГО ФІЛЬТРАЦІЙНОГО
ПОЛЯ**

Розробка методів математичного моделювання конвективно-дифузійної динаміки розчинних речовин при фільтрації з джерел забруднень ґрунтових вод є актуальним науковим напрямом, зокрема, як у питаннях охорони водних ресурсів, так й у багатьох інших гідроекологічних дослідженнях. Актуальною також є задача підвищення ступеня адекватності існуючих кількісних моделей динаміки конвективно-дифузійних процесів при фільтрації у геопористих середовищах. Особливо це стосується систем зі складною просторово-часовою структурою, для яких характерні ефекти пам'яті, просторової нелокальності та самоорганізації. У цих умовах суттєвий прогрес у моделюванні пов'язаний з використанням підходу, що базується на застосуванні формалізму інтегро-диференціювання дробового порядку [1,2].

У даному повідомленні розглядається нова дробово-диференціальна математична модель, призначена для дослідження аномальної динаміки процесу конвективної дифузії розчинних речовин за схеми плоско-вертикальної усталеної фільтрації з вільною поверхнею в умовах масообміну. В рамках вказаної неklasичної математичної моделі конвективної дифузії, що базується на рівнянні

$$\sigma \left(D_t^{(\alpha)} + \tau_q D_t^{(\alpha+1)} \right) C(x, y, t) = d \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - v_x \frac{\partial C}{\partial x} - v_y \frac{\partial C}{\partial y} - \gamma C, \quad (1)$$

$$(0 < \alpha \leq 1)$$

(v_x, v_y - проєкції вектору швидкості фільтрації на осі O_x та O_y , відповідно, σ - пористість середовища, $D_t^{(\alpha)}$ - оператор дробового диференціювання Капуто–Герасимова [2] за змінною t порядку $\alpha, (0 < \alpha \leq 1)$, γ - параметр масообміну, τ_q - параметр релаксації дифузійного потоку, C - концентрація розчинних речовин у рідкій фазі, d - коефіцієнт конвективної дифузії, x, y, t - геометричні та часова змінні, відповідно) задача моделювання дробно-диференціальної динаміки конвективно-дифузійного процесу у випадку плоско-вертикальної

усталеної фільтрації з вільною поверхнею з рік чи каналів (згідно фільтраційної схеми, наведеної в роботі [3, ст.155]) зводиться до розв'язання у області $G_z \times (0, +\infty)$ (G_z - фізична область течії) рівняння (1) за наступних крайових умов:

$$C|_{\gamma} = C_1, \quad \frac{\partial C}{\partial n}|_{\gamma_i} = 0, \quad C(x, y, 0) = 0, \quad C'_i(x, y, 0) = 0, \quad (2)$$

де C_1 - задана концентрація розчинних речовин на вході фільтраційного потоку з границею γ , γ_i ($i = 1, 2$) – границі області фільтрації, які є лініями течії, n - зовнішня нормаль до відповідної кривої.

Викладена скінчено-різницева методика отримання наближеного розв'язку крайової задачі (1), (2), що базується на застосуванні локально-одновимірного методу А.А. Самарського у канонічній області комплексного потенціалу фільтрації G_ω ($\omega = \varphi + i\psi$, $\varphi = \varphi(x, y)$ - потенціал швидкості фільтрації, $\psi = \psi(x, y)$ - функція течії). Розроблені паралельні алгоритми розрахунку задачі на кластерних системах, приведені результати тестування їх швидкодії та результати чисельних експериментів по моделюванню динаміки процесу, що вивчається, які дозволяють зробити низку висновків стосовно якісних особливостей формування полів концентрації розчинних речовин в рамках розглядуваної математичної моделі.

1. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics/* Eds. A. Carpinteri, F. Mainardi. –Wien: Springer Verlag, 1997. – P.223–276.
2. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. –Amsterdam: Elsevier, 2006. –523p.
3. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664с.

УДК 621.8:681.5

Н.І. Бойко

(Національний університет “Львівська політехніка”)

ТЕХНОЛОГІЇ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ У ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

Нейронні мережі ефективно працюють в умовах невизначеності та здатні вирішувати задачі адаптивного керування поведінкою складних систем. Адаптивні динамічні системи, які запрограмовані на досягнення задалегідь поставлених цілей у керуючих системах, визначають поведінку рекурентних нейронних мереж. Рекурентні нейронні мережі (РНМ) здатні приймати оперативні рішення в системах ситуаційного управління. Вони програмуються шляхом навчання на прикладах, які не потребують формального визначення цілей.

Рекурентна нейронна мережа – це динамічна система зі зворотними зв'язками. Стан її визначається вхідними сигналами, які залежать від попередніх станів мережі. Завдяки цьому РНМ має необмежений обсяг пам'яті, що дозволяє запам'ятовувати інформацію про вхід зі затримками за необмежений проміжок часу [2].

РНМ з невеликою кількістю елементів у дискретному просторі станів мають структуру одно-, дво- і максимум тривимірної решітки. Стан такої мережі характеризується сукупністю значень виходів її нейронів. Для їх математичного опису використовуються системи дистанційного керування (ДК) динамічних систем [4]. Якщо кількість елементів є великою, то вони переходять від дискретного простору станів до безперервного. Структуру РНМ моделюють неперервним середовищем з розподіленими параметрами. Динаміка таких нескінченновимірних в просторі керуючих систем описується спеціальними хвильовими рівняннями – рівняннями в частинних похідних або інтегрально-диференціальними рівняннями [6].

Для аналізу структури РНМ використовують різні методи, зокрема, метод в основі якого покладена теорія графів. Він полягає в обчисленні різних показників, таких, як матриця досяжності, шляхи, цикли, маршрути, кластерний індекс та ін. За допомогою цих показників можна приблизно оцінити взаємодію елементів в РНМ. Вони є динамічною системою, яка функціонує у дискретному або неперервному просторі значень часу [1]. У дискретному просторі значень виходів, зміна станів мережі може бути описана системою різнищевих або диференціальних рівнянь (1) [7]:

$$\begin{aligned} X[t + 1] &= g_1(X[t], U[t]); \\ \frac{dX}{dt} &= g_2(X, U), \end{aligned} \quad (1)$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – стан системи; n – розмірність системи; x_i – значення i -го виходу РНМ; U – вхідний вплив; g_1 та g_2 – функція і зображення відповідно, що описують залежності стану системи від попередніх станів і вхідного впливу (визначають еволюцію системи в часі).

Залежно від виду g_1 та g_2 РНМ належатиме до різного класу динамічних керуючих систем, класифікація яких частково збігається з класифікацією динаміки для вище наведеної РНМ. Однією із найважливіших класифікаційних ознак приналежності РНМ до класу лінійних або нелінійних динамічних управлінських систем є лінійність або не лінійність функцій g_1 та g_2 [7].

Однією з найбільш важливих властивостей НМ є можливість її навчання. Під навчанням розуміється процес налаштування параметрів НМ шляхом моделювання середовища, у яке її поміщено. Тип навчання залежить від способу налаштування цих параметрів. Для навчання в НМ, із зовнішнього середовища повинні надходити сигнали, що змінюють вільні параметри мережі на її реакцію на вхідні сигнали. Для низки випадків (певна структура РНМ і прості навчальні приклади) навчання має поліноміальну складність [1]. До РНМ застосовано твердження: “Чим складніше навчається машина, тим складніший алгоритм навчання”. Оскільки РНМ є набагато складнішими за звичайні НМ прямого поширення, то і алгоритми їх навчання є складнішими.

Складність і неефективність відомих алгоритмів навчання РНМ змушує шукати нові підходи та стратегії для використання їх обчислювальних можливостей. Одним з таких підходів є резервуарні обчислення (РО). Основна їх ідея полягає у використанні резервуара з широкою динамікою і потужними обчислювальними можливостями. Резервуар формується випадковим чином. Його переведення у потрібний динамічний режим функціонування (стан) здійснюється подачею відповідного неперервного сигналу на його вхід [3]. Резервуар формується таким чином, щоб для схожих вхідних сигналів цей стан був схожим, а для різних – ні. Вихід резервуара з'єднаний зі спеціальними пристроями – зчитувачами, які за станом резервуара вирішують завдання класифікації, прогнозування, кластеризації, тощо. Резервуар інтегрує у своєму стані динаміку вхідного образу, а зчитувачі його розпізнають.

Необхідність РО обґрунтовується тим, що статичні та динамічні моделі НМ є обмеженими. Використання цих моделей не дає змоги вирішити задачу розпізнання образів. Тому проблема навчання РНМ спонукала до пошуку нових підходів. Внаслідок цього виникли РО, що поєднують у собі динаміку РНМ та потужні можливості з навчанням статичних НМ.

Для формування резервуарів існує три базових способи [5]:

- використання загальних рекомендацій для створення “хороших” резервуарів, які не залежать від типу задачі – вибір топології, зв'язності, сили зв'язків, затримок;

- адаптація резервуара – навчання без вчителя з використанням прикладів вхідних даних: на глобальному рівні – резервуар формується так, щоб для заданих вхідних даних він перебував у потрібному динамічному режимі та володів необхідними властивостями (наприклад, поділу); на локальному рівні – самоорганізація резервуара з використанням правил синаптичної пластичності при подачі вхідних даних;
- навчання резервуара з учителем: для конкретного завдання генерується безліч резервуарів з різними параметрами, оцінюється якість розпізнавання для кожного резервуара і з них вибирається найкращий. У базовому варіанті резервуарні обчислення володіють універсальними обчислювальними можливостями в сенсі апроксимації довільних нелінійних динамічних систем із згасаючою пам'яттю. Якщо додати зворотні зв'язки зі зчитувача на резервуар, то з'являється можливість апроксимації систем з постійною пам'яттю, зокрема, машин Тюрінга. Зчитувачі є простими статичними навчальними машинами: зважена лінійна регресія, персептрон, k - найближчих сусідів, машини опорних векторів, статичні НМ.

Використання існуючих показників динамічних систем (наприклад, ентропії Колмогорова, фрактальної розмірності, показників синхронізації тощо) для визначення режимів функціонування РНМ, навіть для простих випадків хаотичних нейронних мереж, виявляється неефективним в силу специфіки використання динамічних режимів для вирішення задач обробки інформації. Тому для аналізу роботи складних РНМ доцільно використовувати методи кібернетичної фізики та методи з нових розділів нелінійної динаміки.

1. *Кей А.* Искусственные нейронные сети // Computerworld / *А. Кей* – 2001. – № 9. – С. 34 – 38.
2. *Комашинский В.И.* Нейронные сети и их применение в системах управления и связи / *В.И. Комашинский* – М.: "Горячая линия – Телеком", 2003. – 96 с.
3. *Назаров А.* Нейросетевые алгоритмы прогнозирования и оптимизации систем / *А. Назаров, А. Лоскутов* – С-Пб.: Наука и Техника, 2003. – 492 с.
4. *Терехов В.А.* Нейросетевые системы управления / *В.А. Терехов, Д.В. Ефимов, И.Ю. Тюкин, В.Н. Антонов* – С-Пб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1999. – 265 с.
5. *Handschin E.* Fault diagnosis in electrical energy systems using device-specific artificial neural networks // Eng. Intell. Syst. Electr. Eng. Commun / *E. Handschin, D. Kehlmann, W. Hoffman* – 1994. – Vol. 2, №. 4. – P. 255 – 262.
6. *Hsieh K.-R.* A Neural Network Model which Combines Unsupervised and Supervised Learning // IEEE Trans. on Neural Networks / *K.-R. Hsieh, W.-T. Chen* – 1993. – Vol. 4, №. 2. – P. 35 – 39.
7. *Trzynadlowski A.M.* Application of neural networks to the optimal control of three-phase voltage-controlled inverters // IEEE Trans. Power Electron / *A.M. Trzynadlowski, S. Legowski* – 1999. – Vol. 9, №.4. – P. 397 – 404.

УДК 519.6

А. Я. Бомба, М. В. Бойчура

(Рівненський державний гуманітарний університет)

**МЕТОД ПРИКЛАДЕНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
КОЕФІЦІЄНТНИХ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ**

Розглядаються процеси руху електричних зарядів в однозв'язній криволінійній області (пластинці – томографічному перерізі) G_z (рис.), обмеженій гладкою замкненою кривою $\partial G_z = \{(x, y) : x = \tilde{x}(\tau), y = \tilde{y}(\tau), 0 \leq \tau \leq 2\pi, \tilde{x}(0) = \tilde{x}(2\pi) = \tilde{x}_0, \tilde{y}(0) = \tilde{y}(2\pi) = \tilde{y}_0, \text{де } \tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau) \text{ – визначені неперервно диференційовані функції, } O(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \text{ – задана початкова точка відліку}\}$ (рис.), породжені діями різниці потенціалів $\varphi_*^{(p)}$ та $\varphi^{*(p)}$ ($\varphi^{*(p)} - \varphi_*^{(p)} > 0$) на заданих екіпотенціальних лініях $A_p B_p$ та $C_p D_p$, де A_p, B_p, C_p, D_p – відмічені точки на ∂G_z ; $B_p C_p$ та $A_p D_p$ – непроничні граничні лінії течій. В основі відповідної модельної задачі на відшукування функцій $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$ (потенціалів) та $\psi^{(p)} = \psi^{(p)}(x, y)$ (течій) для кожної (p -ї) із \tilde{p} ($1 \leq p \leq \tilde{p}$) інжекцій [4] за умови ідентифікації коефіцієнта провідності (КП) $\sigma = \sigma(x, y)$ [1–4] є такі співвідношення:

$$\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial x} = \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial y}, \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial y} = -\frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\varphi^{(p)} \Big|_{A_p B_p} = \varphi_*^{(p)}, \varphi^{(p)} \Big|_{C_p D_p} = \varphi^{*(p)}, \psi^{(p)} \Big|_{A_p D_p} = 0, \psi^{(p)} \Big|_{B_p C_p} = Q^{(p)}, \quad (2)$$

$$\int_{MN} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} = Q^{(p)}, M \in B_p C_p, N \in A_p D_p, \\ \varphi(M) \Big|_{B_p C_p} = \bar{\varphi}^{(p)}(M), \varphi(M) \Big|_{A_p D_p} = \underline{\varphi}^{(p)}(M), \\ \psi(M) \Big|_{A_p B_p} = \psi_*^{(p)}(M), \psi(M) \Big|_{C_p D_p} = \psi^{*(p)}(M). \quad (3)$$

Тут \bar{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі; M – біжуча точка відповідної кривої; функції $\bar{\varphi}^{(p)}(M)$, $\underline{\varphi}^{(p)}(M)$, $\psi_*^{(p)}(M)$, $\psi^{*(p)}(M)$ та повна витрата $Q^{(p)}$ – одержуються в результаті фізичних замірів; коефіцієнт $\sigma(x, y)$ представляємо або у вигляді єдиного для даної області

аналітичного виразу (многочлена $\sigma(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^k \alpha_{k-r,r} x^{k-r} y^r$ чи тригонометричного многочлена $\sigma(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_{k,r} (a_{k,r} \cos kx \cos ry + b_{k,r} \cos kx \sin ry + c_{k,r} \sin kx \cos ry + d_{k,r} \sin kx \sin ry)$, де $\alpha_{k,r}$, $a_{k,r}$, $b_{k,r}$, $c_{k,r}$, $d_{k,r}$, – шукані параметри; $\lambda_{k,r} = 0.25$, якщо $k = r = 0$, $\lambda_{k,r} = 0.5$, якщо $k = 0 \wedge r > 0 \vee k > 0 \wedge r = 0$, $\lambda_{k,r} = 1$, якщо $k, r > 0$), або «покусково» (як це зображено на рис., за відповідних умов спряження), або ж, коли деякі із однорідних ділянок збурюються функціями виду $\tilde{\sigma}(x, y) = \alpha(x - \bar{x})^{2l}(y - \bar{y})^{2l}$.

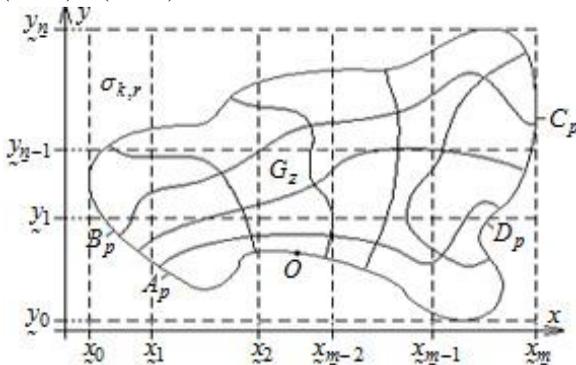


Рис. 1 Схема розбиття томографічного перерізу

При побудові алгоритмів розв'язання прямих задач та задачі ідентифікації використані ідеї, закладені у роботах [1 – 4].

1. Somersalo E. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography / E. Somersalo, M. Cheney, D. Isaacson // SIAM J. Appl. Math. – Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. – Vol. 52, № 4. – P. 1023–1040.
2. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу / А. Я. Бомба, С. С. Кауштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярошак. – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с.
3. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наукова думка, 2007. – 308с.
4. Бомба А. Я. Числовий метод квазіконформного відображення розв'язання задач ідентифікації коефіцієнта електричної провідності за даними томографії прикладених потенціалів / Л. Л. Крока, А. Я. Бомба // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Рівне : РДГУ, 2014. – Вип. 11 (20) – С. 24-33.

УДК 517.9

В. Г. Вавричук

(Львівський національний університет ім. І. Франка)

ЗАСТОСУВАННЯ SINC-АПРОКСИМАЦІЙ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

Конформними називаються такі відображення області, які зберігають кути між гладкими кривими, що перетинаються. Нехай $a, b \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$ і φ – конформне відображення області, що містить інтервал (a, b) , таке що $\varphi((a, b)) = \mathbf{R}$.

Визначимо клас функцій $\mathbf{L}_{\alpha,d}(\varphi)$, $\alpha > 0$, $d > 0$, таких що

- 1) $f \circ \varphi^{-1}$ асимптотично поводить ся, як $e^{-\alpha|x|}$ при $x \rightarrow \pm\infty$,
- 2) аналітичні в смузі $D_d(\varphi) = \{z \in \mathbf{C} : |\operatorname{Im} \varphi(z)| < d\}$.

Наприклад при апроксимації функцій на інтервалі $(0, \infty)$, які мають експоненційний порядок спадання при $x \rightarrow \infty$, може використовуватись конформне відображення $\varphi(z) = \log(\sinh z)$. Таке φ відображає смугу у комплексній площині (рис. 1а) у область $D_d(\varphi)$ при $d \leq \frac{\pi}{2}$ (рис. 1б).

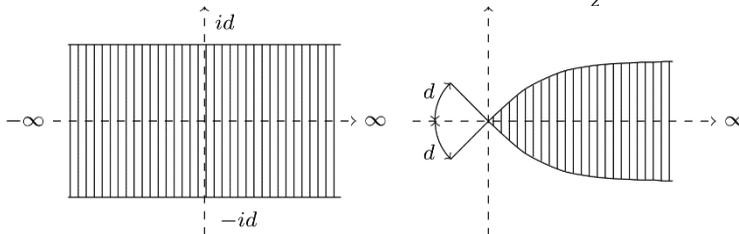


Рис. 1а

Рис. 1б

У даній доповіді розглядаються наближені методи, в основі яких лежить використання функції

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Такі методи можуть використовуватись для наближення різноманітних інтегралів [2, 3], у яких для вхідних даних f виконується $f/\varphi' \in \mathbf{L}_{\alpha,d}(\varphi)$. Перевагою sinc-методів є застосовність до необмежених інтервалів (a, b) та експоненційний порядок спадання похибки $O(\sqrt{M} \exp(-\sqrt{\pi d \alpha M}))$, де M відповідає кількості вузлів квадратури. За допомогою sinc-квадратур можна обчислювати інтеграли із особливостями у підінтегральній функції на кінцях інтервалу інтегрування, які компенсуються спеціально вибраним конформним відображенням. А sinc-згортки можна застосовувати до інтегралів, які мають особливість у ядрі, яка враховуватиметься

аналітично. Звичайно, sinc-методи не завжди будуть найоптимальнішим методом апроксимації, оскільки вони мають строгі вимоги на гладкість вхідних даних, а також, в деяких випадках інші квадратурні формули (тригонометричні, Гауса і т.д.) дозволяють досягнути меншої похибки.

Для прикладу за допомогою sinc-згорток обчислимо інтеграл

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0(|x-t|)}{\cosh t} dt, \quad (1)$$

де K_0 – модифікована функція Бесселя другого роду [1]. Враховуючи властивості підінтегральної функції, оптимальним буде зв'язок $h = \pi/\sqrt{2M}$ між параметрами дискретизації. Це правило балансує похибки спричинені кроком дискретизації h та тим, що значення підінтегральної функції, які використовуються у квадратурі, будуть з інтервалу $[\varphi^{-1}(-Mh), \varphi^{-1}(Mh)]$.

Для отримання вірцевих значень для $G(x)$ подамо (1), використавши інтегральний вираз [1] для функції Бесселя. Після нескладних перетворень отримаємо інтеграл із гладкою підінтегральною функцією

$$G(x) = \pi \int_0^{\infty} \frac{\cos(x\tau)}{\sqrt{\tau^2+1} \cosh(\pi\tau/2)} d\tau,$$

до якого можна застосувати sinc-квадратуру з параметрами $M = 1024$, $h = \sqrt{2/M}$.

У наступній таблиці наведено відхилення між значеннями функції $G(x)$ отриманими двома вище переліченими методами.

M	результати при $x = 1$
1	0.2413081948
4	0.0086738882
16	0.0000637190
64	5.9299614107E-9
256	8.6597395920E-15
1024	1.5543122344E-15

1. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. — John Wiley and Sons, Inc., 1972.
2. Stenger F. Handbook of sinc numerical methods. — CRC Press, 2011. — 463p.
3. Хапко Р., Вінтоняк Н. Про використання sinc-квадратур для наближеного обчислення інтегралів з різними типами особливостей // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. — 2006. — Т. 11. — С. 35–42.

УДК 627.324.2/3:532.72

А.П. Власюк⁽¹⁾, Т.П. Цветкова⁽²⁾⁽¹⁾Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. С. Дем'янука,⁽²⁾Національний університет водного господарства та природокористування)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЕЙ У ВИПАДКУ ОСУШЕННЯ НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНОГО ГРУНТОВОГО МАСИВУ ПРИ НАЯВНОСТІ ІНФІЛЬТРАЦІЇ

Досліджується водно-сольовий режим ґрунтового масиву у вигляді горизонтального пласта при його осушенні під дією вертикального дренажу з урахуванням інфільтрації. На початку дослідження рівень ґрунтових вод (РГВ) займає початкове положення, а з часом при осушенні – положення кривої депресії EF (рис. 1).

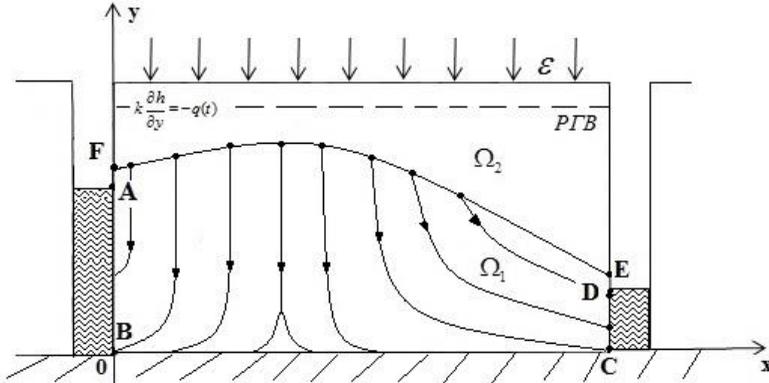


Рис. 1 Фільтрація сольового розчину між двома вертикальними дренами у випадку осушення ґрунтового масиву

Математична модель процесу осушення в областях фільтрації Ω_1 та вологоперенесення Ω_2 відповідно у загальноприйнятих позначеннях має вигляд [1]

$$\frac{\partial \left(D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right)}{\partial y} - v'_x(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} - v'_y(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma_1(c_1 - C^*) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1(c_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1(c_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = 0, \quad (2)$$

$$v'_x(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad v'_y(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} + v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y}, \quad (3)$$

$$h_1|_{EF} = y, \quad \left. \frac{\partial h_1}{\partial n} \right|_{BC} = 0, \quad h_1|_{AB} = H_1, \quad h_1|_{CD} = H_2, \quad h_1|_{AF} = y, \quad (4)$$

$$c_1(x, y, 0) = \tilde{C}'_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial c_1}{\partial n} \right|_{AB \cup BC \cup CD} = 0, \quad \left. \frac{\partial c_1}{\partial n} \right|_{DE} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_x(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} - v_y(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} - \gamma_2(c_2 - C^*) = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\mu(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) + f(x, y, h), \quad (7)$$

$$v_x(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x}, \quad v_y(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y}, \quad (8)$$

$$h_2(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), \quad h_2|_{EF} = y, \quad \left. \frac{\partial h_2}{\partial n} \right|_{FL \cup LK \cup KE} = 0, \quad k \left. \frac{\partial h_2}{\partial y} \right|_{y=0} = -q(t), \quad (9)$$

$$c_2(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial c_2}{\partial n} \right|_{FL \cup LK \cup KE} = 0. \quad (10)$$

На межі областей повного та неповного насичення (кривій депресії) задаються умови спряження для напорів, концентрації та потоків солей відповідно

$$h_1|_{EF} = h_2|_{EF}, \quad \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \Big|_{EF} = 0, \quad (11)$$

$$c_1|_{EF} = c_2|_{EF}, \quad v_1 c_1 - D_1 \frac{\partial c_1}{\partial n} = v_2 c_2 - D_2 \frac{\partial c_2}{\partial n}.$$

Для задачі (1)-(11) побудовано різницеву схему з використанням локально-одновимірного методу О.А. Самарського. Розроблено обчислювальний алгоритм та програмне забезпечення розв'язування крайової задачі, проведено серію чисельних експериментів та їх аналіз. В результаті чого встановлено положення вільної поверхні, розподіл поля напорів та концентрації солей в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві.

1. *Власюк А.П.* Математичне моделювання солеперенесення при сумісній нестационарній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при його осушенні / А.П. Власюк, Т.П. Цветкова // Тез. XXV Міжнар. наук. конф. "Прийняття рішень в умовах невизначеності". – Східниця, 2015. – С. 157-159.

УДК 531.8

В.Д.Вовк

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ГЕНЕРАЦІЇ ІНФОРМАЦІЇ ЗАСОБАМИ КЛІТИННИХ АВТОМАТІВ

Генерація інформації, як випадковий вибір з рівноможливих варіантів, є результатом виходу динамічної системи з шару перемішування з фіксацією вибору переходом до стійкого стану функціонування. У багатьох природних системах такий шар перемішування реалізується за рахунок просторової дифузії елементів, що призводить до ускладнення моделювання процесів генерації переходом до рівнянь з частковими похідними [1]:

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = \frac{1}{\tau_i} u_i - a_i u_i^2 - \sum_{i \neq j} b_{ij} u_i u_j + D_i \Delta u_i \\ u_i(0) = u_i^0 \ll 1, \quad i = 1, n \end{cases} \quad (1)$$

де u_i - концентрація елементів у системі з i -м типом інформації, τ_i - характерні часи авторепродукції, a_i, b_{ij} - коефіцієнти «тісноти» та конкуренції, D_i - коефіцієнти дифузії різнотипних елементів системи.

Особливістю моделей генерації інформації є потенційно тривале знаходження інформаційних систем (1) у шарі перемішування, що критично знижує ефективність класичних числових методик дослідження їхньої еволюції. В цьому випадку комп'ютерне моделювання, зокрема, з використанням техніки клітинних автоматів має низку переваг у якісному дослідженні довготривалих перехідних процесів у багатокомпонентних динамічних системах.

Для аналізу (1) застосуємо багатокомпонентний варіант неперервного клітинного автомата, кожна сота якого містить інформацію про концентрацію елементів усіх наявних типів. Правила переходу отримуються з підстановки в (1) найпростіших різницевих аналогів відповідних похідних:

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{x+\Delta x} - 2u_x + u_{x-\Delta x}}{(\Delta x)^2}$$

Відносячи $\Delta t = 1$ до одного кроку клітинного автомата, а $\Delta x = \Delta y = h$ - до просторових розмірів його клітини, отримаємо правила переходу у внутрішніх сотах:

$$(u_{xy}^{t+1})_i = \left(1 + \frac{1}{\tau_i}\right)(u_{xy}^t)_i - a(u_{xy}^t)_i^2 - \sum_{i \neq j} b_{ij}(u_{xy}^t)_i(u_{xy}^t)_j + \\ + D \left((u_{x+1,y}^t)_i + (u_{x-1,y}^t)_i + (u_{x,y+1}^t)_i + (u_{x,y-1}^t)_i - 4(u_{xy}^t)_i \right); \quad i = 1, n$$

Для сот на границі та в кутових точках:

$$\Delta u_{\text{ліва границя}}^t = u_{x+1,y}^t + u_{x,y+1}^t + u_{x,y-1}^t - 3u_{x,y}^t$$

$$\Delta u_{\text{л.в.кутова точка}}^t = u_{x+1,y}^t + u_{x,y+1}^t - 2u_{x,y}^t$$

Апробація вже настільки простого автомата продемонструвала всі оголошені в [1] етапи еволюції інформаційної системи:

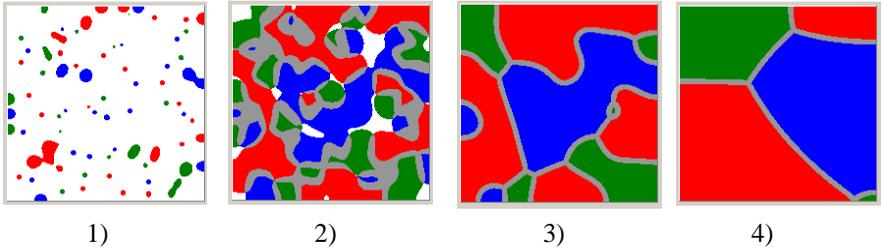


Рис. 1 Еволюція інформаційної системи

- 1) Утворення «чистих» областей (кластерів) з переважанням однотипних елементів; 2,3) розширення «чистих» кластерів на всю доступну область; 4) вирівнювання та згладжування границь між кластерами, витіснення «слабших» популяцій.

В [1] стверджується, що в моделі (1) за достатньо великий період часу система обов'язково перейде до одного з «чистих» станів. Втім, числове експериментування з клітинним автоматом показує, що все ж існують області параметрів, які забезпечують стабілізацію співіснування різнотипних інформаційних кластерів і навіть періодичну та хаотичну їхню динаміку.

1. *Чернавский Д.С.* Синергетика и информация (динамическая теория информации) — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 288 с.

УДК 519.624.2

О.В. Вовк⁽¹⁾, Г.А. Шинкаренко^(1,2)⁽¹⁾ Львівський національний університет імені Івана Франка,⁽²⁾ Політехніка Опольська)**ЗБІЖНІСТЬ h -АДАПТИВНОГО МСЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО
ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ ДИФУЗІЇ-АДВЕКЦІЇ-РЕАКЦІЇ**

У роботі побудовано та встановлено збіжність h -адаптивної схеми МСЕ для ефективного розв'язування двовимірних сингулярно збурених задач, які допускають наступне варіаційне формулювання

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_u\} \text{ такий, що} \\ a_\Omega(u, v) = \langle l_\Omega, v \rangle \quad \forall v \in V, \quad \Omega \subset \square^2, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\Omega(u, v) := \int_\Omega [(\mu \nabla u) \cdot \nabla v + v(\beta \cdot \nabla u + \sigma u)] dx + \int_{\Gamma_q} \alpha u v d\gamma, \\ \langle l_\Omega, v \rangle := \int_\Omega f v dx + \int_{\Gamma_q} g v d\gamma \quad \forall u, v \in V. \end{array} \right. \quad (2)$$

Дискретизація задачі (1)-(2) проводиться за схемою Гальоркіна з використанням лінійних скінченно-елементних апроксимацій, див. [5, 7]. Отримані СЛАР розв'язується GMRES з передобумовленням [7], а знайдена апроксимація розв'язку $u_h \in V_h \subset V$ використовується для обчислення АОП залишкового типу [2, 3, 5-7], як розв'язку такої задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } u_h \in V_h; \text{ знайти } e = u - u_h \in E, \quad V = V_h \oplus E, \text{ таку, що} \\ a_\Omega(e, v_h) = \langle \rho_\Omega(u_h), v_h \rangle \quad \forall v_h \in E, \\ \langle \rho_\Omega(w), v \rangle := \langle l_\Omega, v \rangle - a_\Omega(w, v) \quad \forall w, v \in V. \end{array} \right. \quad (3)$$

Остання дискретизується у підпросторі $E_h \in E$ з базисом $\{\phi_K\}_{K \in \mathfrak{T}_h}$, $\text{supp } \phi_K := \bar{K}$, $\phi_K \in E_h(K) := \{v \in H^1(K) : v(A_i) = 0 \quad \forall A_i \in K\}$, де A_i – вузли трикутника K . Внаслідок ортогональності цього базису апостеріорний оцінювач похибки e_h обчислюється на кожному K незалежно від сусідніх трикутників з триангуляції \mathfrak{T}_h

$$e_h|_K := e_K(x) = \lambda_K \phi_K(x) = \frac{\langle \rho_K(u_h), \phi_K \rangle}{a_K(\phi_K, \phi_K)} \phi_K(x) \quad \forall x \in K \quad \forall K \in \mathfrak{T}_h. \quad (4)$$

Підпростори $E_h \in E$ вибираються двома способами:

(i) $E^{Dir}(K) = \{v \in H^1(K) : v = 0 \text{ на } \partial K\}$ – простір індикаторів Діріхле;

(ii) $E^{Neu}(K) = \{v \in H^1(K) : v(A_i) = 0 \quad \forall A_i \in K\}$ – простір індикаторних функцій Неймана. За бази цих просторів вибрано:

$$\phi_K^{Dir} := 27L_1L_2L_3, \quad \phi_K^{Neu} := 3(L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1) \quad \forall K \in \mathfrak{T}_h, \quad (5)$$

де $\{L_i\}_{i=1}^3$ – барицентричні координати трикутника K . Особливістю АОП Діріхле e_h^{Dir} та Неймана e_h^{Neu} є те, що вони обчислюють верхню та нижню межі істинної похибки апроксимації МСЕ відповідно, див. [6].

Побудовані АОП покладені в основу критерію адаптування [3] h -адаптивного МСЕ: поділ K методом бісекції [5, 7] виконується, якщо

$$\tilde{\eta}_K := \sqrt{N} \|e_K\|_{1,K} \|u_h + e_h\|_{1,\Omega}^{-1} 100\% > TOL, \quad (6)$$

де $TOL = const > 0$ визначає допустимий рівень відносної похибки u_h .

Метод бісекції дає змогу будувати послідовність вкладених просторів апроксимацій МСЕ $\{V_k\}$, що є однією з виконання леми про квазіортогональність [4], на основі якої доведено наступну теорему

Теорема 1. (Про збіжність h -адаптивного МСЕ)

Нехай $\{u_k\}$ – послідовність апроксимацій МСЕ розв’язку лінійної задачі (1)-(2), яка відповідає послідовності скінченновимірних підпросторів $\{V_k\}_{k \in \square_0}$. Останні генеруються h -адаптивним МСЕ, схема якого подана у [5, 7]. Крім того виконуються умови леми про квазіортогональність [4], теореми у пункті 4 із [1] та нерівність

$$h_0^s < \frac{(1-\chi)^2}{C_\gamma \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)} (1+(1-\chi)^2)}, \quad s \in (0,1], \quad \chi \in (0,1), \quad (7)$$

де h_0 – діаметр стартової триангуляції \mathfrak{T}_0 .

Тоді справджуються нерівності

$$\|u - u_{k+1}\|_V^2 \leq \xi \|u - u_k\|_V^2, \quad \|u - u_{k+1}\|_V^2 \leq \xi^k \|u - u_0\|_V^2, \quad k \in \square_0, \quad (8)$$

з константою $\xi := C_0 - (1-\chi)^2 = (1 - C_\gamma h_0^s \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)})^{-1} - (1-\chi)^2$.

Для числового підтвердження теоретичних результатів розглянемо наступну сингулярно-збурену задачу з внутрішнім шаром

$$-10^{-3} \Delta u + (\beta_1, \beta_2) \cdot \nabla u = 0 \quad \text{в } \Omega = (0,1)^2, \quad u = u^{Ext} \quad \text{на } \Gamma = \partial\Omega, \quad (9)$$

де $\beta_1(x) = x_1 - 0.6$, $\beta_2(x) = x_2 - 0.3$. Точний розв’язок цієї задачі $u^{Ext}(x) = G[m\beta_1(x_1) + v\beta_2(x_2)]G[m\beta_2(x_2) - v\beta_1(x_1)]$, $m = \cos(\frac{1}{6}\pi)$, $v = \sin(\frac{1}{6}\pi)$,

$G(z) = \frac{1}{2}[1 + \text{erf}(z/\sqrt{2\mu})]$ характеризується критерієм Пекле $Pe \cong 806$.

Результати розв'язування (9) h -адаптивним МСЕ із заданим рівнем точності 1% та АОП Діріхле у критерії адаптування наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Збіжність h -адаптивного МСЕ, $TOL = 1\%$.

k	$Nod \mathfrak{Z}_h$	$Card \mathfrak{Z}_h$	ε_h^{Dir}	ε_h^{Ext}	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	p^{Dir}	p^{Ext}	p^{Neu}
1	25	36	275.522	90.698	325.897	2.5	3.0	-	-	-
2	49	72	265.420	89.817	408.112	2.9	4.4	-0.3	0.0	-1.1
3	85	144	182.343	77.469	369.408	2.2	4.4	1.3	0.4	0.5
4	169	288	118.535	61.281	304.725	1.9	4.8	1.1	0.7	0.4
...
8	1 215	2 336	8.908	14.823	33.323	0.6	2.2	2.9	1.6	2.7
9	1 787	3 480	4.454	9.437	16.949	0.5	1.8	3.5	2.3	3.4
10	2 841	5 575	3.105	7.366	11.920	0.4	1.6	1.5	1.1	1.5
11	4 758	9 402	1.954	4.727	7.532	0.4	1.6	1.8	1.7	1.8
12	8 072	16 007	1.386	3.745	5.356	0.4	1.4	1.3	0.9	1.3
13	13 693	27 240	0.973	2.512	3.764	0.4	1.5	1.3	1.5	1.3

Тут і далі $Nod \mathfrak{Z}_h$ – кількість вузлів сітки; $Card \mathfrak{Z}_h$ – кількість скінченних елементів триангуляції; $\kappa^a := \|e_h^a\|_{1,\Omega} \|e_h^{Ext}\|_{1,\Omega}^{-1}$ – індекси ефективності, $e_h^{Ext} = u^{Ext} - u_h$; $p^a := 2 \ln(\|e_{h,k}^a\|_{1,\Omega} \|e_{h,k+1}^a\|_{1,\Omega}^{-1}) (\ln(N_{k+1} N_k^{-1}))^{-1}$ – порядки збіжності; $\varepsilon_h^a := \|e_h^a\|_{1,\Omega} \|u\|_{1,\Omega}^{-1} 100\%$ – відносні похибки, $a = \{Dir, Ext, Neu\}$.

Таблиця 1 демонструє, що порядок збіжності h -адаптивного МСЕ для лінійних апроксимацій на трикутниках перевищує 1 і, при цьому, АОП Діріхле та Неймана обчислюють стабільні (в сенсі індексів ефективності) двосторонні оцінки істинної похибки ε_h^{Ext} .

Таблицю 1 та результати розв'язування задачі (9) на рівномірно-згущуваних трикутних сітках використано для побудови рис. 1. На останньому видно значну перевагу h -адаптивного МСЕ над класичним МСЕ при розв'язуванні сингулярно збуреної задачі (9).

Числові експерименти, див. напр. [3], також показують, що АОП Діріхле у критерії адаптування дає змогу будувати адаптивні сітки більш ефективно, ніж з АОП Неймана.

Отримані числові результати підтверджують, встановлені теоретично, збіжність, надійність та ефективність побудованого h -адаптивного методу скінченних елементів та показують перевагу останнього над класичними схемами МСЕ на рівномірних сітках.

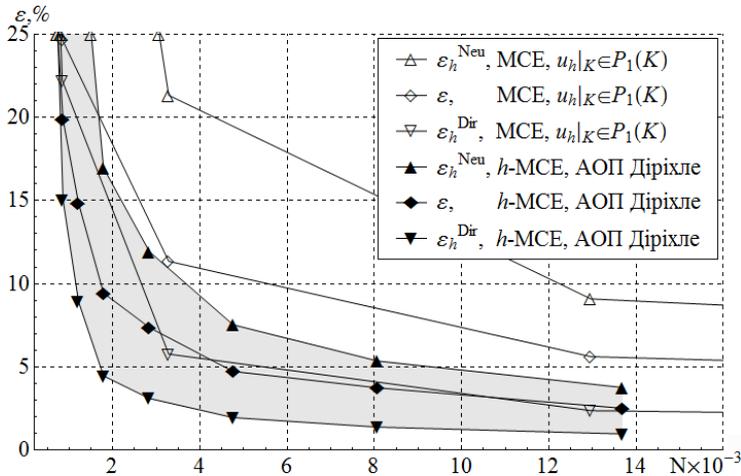


Рис. 1. Збіжність похибок лінійних апроксимацій MCE та їхніх АОП на рівномірних (MCE) і адаптивних сітках (h-MCE)

1. Вовк О. В. Апостеріорні оцінювачі похибки серендипових квадратичних апроксимацій MCE для еліптичних крайових задач / О. В. Вовк, Г. Квасниця, О. Ю. Остапов, Г. А. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикл. мат. та інф., 2014. – Вип. 21. – С. 67–78.
2. Babuška I. Finite Elements: An Introduction to the Method and Error Estimation / I. Babuška, J. R. Whiteman, T. Strouboulis. – New York: Oxford: University Press, 2011.
3. Kvasnytsia H. A. Computable double-sided a posteriori error estimates and h-adaptive finite element approximations. / H. A. Kvasnytsia, O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // Manufacturing Process. Actual Problems-2014. – Opole: Politechnika Opolska, 2014. – Vol. 1. – P. 87–102.
4. Mekchay K. Convergence of adaptive finite element methods for general second order linear elliptic PDE / K. Mekchay, R. Nochetto // SIAM J. Numer. Analysis. – 2002. – № 43. – P. 1803–1827.
5. Ostapov O. Yu. A posteriori error estimator and h-adaptive finite element method for diffusion-advection-reaction problems / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // Recent Advances in Computational Mechanics; T. Łodygowski, J. Rakowski, P. Litewka eds. – London: Taylor & Francis Group, 2014. – P. 329–337.
6. Ostapov O. Yu. Computable two-sided a posteriori error estimates for h-adaptive finite element method / O. Yu. Ostapov, O. V. Vovk, H. A. Shynkarenko // Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues. – Taylor & Francis Group, London, 2016. – P. 449–453.
7. Ostapov O. Yu. Finite element adaptive refinement techniques for diffusion-advection-reaction problems / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // Manufacturing Process. Actual Problems-2013. – Opole: Politechnika Opolska, 2013. – Vol. 1. – P. 31–46.

УДК 536.24

В.І. Гавриш, Р.Б. Тушницький

(Національний університет “Львівська політехніка”)

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ У ТЕРМОЧУТЛИВІЙ ПЛАСТИНІ З НАСКРІЗНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Особливого значення для виробництва мікроелектронних пристроїв набувають композитні матеріали, розроблення яких є однією з провідних проблем сучасного матеріалознавства. Серед композитних матеріалів важливе місце посідають структури з чужорідними включеннями, які широко застосовуються в конструкціях мікроелектронних пристроїв, зокрема в інтегральних сенсорах для моніторингу температури та вологості, світловипромінювальних елементах для динамічних світлодіодних підсвіток тощо. Оскільки наведені структури перебувають у широкому інтервалі температур, то їхні високі експлуатаційні параметри зумовлюють необхідність розгляду та розв'язування нелінійних задач внаслідок залежності теплофізичних характеристик матеріалів від температури конструкцій та умов теплообміну, від температури їхніх поверхонь, оскільки розрахунки температурних полів, виконані на основі лінійних математичних моделей процесів теплопровідності, не завжди дають задовільні результати [1]. Тому для розроблення найадекватнішої до реального процесу математичної моделі необхідно враховувати залежність теплофізичних характеристик матеріалів від температури, густини поверхневих потоків й інтенсивності внутрішніх джерел тепла, зміну форми тіла та можливі фазові та структурні перетворення [2, 3]. Деякі дослідження температурних режимів для конструкційних термочутливих елементів кусково-однорідної структури виконано раніше [4-7].

У зв'язку з цим розглянемо термочутливу ізотропну відносно теплофізичних параметрів пластину товщиною 2δ з теплоізованими лицевими поверхнями $|z| = \pm\delta$, яка містить чужорідне наскрізне включення довжиною $2h$, віднесена до декартової прямокутної системи координат $(Oxyz)$ із початком в центрі включення. В області включення $\Omega_0 = \{(x, -l, z) : |x| \leq h, |y| \leq l, |z| \leq \delta\}$ межевої поверхні $L_- = \{(x, -l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ пластини система нагрівається тепловим потоком, поверхнева густина якого дорівнює $q_0 = const$, а інша частина цієї поверхні пластини поза включенням і поверхня $L_+ = \{(x, l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ є теплоізованими. На межових поверхнях включення

$K_{\pm h} = \{(\pm h, y, z) : |y| \leq l, |z| \leq \delta\}$ існує ідеальний тепловий контакт

$$t_0 = t_1, \quad \lambda_0(t) \frac{\partial t}{\partial x} = \lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial x} \text{ для } |x| = h \text{ (0 – для включення, 1 – для пластини)}.$$

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(x, y)$ за просторовими координатами, який отримують, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності [8, 9]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, t) \frac{\partial t}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(x, t) \frac{\partial t}{\partial y} \right] = 0 \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$t \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=l} = 0, \quad \lambda_0(t) \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=-l} = -q_0 S_-(h - |x|), \quad (2)$$

де $\lambda(x, t) = \lambda_1(t) + [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] S_-(h - |x|)$ – коефіцієнт теплопровідності неоднорідної термочутливої пластини; $\lambda_0(t), \lambda_1(t)$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалів включення та пластини, відповідно;

$$S_{\pm}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \text{ – асиметричні одиничні функції [10].}$$

Введено лінеаризуючу функцію

$$g = \int_0^{t(x,y)} \lambda_1(\zeta) d\zeta + S_-(x+h) \int_{t(-h,y)}^{t(x,y)} [\lambda_0(\zeta) - \lambda_1(\zeta)] d\zeta + S_+(x-h) \int_{t(h,y)}^{t(x,y)} [\lambda_0(\zeta) - \lambda_1(\zeta)] d\zeta, \quad (3)$$

Після диференціювання якої за змінними x та y і деяких перетворень отримано рівняння

$$\Delta g + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\lambda_0(t) - \lambda_1(t) \right] \frac{\partial t}{\partial y} \right\} \Big|_{x=-h} S_-(x+h) - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\lambda_0(t) - \lambda_1(t) \right] \frac{\partial t}{\partial y} \right\} \Big|_{x=h} S_+(x-h) = 0. \quad (4)$$

і крайові умови

$$\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{y=l} = 0, \quad g \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{y=-l} = - \left\{ q_0 S_-(h - |x|) + \left[\lambda_0(t) - \lambda_1(t) \right] \frac{\partial t}{\partial y} \right\} \Big|_{\substack{x=-h \\ y=-l}} S_-(x+h) - \left[\lambda_0(t) - \lambda_1(t) \right] \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{\substack{x=h \\ y=-l}} S_+(x-h) \}. \quad (6)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат.

Лінеаризуюча функція (3) дала змогу звести нелінійну крайову задачу (1), (2) до частково лінеаризованого рівняння (4) з розривними коефіцієнтами з крайовими умовами (5), (6).

Апроксимовано функцію $t(\pm h, y)$ за змінною у виразом

$$t(\pm h, y) = t_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) S_-(y - y_j),$$

де $y_j \in]-l; l[$; $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n-1}$; n – кількість розбиттів інтервалу $] -l; l[$; t_j ($j = \overline{1, n}$) – невідомі апроксимаційні значення температури, а після цього підставлено у співвідношення (5), (6) і в результаті одержано лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними відносно лінеаризуючої функції

$$\Delta g = - \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) [\lambda_0(t_{j+1}) - \lambda_1(t_{j+1})] S_-(h - |x|) \delta'_-(y - y_j) \quad (7)$$

з крайовою умовою

$$\left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{y=-l} = -q_0 S_-(h - |x|). \quad (8)$$

Тут $\delta_{\pm}^{\pm} = \frac{dS_{\pm}}{dx}$ – асиметричні дельта-функції Дірака [10].

Крайову задачу (7), (8) розв'язано з використанням інтегрального перетворення Фур'є і розв'язок має такий вигляд:

$$g = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \sin h\xi \cos x\xi \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) [\lambda_0(t_{j+1}) - \lambda_1(t_{j+1})] \left[\frac{ch\xi(y+l)}{sh2\xi l} sh\xi(t - y_j) - \right. \right. \quad (9)$$

$$\left. \left. - ch\xi(y - y_j) S_-(y - y_j) \right] + \frac{q_0}{\xi} \frac{ch\xi(y-l)}{sh2\xi l} \right\} d\xi.$$

У результаті підстановки виразів температурної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалів пластини та включення у співвідношення (3), (9), після деяких перетворень отримують систему нелінійних рівнянь для визначення невідомих апроксимаційних значень температури t_j ($j = \overline{1, n}$).

Шукане температурне поле для наведеної системи визначають за допомогою отриманого нелінійного рівняння з використанням співвідношень (3), (9), після підстановки в них конкретних виразів залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури.

1. Саваторова В. Л. Решение уравнения теплопроводности в неоднородной среде с учетом температурной зависимости коэффициента теплопроводности / В. Л. Саваторова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – 17, № 1. – С. 135-137.

2. *Кудинов В. А.* Анализ нелинейной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения / В. А. Кудинов // Теплофизика высоких температур. – 2006. – 44, № 3. – С. 577-585.
3. *Кудряшов Н. А.* Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке / Н. А. Кудряшов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – 47, № 1. – С. 110-120.
4. *Гавриш В. І.* Моделювання температурних режимів у кусково-однорідних структурах / В. І. Гавриш, Д. В. Федасюк. – Львів : В-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2012. – 176 с.
5. *Гаврыш В. И.* Численно-аналитическое решение нелинейной стационарной задачи теплопроводности для бесконечной термочувствительной многослойной пластины / В. И. Гаврыш // Электронное моделирование. – 2014. – 36, № 3.– С. 59-70.
6. *Гавриш В. І.* Дослідження температурних режимів у термочутливій пластині з чужорідним наскрізним включенням / В. І. Гавриш // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Науковий збірник. – 2013. – Випуск 18. – С. 43-50.
7. *Гавриш В. І.* Нелінійна крайова задача теплопровідності для шаруваті пластині з включенням / В. І. Гавриш // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2015. – 51, № 3 – С. 32-38.
8. *Подстригач Я. С.* Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
9. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. – К.: Наукова думка, 1992. – 280 с.
10. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1977. – 720 с.

УДК 517:519.642

Я.С. Гарасим, Б.А. Остудін, Ю.В. Шунькін

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ
ПОТЕНЦІАЛУ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ НА КОМПАКТІ,
ЗАДАНОМУ У ВИГЛЯДІ РІВНОСТЕЙ**

У процесі математичного моделювання електростатичних полів, створюваних зарядженими електродами різної конфігурації та взаємного розташування, виникає необхідність чисельного розв'язування як прямих, так і обернених задач. До перших можна віднести задачі визначення електростатичного поля та його характеристик у будь-якій точці міжелектродного простору за відомими значеннями потенціалів на електродах. До других – відтворення граничних потенціалів та геометрії поверхонь - електродів за відомими характеристиками поля, що моделюється. Оскільки обернені задачі належать до класу некоректно поставлених, їх ефективне розв'язування пов'язане з відомими обчислювальними труднощами. Ситуація ускладнюється тим, що при застосуванні методу інтегральних рівнянь, як базового, для отримання високоточних розв'язків цих рівнянь необхідно враховувати особливу поведінку шуканої густини розподілу зарядів поблизу контурів розімкнених поверхонь - електродів [2, 3].

Для вирішення згаданої вище проблеми моделювання використовуємо комплексний підхід, який полягає у застосуванні так званих процедур аналізу та синтезу відповідних полів. Обмежуємось при цьому аналізом однієї модельної задачі. Метою її розв'язання є демонстрація можливостей ефективного відтворення граничних потенціалів за відомими значеннями в окремих точках осесиметричного простору.

Нехай S – незамкнена поверхня в \mathbf{R}^3 , обмежена кусково-гладким контуром скінченної довжини ∂S , тобто $\bar{S} := S \cup \partial S$. Припустимо, що S належить до класу поверхонь Ліпшиця. Розв'язок розглядуваної диференціальної задачі шукатимемо в необмеженій області $\Omega_S^- := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}$ за припущенням двосторонності S , а саме, необхідно знайти функцію $U \in H^1(\Omega_S^-, \Delta)$, яка задовольняє умови:

$$\Delta U = 0 \text{ в } \Omega_S^-, \quad (1)$$

$$\delta^\pm U = g_\pm \text{ на } S, \quad (2)$$

$$\lim_{|P| \rightarrow \infty} U(P) = 0, \quad P \in \mathbf{R}^3. \quad (3)$$

Тут $\delta^\pm : H^1(\Omega_S^-) \rightarrow H^{1/2}(S)$ – оператори сліду, а $g_\pm \in H^{1/2}(S)$ – задані функції з огляду двосторонності S . У цьому разі

$$H^1(\Omega_S^-, \Delta) := \left\{ U \mid U \in H^1(\Omega_S^-), \Delta U \in L_2(\Omega_S^-) \right\}.$$

Трактуючи (1)-(3) як математичну модель електростатичного поля, створюваного зарядженням електродом, змодельованим поверхнею S , припускаємо, що $g_- = g_+$. Суттєвим узагальненням задачі (1)-(3) є також припущення, що S утворюється сукупністю розімкнених поверхонь, тобто $S := \bigcup_{i=1}^{\nu} S_i$. Не зменшуючи загальності, розглядаємо осесиметричний варіант задачі (1)-(3). Для цього запроваджуємо циліндричну систему координат (z, r, φ) . Досліджуване поле не залежить від координати φ . Тому інформацію щодо форми заряджених електродів, змодельованих сукупністю розімкнених поверхонь S , задаємо параметричними зображеннями у напівплощині zr ($r > 0$) твірних L_i , які обертанням навколо осі Oz утворюють бічні поверхні S_i ($i = \overline{1, \nu}$) деяких циліндрів. Поза тим вважаємо заданими граничні значення потенціалів $U_0^{(i)}$ на L_i . Розв'язуючи пряму задачу, знаходимо розподіл потенціалу вздовж осі симетрії Oz , а далі здійснюємо відтворення граничних значень $U_0^{(i)}$, приймаючи до уваги можливі збурення отриманих на попередньому етапі результатів. Інакше кажучи, проводимо дослідження оберненої некоректної задачі [8].

Нехай $L_j := \{z_j(\tau), r_j(\tau), \tau \in \Delta_j := [\alpha_j, \beta_j]; j = \overline{1, \nu}\}$ – параметричне зображення j -ої твірної. Для наближеного розв'язування задачі (1)-(3) застосовуємо метод інтегральних рівнянь. У такому контексті

$$U(\bar{z}, \bar{r}) = \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\Delta_j} q_j(\tau) E_j(\tau; \bar{z}, \bar{r}) d\tau$$

інтегральне подання розв'язку прямої задачі в довільній точці півплощини zr ($r \geq 0$), $E_j(\tau; \bar{z}, \bar{r})$ – відомі в теорії потенціалу функції, $\{q_j(\tau)\}_{j=1}^{\nu}$ – шукана сукупна густина розподілу зарядів на $\bigcup_{j=1}^{\nu} L_j$. Припускаючи, що $(\bar{z}, \bar{r}) \in L_i$ ($i = \overline{1, \nu}$) – фіксована точка, тобто $\exists \bar{\tau} \in \Delta_i : \bar{z} = z_i(\bar{\tau}), \bar{r} = r_i(\bar{\tau})$, легко сформулювати так звані характеристичні задачі:

$$\sum_{j=1}^{\nu} \int_{\Delta_j} q_{kj}(\tau) E_{ij}(\tau, \bar{\tau}) d\tau = \delta_{ik} \quad (i, k = \overline{1, \nu}; \bar{\tau} \in \Delta_i), \quad (4)$$

де $\{q_{kj}(\tau)\}_{j=1}^{\nu}$ – шукана сукупна густина розподілу зарядів k -ої характеристичної задачі, δ_{ik} – символ Кронекера, $E_{ij}(\tau, \bar{\tau}) := E_j[\tau; z_i(\bar{\tau}), r_i(\bar{\tau})]$.

Поза тим

$$\begin{aligned}
E_j[\tau; \bar{z}, \bar{r}] &:= 4r_j(\tau) \left\{ [r_j'(\tau)]^2 + [z_j'(\tau)]^2 \right\}^{1/2} \bar{T}_j^{-1}(\tau) K[\bar{\eta}_j(\tau)], \\
\bar{T}_j(\tau) &:= \left\{ [r_j(\tau) + \bar{r}]^2 + [z_j(\tau) - \bar{z}]^2 \right\}^{1/2}, \\
\bar{\eta}_j(\tau) &:= [\bar{T}_j^2(\tau) - 4r_j(\tau)\bar{r}] \bar{T}_j^{-2}(\tau), \\
K(\bar{\eta}_j) &:= \sum_{s=0}^4 [a_s - b_s \ln(\bar{\eta}_j)] \bar{\eta}_j^s
\end{aligned}$$

апроксимація повного еліптичного інтегралу I-го роду (a_s, b_s – відомі коефіцієнти [7]).

Систему (4) (за умови фіксованого k) можна трактувати як певне інтегральне рівняння з логарифмічною особливістю в ядрі. Тому розв'язок такого рівняння, спираючись на фізичні міркування, доцільно вважати елементом декартового добутку модифікованих просторів Гьольдера:

$$\{q_{kj}(\tau)\}_{j=1}^v \in \prod_{j=1}^v H_{\mu_j}^*(\alpha_j, \beta_j).$$

У цьому разі

$$q_{kj}(\tau) \in H_{\mu_j}^*(\alpha_j, \beta_j) \Leftrightarrow q_{kj}(\tau) = \hat{q}_{kj}(\tau) / \omega_j(\tau),$$

де $\hat{q}_{kj}(\tau) \in H_{\mu_j}(\Delta_j)$ (простір неперервних функцій, що задовольняють умову Гьольдера з показником $\mu_j \in (0, 1]$), а $\omega_j(\tau) := (\tau - \alpha_j)^{n_j} (\beta_j - \tau)^{m_j}$ ($0 \leq n_j, m_j < 1$) [1, 6].

Для одержання наближеного розв'язку кожної характеристичної задачі застосовуємо метод Боголюбова-Крилова [5] (метод колокації із апроксимацією невідомої густини розподілу зарядів кусково-постійними базисними функціями). Слід зауважити, що в процесі чисельного розв'язування інтегрального рівняння з логарифмічним ядром розглядуваного типу виникає необхідність обчислення деяких невластних інтегралів. Для успішного вирішення цих проблем застосовуємо спеціальні заміни змінних, а також послаблення логарифмічної особливості за Канторовичем [4].

Розв'язуючи характеристичну систему (4), отримаємо зображення розв'язку i -ої крайової задачі:

$$U_i(\bar{z}, \bar{r}) = \sum_{j=1}^v \int_{\Delta_j} q_{ij}(\tau) E_j(\tau; \bar{z}, \bar{r}) d\tau \quad (i = \overline{1, v}),$$

а разом з цим розв'язок початкової задачі:

$$U(\bar{z}, \bar{r}) = \sum_{i=1}^v U_0^{(i)} U_i(\bar{z}, \bar{r}),$$

що дає можливість визначити значення потенціалу вздовж осі Oz : $\Phi_0(\bar{z}) = U(\bar{z}, 0)$.

Далі, для аналізу оберненої задачі, не зменшуючи загальності, припускаємо, що твірні L_i являють собою відрізки прямих паралельних Oz . З метою побудови дискретного аналогу $U_i(\bar{z}, 0)$ ($|\bar{z}| \leq C$) обираємо $N_j \in \mathbf{N}$ ($j = \overline{1, \nu}$) і покладаємо $h_j := (\beta_j - \alpha_j) / N_j$, $\tau_{k_j} := \alpha_j + h_j(2k_j - 1) / 2$ ($1 \leq k_j \leq N_j$), $\Delta_{k_j} := [\tau_{k_j} - h_j / 2, \tau_{k_j} + h_j / 2]$, тоді згаданий дискретний аналог набуває таке зображення:

$$\hat{U}_i(\bar{z}, 0) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k_j=1}^{N_j} q_{k_j}^{(i)} \int_{\Delta_{k_j}} E_j(\tau; \bar{z}, 0) d\tau,$$

де $q_{k_j}^{(i)} := q_{ij}(\tau_{k_j}) \approx q_{ij}(\tau)$, $\tau \in \Delta_{k_j}$. Відтворювану граничну умову $U_0^{(i)}$, трактуючи її як функцію, визначену на L_i , подаємо у вигляді:

$$U(\tau_{k_i}, r_i) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k_j=1}^{N_j} q_{k_j}^{(i)} \int_{\Delta_{k_j}} E_j(\tau; \tau_{k_i}, r_i) d\tau,$$

а набір невідомих параметрів $\{q_{k_j}^{(i)}\}$ знаходимо методом штрафних функцій [9], мінімізуючи функціонал:

$$F(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \dots, q_{N_1}^{(1)}, \dots, q_{N_\nu}^{(\nu)}) = \\ = \left\| \Phi_0(\bar{z}) - \sum_{i=1}^{\nu} U(\tau_{k_i}, r_i) \hat{U}_i(\bar{z}, 0) \right\|_{L_2(-C, C)}^2 + \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k_i=1}^{N_i-1} [U(\tau_{k_i+1}, r_i) - U(\tau_{k_i}, r_i)]^2,$$

де β – числовий параметр.

На підставі отриманих $\{q_{k_j}^{(i)}\}$ відтворюємо граничні значення потенціалу. Таким чином здійснюється регуляризація некоректної задачі на компактї [8], який у даному випадку доцільно задавати у вигляді рівностей.

1. Довгий С.О. Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія і застосування / С.О. Довгий, І.К. Ліфанов. – Київ: Наук. думка, 2004. – 510 с.
2. Дорошенко В.М. Чисельне знаходження оптимального розподілу граничних потенціалів та геометрії граничних поверхонь в задачах теорії потенціалу / В.М. Дорошенко, Г.П. Коваль, Л.В. Лазурчак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський національний університет. – 2008. – Вип. 1. – С. 103-112.
3. Ильин В.П. Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем / В.П. Ильин, В.А. Катешов, Ю.В. Куликов, М.А. Монастырский. – Новосибирск: Наука, 1987. – 192 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
5. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1952. – 696 с.

6. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
7. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
8. *Тихонов А.Н.* Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
9. Турчак Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

Мохамад Нурі Дурайд

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ВОЛОКОННОЇ ОПТИКИ ДЛЯ МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ

Волоконна оптика для мережесистем – це сучасна технологія, що постійно розвивається, тому дослідження в цій галузі є актуальними. У роботі проведено системний аналіз транспортування даних в бездротових комп'ютерних мережах, обґрунтовано вибір теоретичних підходів для дослідження, системи та мови моделювання. Розроблено концептуальну модель досліджуваних процесів. Розроблено алгоритм і програму для дослідження об'єкту на основі обраної моделі, яка складає експериментальну частину роботи. В результаті імітаційного моделювання було отримано залежності продуктивності мережі передачі даних від статистичних параметрів потоків повідомлень для кількох законів розподілу. Результати виконання проекту створюють передумови для використання даної технології. Вони можуть бути використані у процесі розробки мережевого устаткування та у діяльності адміністраторів комп'ютерних мереж.

В останнє десятиліття спостерігається величезне зростання в розгортанні широкосмугових мереж доступу по всьому світу. Поширення смуг пропускання доступу, пропонування технологій, таких як волокно до будинку (FTTH) призвело до багатьох нових веб-додатків, від традиційного пошуку до онлайн інтерактивних карт, соціальних мереж, офісного програмного забезпечення, потокового відео, мобільного Інтернету, і т.д.. Більшість з цих додатків freeof розряду працюють у центрах обробки даних, які є прозорими для кінцевих користувачів. Datacenter обчислення та потоковий контент стають все більш і більш популярним, і швидко зростають. Ця тенденція веде до трансформації нашого сучасного Інтернету.

УДК 519.7.691.3.06

Н.Д Гернет., П.С Кабелянц, В.Т Лисиця.

(Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна)

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ СТВОРЕННЯ ІНФОРМАЦІЙНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ ДІАГНОСТИКИ СКЛАДНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ЇХ ПОТОЧНИХ СТАНІВ

Розвиток кризових явищ в економічній, соціальній, екологічній сферах України обумовив підвищення інтенсивності виникнення проблемних ситуацій (ПС) в процесі функціонування підприємств, адміністративно-територіальних утворень, технічних комплексів, біологічних систем, людини. Це вимагає зменшення втрат суспільства шляхом своєчасного виявлення ПС, що виникають, їх розпізнавання, прийняття ефективних заходів для їх подолання, що потребує зменшення терміну отримання, підвищення достовірності результатів діагностики вказаних складних систем. У зв'язку з цим актуальним є створення ефективної уніфікованої інформаційної технології (ІТ) прискореної діагностики складних систем (СС) на основі сімейства їх інтегральних характеристик (ІХ), що формуються в процесі моніторингу процесів функціонування і розвитку СС.

Аналіз накопиченого досвіду діагностики економічних, технічних, соціальних, біологічних систем показує на можливість створення уніфікованої ІТ діагностики різнорідних складних систем на основі візуалізації їх поточних станів. Це обумовлено тим, що множина ПС, що виникають в процесі функціонування складної системи може бути частково впорядкована бінарним відношенням породження, що визначає корінні ПС і породжені ПС. У зв'язку з цим практично неможливо створити єдину математичну модель, що описує вплив корінної проблемної ситуації на стан складної системи. У той же час корінна ПС через множину породжених ПС впливає на траєкторію зміння ІХ функціонування і розвитку складної системи. Це створює об'єктивну основу для виявлення та класифікації корінних ПС, формування діагнозу для поточного стану складної системи.

Проведений аналіз результатів досліджень вчених [1-11] показує, що моделі, методи, інформаційні технології, які пропонуються, як правило, орієнтовані на вузький клас систем, задач діагностики, що вирішуються, і не можуть бути використані у повній мірі для динамічних складних систем інших класів. Вони не враховують загальних особливостей, властивостей економічних, технічних, соціальних, біологічних систем (синергетизм, взаємодію корінних і породжених ПС, механізми формування системних інтегральних характеристик і т.і.).

Складні економічні, технічні, соціальні, біологічні системи мають загальні ознаки (відкритість, ієрархічність, різноманітність елементів, багатокритеріальність, стохастичність, невизначеність, багатофункціональність, різноманітність форм існування), властивість емерджентності, що визначає системні ІХ функціонування і розвитку вказаних складних систем. Існуючі методи, моделі, ІТ діагностики орієнтовані на специфічні властивості СС вузького класу. Пропонується на основі узагальнення накопиченого позитивного досвіду діагностики економічних, технічних, соціальних, біологічних систем, урахування їх загальних системних властивостей розробити методи, моделі, ІТ діагностики складних систем на основі візуалізації їх поточних станів.

В якості основного підходу при розробці концепції ІТ обрано системний підхід до дослідження процесів діагностики СС, що передбачає одночасну реалізацію принципів системності, тривірневого розглядання, інтеграції, формалізації. У відповідності до системного підходу під ІТ діагностики СС розуміється інтегрований процес збирання, накопичення, збереження, обробки, передачі та подання даних при розв'язанні задачі діагностування СС на підґрунті візуалізації її поточного стану з використанням ефективних математичних методів, моделей, програмних і технічних засобів обробки інформації.

В якості діагностичної системи, яка реалізує ІТ, що створюється, пропонується сукупність підсистем: вибору та формування сімейства траєкторій змінення ІХ СС; формування множини та обчислення значень інформативних ознак (ІО) на основі інформаційного та геометричного аналізу сімейства ІХ системи; формування множини та обчислення значень ІО на основі інформаційного та спектрального аналізу сімейства ІХ системи; формування сімейства ІО, що використовуються при візуалізації поточного стану СС; формування зображення поточного стану СС; класифікація та розпізнавання ПС, які виникають при функціонуванні та розвитку СС; формування діагнозу і рекомендації щодо подолання ПС. Перераховані підсистеми створюють певну структуру, яка призначена для активного здійснення максимально достовірної діагностики СС. Відповідно до принципу тривірневого розгляду СС є одночасно системою та елементом. Це вимагає одночасного урахування в процесі діагностики СС станів їх внутрішнього і зовнішнього середовища. Реалізація принципу інтеграції вимагає забезпечення з єдиних системних позицій такої взаємодії підсистем діагностичної системи, такої якості результатів їх функціонування, які забезпечують найбільшу достовірність результатів діагностики СС. При реалізації принципу формалізації здійснюється заміна процесів функціонування діагностичної системи їх адекватними моделями, отримання на основі чисельних експериментів з моделями заданої ефективності системи діагностики СС.

Новизна підходу, який пропонується при створенні ІТ, полягає в тому, що при виборі системи інформативних ознак використовуються не тільки результати інфлюентного аналізу, а також результати інформаційного, аналітичного (геометричного і спектрального) аналізу обраного сімейства інтегральних характеристик функціонування та розвитку СС. Це дозволяє здійснити візуалізацію стану та діагностику як економічних, так і соціальних, технічних і біологічних систем.

Метою наукового дослідження є підвищення достовірності результатів діагностики складних економічних, технічних, соціальних, біологічних систем шляхом створення науково обґрунтованої ІТ діагностики СС на основі візуалізації їх поточних станів. Для досягнення вказаної мети необхідно вирішити наступні задачі.

Задача 1. Розробка методів, моделей формування сімейства інтегральних характеристик функціонування і розвитку складної системи.

Задача 2. Розробка методів, моделей визначення системи інформативних ознак на основі інформаційного і геометричного аналізу системи інтегральних характеристик функціонування і розвитку складної системи.

Задача 3. Розробка методів, моделей визначення системи інформативних ознак на основі інформаційного і спектрального аналізу системи інтегральних характеристик функціонування і розвитку складної системи.

Задача 4. Розробка методів, моделей візуалізації поточного стану складної системи.

Задача 5. Розробка методів, моделей класифікації та розпізнавання ПС, що виникають в процесі функціонування складної системи.

Задача 6 Створення алгоритмічної моделі інформаційної технології діагностики складних систем на основі візуалізації їх поточних станів.

Рішення задачі 1 на першому етапі передбачає формування переліку можливих інтегральних характеристик (ІХ) функціонування та розвитку економічних (прибуток, дохід, витрати, об'єм продукції, що реалізовано, трудові, інформаційні ресурси, фонди і т. і.), соціальних (чисельність населення, якість життя, доходи, споживання і т. і.), біологічних (маса, геометрія, енергія, структура і т. і.), технічних (залишковий ресурс, кількість відмов, витрати на ремонт і т.і.) систем. На другому етапі здійснюється відбір ключових інтегральних характеристик. При рішенні задачі 1 використовуються якісні та кількісні методи моделювання функціонування і розвитку складних систем.

Рішення задачі 2 передбачає визначення ІО на основі інфлюентного (швидкість, темп змінення, еластичність ІХ) і геометричного (кривина, кути візування та кути відображення, дзеркальні точки для випадкових повернь зображення СС) аналізу обраної системи ІХ функціонування та розвитку СС.

Рішення задачі 3 передбачає визначення ІО на основі сучасних методів спектрального аналізу обраної системи ІХ.

Рішення задачі 4 передбачає обирання базисної системи ІО, формування на їх основі двомірного зображення, що віддзеркалює поточний стан СС.

Рішення задачі 5 передбачає класифікацію ресурсних, організаційних, інформаційних ПС на основі їх зображень, діагностику ПС з використанням технології виводу, що базується на прецедентах.

Розв'язання задачі 6 передбачає створення алгоритмічної моделі ІТ діагностики СС на основі візуалізації їх поточних станів.

На закінчення доповіді розглядаються особливості реалізації ІТ за концепцією, що пропонується, при створенні інформаційної діагностичної системи.

1. Кузьмина Н.В. Диагностический подход к управлению предприятием в условиях неопределенности / Н.В.Кузьмина, Н.М.Ветрова // Інформаційні складові сучасних підходів до управління економікою : міжнародна колективна монографія / під заг. ред. Л.М.Савчук.- Донецьк: ЛОНДОН-XXI, 2013. – С. 228-239.
2. Кузьмина Н.В. Экономическая диагностика состояния предприятия: обоснование метода диагностирования / Н.В.Кузьмина, Н.М.Ветрова // Экономика и управление. — Симферополь, 2011. — №5. — С.134-138.
3. Лисицкий В.Л.,Фонта Н.Г.Визуализация проблемных ситуаций в процессе управления конкурентноспособностью предприятия. // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – Харьков.-2008. -№2/2 (32).
4. Лисицкий В.Л., Баранова Н.В. Информационная технология диагностического анализа текущего состояния развивающихся предприятий. // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – Харьков.-2011.-№3/4 (51)).
5. Орловский Д.Л. Диагностика проблемных ситуаций, возникающих при управлении прибылью предприятий, на основе их изображений. // Вести. НТУ «ХПИ».- X.; НТУ «ХПИ» 2002; № 13. – С. 91-98.
6. Щербань А.Б. Диагностика критически важных объектов на основе идентификационного структурного анализа их состояний. / Надёжность и качество сложных систем. – М.: 1(9), 2015. – С. 77-84.
7. Maghild Viste, Hanne-Louise Skartveit. Visualization of Complex systems. –The Two-Shower Model Bergen; PsychNology Journal, 2004. Volume 2, № 2. – P. 229-241.
8. Soils P. Kavulya, Kaustubh Joshi, Felicita Di Giandomenico, Piya Narasimhan. Failure Diagnosis of Complex Systems / Psilience assesment and evaluation of computing systems. Springerling; 2012. – P. 239-261.
9. J. A. TeMachado, Antonio M. Lopes, Alexandra M. Galhano. Multidimensional Scaling Visualization Using Parametric Similarity Indices. Entropy 2015; ISSN 1099-4300
10. United States Patents. Systems and Methods for Visualizing tissue during diagnostic or therapeutic procedures. David K .Swanson, David Mc Gee, Dorin Panescu, James G. Whyne, Harm TenHoff. 2009.
11. William B. Rose. Modeling and Visualization of complex systems and Enterprises. Exploration of physical, human, economic and social phenomena. Wiley&Sons; 2015. – 272 p.

УДК 658.7

І.В. Гоменюк, Л.П. Оксамитна

(Черкаський державний технологічний університет)

**ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ
ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ**

Серед різноманіття пошуків шляхів розвитку ринку, засобів виробництва, нових напрямків діяльності комерційно-посередницьких організацій і транспортних підприємств викликають значний інтерес наукові дослідження і практичні новації, поєднані поняттям логістики.

Протягом останніх років бурхливо розвиваються засновані на інформатиці нові логістичні технології. Інформаційні системи займають у цих технологіях центральне положення.

На сьогоднішній день інформаційне забезпечення транспортної логістики є однією з найбільш важливих і актуальних проблем. Інформація стає логістичним виробничим фактором [1].

Проблема створення та розвитку інформаційно-аналітичного забезпечення транспортної логістики все ще залишається малодослідженою. Функціонування інформаційних потоків в логістиці вимагає створення повноцінних логістичних інформаційно-аналітичних систем.

Багато сучасних науковців досліджували процеси формування транспортної логістики. Питання транспортної логістики ґрунтовно досліджуються у працях відомих вчених (Миротин Л.Б., Тишбаєв І.Е., Безель Б.П.), які розглядають дану проблему, ґрунтуючись на засадах розвиненої ринкової економіки. Але поява нових інформаційно-мережних технологій вимагає їхньої локалізації в транспортній системі для підвищення оперативності керування технологічними процесами. Останні дослідження в сфері логістичних процесів свідчать про стійке зростання українського ринку транспортно-логістичних послуг.

Динаміка розширення ринку транспортно-логістичних послуг, що спостерігається на сучасному етапі, відкриття нових логістичних терміналів, посилення суперництва між операторами сприяють зростанню потреби в комплексному вирішенні транспортно-логістичних завдань в цілях ефективнішого обслуговування клієнтів.

Дана робота присвячена дослідженню проблем використання інформаційно-аналітичних систем і технологій у транспортній логістиці.

Метою роботи є створення web-орієнтованого інформаційного ресурсу з транспортної логістики, який би надавав можливість користувачам (менеджерам та аналітикам підприємств) одержати інформацію про:

теоретичні основи інформаційно-логістичних систем в сучасних транспортних технологіях, їх переваги і недоліки, існуюче програмне забезпечення та особливості його застосування, посилання на інтернет-джерела з проблем аналітичного моделювання в дослідженнях логістичних систем, а також деякі інструменти для фінансового аналізу діяльності транспортних підприємств.

Поставлена мета обумовила необхідність вирішення наступних завдань:

- визначення сутності, завдання і сучасної концепції транспортної логістики;
- аналіз основних проблем логістики в розвитку транспортної інфраструктури;
- характеристика логістичного підходу до реалізації транспортних процесів та інформатизації логістичного забезпечення підприємств автотранспортної галузі;
- аналіз інформаційно-аналітичного забезпечення транспортної логістики;
- дослідження та аналіз програмного забезпечення транспортної логістики та методи його застосування;
- проектування та розробка інформаційно-аналітичної системи транспортної логістики.

Інформаційно-аналітичні системи у логістиці транспортних підприємств, як правило, являють собою автоматизовані системи управління логістичними процесами. Тому математичне забезпечення в інформаційних системах – це комплекс програм і сукупність засобів програмування, що забезпечує вирішення завдань управління матеріальними потоками.

Інформаційно-аналітичне забезпечення логістики в підприємствах транспортної галузі потребує і відповідного програмного забезпечення, за допомогою якого вся логістична система працювала б як одне ціле.

Створення багаторівневих автоматизованих систем управління матеріальними потоками пов'язане зі значними витратами, в основному в об'єкті розробки програмного забезпечення, котре, з одного боку, має забезпечити багаторівневі системи, а з іншого – ступінь її інтеграції. Через це при створенні автоматичних систем управління у сфері логістики необхідно досліджувати можливості використання порівняльно дешевого стандартного програмного забезпечення, виходячи з його адаптації до місцевих умов.

В сучасних умовах створені достатньо удосконалені пакети програм. Однак їх використання залежить від рівня стандартизації завдань, котрі необхідно вирішити при управлінні матеріальними потоками.

Нові завдання, які постають перед організаторами та керівниками транспортних підприємств, спонукають їх до створення інформаційної інфраструктури, яка дає змогу збирати, обробляти і трансформувати

інформацію, виходячи з конкретних потреб. Успішний процес функціонування передбачає ідентифікацію і стандартизацію джерел інформації, її обробку та передавання. Досягти цього можна шляхом створення комп'ютерної мережі виробництва.

На думку спеціалістів транспортної галузі, така інформаційна інфраструктура перетворює інформацію з допоміжного фактору в самостійну виробничу силу, яка в змозі, на відміну від інших факторів, швидко підвищити продуктивність праці й мінімізувати витрати виробництва. Тому, використання інформаційно-аналітичних систем у логістичній діяльності є невід'ємною складовою у розвитку транспортних підприємств та підвищенні його конкурентоспроможності на сучасному ринку.

Таким чином, інформаційно-аналітичне забезпечення транспортної логістики протягом останнього десятиріччя стало одним із важливіших напрямів діяльності транспортної галузі. Використання інформаційно-аналітичних систем та інформаційних технологій транспортної логістики надасть фахівцям потужний інструмент для прогнозування, вибору варіантів та аналізу майбутнього фінансового стану підприємства, моніторингу його поточного стану для прийняття своєчасних і адекватних управлінських рішень.

1. Сокур І.М. Транспортна логістика: навч. пос. [для студ. вищ. навч. закл.] / І.М. Сокур, Л.М. Сокур, В.В. Герасимчук. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 222 с.

УДК 519.63

Гомон К.О.

(Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів)

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ КОНСТРУКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Розглядається задача про напружений стан тіла, яке знаходиться під дією масових сил \mathbf{f} і поверхневих сил \mathbf{h} , що спричиняють внутрішні напруження $\boldsymbol{\sigma}$, переміщення $\delta\mathbf{d}$ і деформації $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Вважається, що тіло перебуває в умовах плоского напруженого стану чи плоскої деформації. Двовимірний об'єкт займає область $\Omega \subset R^2$ з границею Γ . За принципом віртуальних робіт маємо:

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta\mathbf{d}^T \mathbf{h} d\Gamma = 0 \quad (1)$$

Застосувавши апроксимацію МСЕ отримаємо:

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{N}^T \mathbf{f}) d\Omega - \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{h} d\Gamma = 0 \quad (2)$$

де $\delta\mathbf{d} = \mathbf{N}\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{u}$, \mathbf{N} – матриця базисних функцій, \mathbf{B} – матриця диференціювання. Оскільки співвідношення (2) виконується для довільних $\delta\mathbf{u}^T$, то

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{h} d\Gamma \right) = 0 \quad (3)$$

Враховуючи фізичну нелінійність матеріалу, напруження $\boldsymbol{\sigma}$ є нелінійною функцією деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}$ і, як наслідок, рівняння рівноваги (3) є нелінійні. Розглядається теорія пластичного течіння з лінійним зв'язком між нескінченно малими приростами напружень і деформацій:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4)$$

де \mathbf{D}_{ep} – матриця пружно-пластичності. Використовується асоціативний закон пластичного течіння з умовою пластичності Мізеса

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 3J_2 - \sigma_T^2 = 0, \quad (5)$$

де $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$ другий інваріант девіатора \mathbf{S} тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$, σ_T – напруження течіння, відоме для конкретного матеріалу.

У роботі [1] для розв'язування задачі пружно-пластичного деформування (1)-(5) розроблено ітераційні алгоритми методу декомпозиції області (МДО). Для розв'язування системи нелінійних рівнянь (3)

використовується метод Ньютона-Рафсона. У даній роботі пропонується підхід до паралельної реалізації МДО на n_p процесорах, суть якого полягає у використанні ідеї прямого методу з формуванням єдиної глобальної системи рівнянь для всієї області.

У випадку послідовного алгоритму всі етапи розв'язування виконуються послідовно: введення вхідних даних; побудова сітки МСЕ, обчислення локальних (елементних) матриць; формування матриць системи, розв'язування системи нелінійних алгебричних рівнянь. У даній роботі розроблено підхід, який дозволяє провести розпаралелення обчислень, починаючи від задання вхідної інформації для кожної підобласті, побудови сітки методу скінченних елементів, формування локальних матриць у кожній з підобластей, розв'язування системи лінійних рівнянь на кожній ітерації лінеаризації нелінійної задачі. Основна ідея такого підходу ґрунтується на представленні матриць і векторів для всієї області через локальні матриці та вектори для підобластей з використанням булевих матриць зв'язності, які відображають співвідношення між локальними степенями вільності та незалежними невідомими для всієї області. Локальні матриці та вектори для підобластей зберігаються на окремих обчислювальних вузлах, а обмін між вузлами здійснюється з використанням інформації про сусідні підобласті.

Відомо, що найзатратнішим (як за часом обчислень так і за використаною пам'яттю) елементом комп'ютерного моделювання задач міцності конструкцій є розв'язування системи лінійних рівнянь (СЛАР). Тому ефективність алгоритму розв'язування задачі в цілому визначається розробкою високопродуктивного методу паралельного розв'язування СЛАР. У даній роботі розроблено алгоритм розв'язування СЛАР на основі паралельного методу спряжених градієнтів (МСГ). Цей алгоритм дозволяє на кожному обчислювальному вузлі зберігати локальні матриці і вектори для кожної підобласті, а також локальні вектори в глобально розподіленому форматі, тобто з вкладом із сусідніх областей. Єдиний суттєвий обмін між вузлами виконується при формуванні локальних векторів у глобально розподіленому форматі. Ефективність цієї операції визначається способом розбиття області на підобласті, а також скінченно-елементною сіткою.

Апробація запропонованого підходу до розпаралелення обчислень у методі декомпозиції області проводилась на кластері Львівського національного університету імені Івана Франка. Дослідження проводились на одному (послідовний алгоритм), двох і чотирьох вузлах. У залежності від розміру задачі і структури сітки покращення часу обчислень становило від 2-3 до 10-14 разів.

1. Дияк І. Комп'ютерне моделювання локально нелінійних задач на основі методу декомпозиції області / І. Дияк, І. Макар // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 55-66.

УДК 593.3

Д.А. Дегтярьов

(Інститут транспортних систем і технологій НАН України «Трансмаг»)

**ВИЗНАЧЕННЯ ВПЛИВУ ДЕМПФІРУВАННЯ НА СПЕКТР
ВЛАСНИХ ЧАСТОТ ЗВ'ЯЗАНИХ ЗГИННО-КРУТИЛЬНИХ
КОЛИВАНЬ ЛОПАТЕЙ ВІТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК ЗА
ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Проектування та створення нових зразків вітроенергетичних установок(ВЕУ) є одним з ключових компонентів енергетичної безпеки України. Серед багатьох задач, які потребують вирішення, визначення власних частот коливань лопатей є важливим етапом аналізу динаміки конструкції. Загальний вигляд лопатей для установок з горизонтальною(ГО) та вертикальною(ВО) віссю обертання показано на рис.1.

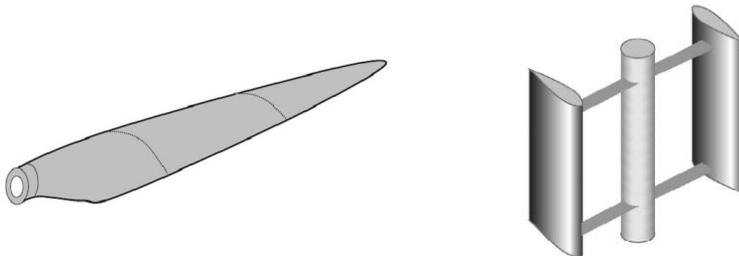


Рис.1 – Загальний вигляд лопатей вітроенергетичних установок з горизонтальною віссю обертання та вертикальною (роторів Дар'є)

Для даних типів конструкцій застосовуються розрахункові моделі балки змінної жорсткості, поперечний перетин якої має лише одну вісь симетрії, і тому її центри мас та жорсткості не співпадають. Це обумовлює взаємодію згинних та крутильних коливань через наявність плеча інерційних сил Δ - відстані між центрами мас та жорсткості, важливого параметру конструкції. Зазвичай лопаті виконані з композитних матеріалів, що мають високий рівень демпфірування. Треба зауважити, що для різних конструкцій лопатей застосовуються різні умови закріплення. Для ГО ВЕУ - це консольне закріплення, для ВО ВЕУ – закріплення двох опорах. Метою даного етапу досліджень є з'ясування впливу означених особливостей – інерційної взаємодії, демпфірування, змінної по довжині лопаті жорсткості – на спектр власних частот. Універсальність МСЕ дозволила поступово

ускладнити математичну модель, провести факторний аналіз та зробити висновки про вплив кожного чинника на власні частоти конструкції.

Лопаті було дискретизовано за допомогою десяти балочних скінченних елементів(рис.2), що має згинні(1,2,3,4) та крутильні(5,6) ступені свободи.

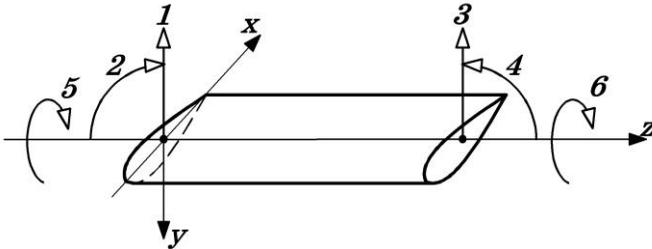


Рис.2 – Скінченний елемент та його ступені свободи

Матрицю жорсткості такого елемента \mathbf{K}_e було складено шляхом поєднання відповідних матриць жорсткості балочних елементів, що описують лише згин $\mathbf{K}_{зг}$ та кручення $\mathbf{K}_{кр}$. Ці матриці є загальновідомими та тут не наводяться. Матриця мас \mathbf{M}_e складалась з відповідних матриць мас балочних елементів, що описують лише згин $\mathbf{M}_{зг}$ та кручення $\mathbf{M}_{кр}$, та матриці інерційної взаємодії ступенів свободи \mathbf{M}_Δ , отриманої традиційним шляхом з виразу для кінетичної енергії елемента при апроксимації переміщень лінійними функціями форми.

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{зг} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{кр} \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{зг} & \mathbf{M}_\Delta \\ \mathbf{M}_\Delta^T & \mathbf{M}_{кр} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Часто при дослідженні зв'язаних згинно-крутильних коливань нехтують інерційною взаємодією, і тому вираз (2) для \mathbf{M}_Δ є маловідомим. Далі буде показано, що для систем з високим рівнем демпфірування нехтування інерційною взаємодією є неприпустимим.

Загальні матриці мас та жорсткості були сформовані за стандартними алгоритмами МСЕ з використанням матриці індексів. Згідно з граничними умовами з матриць мас та жорсткості було виключено ті стовпці та строки, що відповідають нульовим переміщенням. Після чого було складено характеристичну матрицю системи та вирішено загальну проблему власних значень, за якими було отримано спектр власних частот.

$$M_{\Delta} = 2m \cdot \Delta \cdot \begin{pmatrix} 7L/20 & 3L/20 \\ L^2/20 & L^2/30 \\ -3L/20 & 7L/20 \\ -L^2/30 & -L^2/20 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Порівняння отриманого спектру з парціальними частотами, розрахованими за інженерними методиками, для консольної лопаті постійного перетину та $\Delta = 0$ наведено в табл.1, частоти коливань цієї ж лопаті для різних Δ - в табл.2.

Таблиця 1. Перевірка моделі за МСЕ з аналітичними розв'язками

	Парціальні згинні частоти	Парціальні крутильні частоти	№	Частоти за МСЕ $\Delta = 0$	
1	22,520	40,558	1	26,942	1зг.
2	141,134	121,673	2	40,599	1кр.
3	395,179	202,789	3	122,802	2кр.
4	774,386	283,905	4	170,272	2зг.
5	1280,131	365,020	5	208,033	3кр.
	-	-	6	298,328	4кр.
	-	-	7	395,568	3зг.

Таблиця 2. Вплив інерційної взаємодії на частотний спектр консолі

$\Delta = 0.15$		$\Delta = 0.25$		$\Delta = 0.35$		$\Delta = 0.50$	
26,586	↓	26,048	↓	25,392	↓	24,347	↓
41,883	↑	44,188	↑	47,825	↑	56,908	↑
121,378	↓	119,444	↓	117,601	↓	117,518	↓
172,956	↑	176,036	↑	178,010	↑	178,042	↓
211,812	↑	220,608	↑	238,041	↑	274,311	↑
296,364	↓	293,425	↓	290,292	↓	303,546	↑
394,140	↓	392,084	↓	390,136	↓	395,221	↑

Отже, інерційний взаємозв'язок мало впливає на спектр частот.

Демпфірувальні властивості матеріалу лопатей було враховано за гіпотезою частотонезалежного тертя шляхом використання комплексних модулів пружності у вигляді.

$$E = E' + i \cdot k_E \cdot E' \quad G = G' + i \cdot k_G \cdot G' \quad (3)$$

де E', G' – модулі, що описують ідеально-пружну поведінку матеріалу, k_E, k_G – коефіцієнти, що описують явища в'язкості в матеріалі, тобто, фактично, зсув по фазі при наявності коливань. Для моделювання ідеально-пружних матеріалів зазвичай приймають $k_E, k_G = 0$, для слабодемпфіруючих $k_E, k_G = 0.01 \dots 0.1$, для в'язкопружних композитів

$k_E, k_G \approx 0.2$. МСЕ дає можливість задавати пружні характеристики кожного елементу індивідуально, що дозволяє аналізувати динамічні властивості конструкції при різних комбінаціях проектних параметрів. Результати такого аналізу наведені в табл.3, 4 та 5.

Таблиця 3. Значення декременту згасань для перших семи частот при різних значеннях уявної частини комплексного модуля пружності для консолі постійного перетину

k_G	Δ	Декремент згасань δ						
0	0,0	0,622	0	0	0,622	0	0	0,622
0	0,5	0,481	0,139	0,155	0,182	0,118	0,240	0,084
0,1	0,5	0,552	0,382	0,391	0,404	0,372	0,432	0,356
k_E	0,5	0,622	0,622	0,622	0,622	0,622	0,622	0,622

Таблиця 4. Спектр частот та декременти згасань для консолі змінного перетину (кінцева жорсткість менша на 50% за корневу)

$\Delta = 0$		$\Delta = 0.5$			0,622
$k_E = k_G = 0$	$k_E = k_G = 0$	$k_E = 0.2, k_G = 0$		$k_E = k_G = 0.2$	
32,836	30,791	30,925	0,509	30,791	
46,130	53,778	53,707	0,114	53,778	
124,907	118,820	119,238	0,094	118,820	
181,083	187,853	189,280	0,215	187,853	
209,180	244,733	243,630	0,333	244,733	
298,956	290,072	290,486	0,043	290,072	
395,780	390,072	390,350	0,030	390,038	

Таблиця 5. Вплив інерційної взаємодії на частоти коливань (перші 2 частоти та декременти згасань) балки на двох опорах

	$k_E = k_G = 0$		$k_E = 0.2, k_G = 0$		$k_E = k_G = 0.2$
$\Delta = 0$	204,128	726,740	0	0,622	0,622
$\Delta = 0.5$	208,033	592,277	0,023	0,174	

Отримані результати дають можливість зробити наступні висновки

1. Наявність інерційної взаємодії призводить по перерозподілу дисипації енергії коливань по всім ступеням свободи навіть тоді, коли матеріал у даному напрямку не має демпфіруючих властивостей, або присутня їх анізотропія.

2. Навіть в конструкціях з високодемпфіруваних матеріалів можливе виникнення вищих форм коливань, за якими декремент згасання дуже малий, що для об'єктів із широкополосним збудженням, якими є лопаті ВЕУ, не є припустимим.

УДК 17.958:519.65

І. Дияк

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

h-АДАПТИВНА СХЕМА МСЕ ДЛЯ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ Т-СПЛАЙНІВ

Адаптивна перебудова сітки та апостеріорна оцінка точності розв'язків це передові дослідження в розвитку МСЕ та МГЕ та впровадження їх у комерційні комп'ютерні комплекси. У більшості застосувань критерій адаптивності одинаковий або подібний як для МСЕ так і МГЕ.

Апостеріорна оцінка точності використовується для проведення локального подрібнення сітки, що дає можливість зосередити комп'ютерні потужності в необхідній зоні [5].

Найпопулярніший критерій оптимальності сітки базується на рівномірному розподілі похибки, тобто вважається, що сітка оптимальна, якщо глобальна похибка є рівномірно розподіленою по всіх елементах.

Індикатор похибки в ідеалі повинен бути: ефективним, універсальним і легко обчислювальним. Тобто, він повинен відтворювати розподіл похибок і застосовуватися до широкої множини апроксимацій. Серед найвідоміших індикаторів, які широко застосовуються для скінченно-елементних апроксимацій слід відзначити:

- індикатори, що базуються на залишковій основі;
- індикатори, що базуються на ієрархічних базах;
- індикатори, що базуються на постпроцесінгу наближених розв'язків;
- індикатори, що базуються на побудові розв'язків спряжених задач (мета – орієнтовані апостеріорні оцінювачі).

Тут ми розглядаємо адаптивну схему МСЕ для задачі теорії пружності, що базується на використанні запропонованого нами оцінювача. Ідея побудови оцінювача, який би базувався на використанні чисельних розв'язків отриманих різними методиками запропонована нами у [1,2]. У нашому випадкові при використанні ізопараметричних чотирикутників при подрібненні сітки проблему “вісячих” вузлів вирішували з використанням мортарних функцій [2,3].

Т-сплайни уведені у роботу [5] є узагальненнями NURBS (Non – Uniform Rational B-Splines). Моделювання складних об'єктів з використанням Т-сплайнів можливе на основі опису однієї геометрії зі здатністю до локального подрібнення. При цьому Т-сплайни вимагають використання набагато меншої кількості контрольних точок, ніж NURBS. Т-сплайни дозволяють ввести Т-з'єднання, які зв'язують “вісячі” вузли зі стандартної процедури МСЕ [4].

Графічно Т-сітку можна відобразити в параметричному просторі, індексному просторі, або індексно-параметричному, як показано на Рис.1.

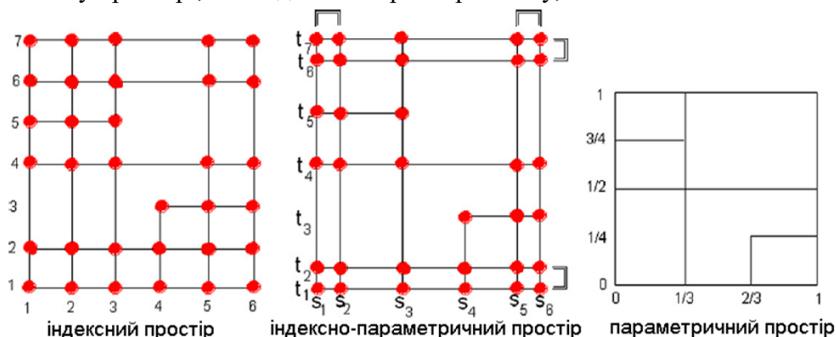


Рис.1

Одним з недоліків використання Т-сплайнів є вимога, що при подрібненні структура початкового розбиття повинна бути збереженою. У найгірших випадках це приводить до втрат переваг при використанні Т-сплайнів [4]. Гостро стоять питання, щодо лінійної незалежності Т-сплайнів і характеристик відповідних функціональних просторів. У роботі [4] показано, що лінійну незалежність при локальному подрібненні можна отримати використовуючи обмежену множину з відповідних Т-сплайнів.

1. Дияк І.І. Адаптивний алгоритм для задачі теорії пружності на основі гібридних апроксимацій.//Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.- 1998.- Вип. 50. – с.78-81.
2. Dyyak I.I. FEM-BEM based error estimator in elasticity problems/ Dyyak I.I. Matysiak S., Yashchuk Y. // 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics. Short Papers. – Publishing House of Warsaw University of Technology, Warszawa, 2011.–P.175-176.
3. Prokopyshyn I. I. Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity./Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2013. – 91. – P. 647–654.
4. Schillinger D. Adaptive Hierarchical Refinement of NURBS, Immersed Boundary Methods, and T-spline CAD Surfaces. /Schillinger D., Dede L., Scott M. A., Evans J. A., Borden M. J., Rank E., Hughes T. J. R./ ICES REPORT 12-05. January 2012. The Institute for Computational Engineering and Sciences. The University of Texas at Austin. – 60p.
5. Sederberg T.W. T – splines and T – NURCCS./ Sederberg T.W., Zheng J., Bakenov A., Nasri A.// ACM Transactions on Graphics. – 2003.Vol.22, No.3. – P.477–484.

УДК 681.518:004:657

В.М.Домрачев, Р.І.Костецький, О.В.Ляховська

(SAS – Україна, ПВНЗ «Європейський університет»)

ЗАСТОСУВАННЯ ІНСТРУМЕНТІВ SAS ENTERPRISE MINER ДЛЯ АНАЛІЗУ ДІЯЛЬНОСТІ БАНКІВ

Фінансова криза не зменшила дисбалансів в українській банківській системі, як і взагалі у світовій економіці. Політична криза в Україні, продовження бойових дій на Донбасі, неотримання чергових траншів допомоги МВФ призвели до подальшого зростання ризиків у банківській системі України. Перед центральним банком стоїть задача стабілізації фінансової системи країни. Інструментом вирішення цієї задачі є розробка та запровадження заходів обмеження ризиків діяльності банків. Для обмеження ризиків діяльності банків Національним банком було запроваджено вимоги дотримання банками економічних нормативів. Ці нормативи встановлюють граничні значення для більшості банківських ризиків. Граничні значення, які встановлені у інструкціях Національного банку, довгий час залишаються незмінними і вже не відповідають поточній економічній ситуації [1-3]. Тому необхідно застосовувати більш гнучкі засоби регулювання банківської системи, які базуються на сучасних інструментах аналізу фінансового ринку, зокрема які відносяться до інтелектуального аналізу даних, таких як різні методи класифікації, кластерний аналіз, нейронні мережі, тощо.

Аналіз стану банківської системи та окремого банку є важливою задачею. Проаналізуємо окремі показники діяльності банків з використанням кластерного аналізу. Проаналізовано дані діяльності українських банків за перше півріччя 2016 року [4].

Кластерний аналіз є частиною класифікаційних методів. Кластерний аналіз (англ. Data clustering) — задача розбиття заданої вибірки об'єктів (ситуацій) на підмножини, що називаються кластерами, так, щоб кожен кластер складався з схожих об'єктів, а об'єкти різних кластерів істотно відрізнялися [5].

Застосування кластерного аналізу передбачає наступні етапи:

- відбір вибірки для кластеризації, у нашому випадку це банки.
- визначення характеристик, по яких будуть оцінюватися об'єкти у вибірці, ми обираємо показники рентабельності активів та капіталу, а також показник достатності капіталу.
- обрання методу обчислення значень міри схожості між об'єктами, застосування методу кластерного аналізу, який зветься метод К-середніх.

Кластеризація методом *k*-середніх (англ. *k*-means clustering) — впорядкування множини об'єктів в порівняно однорідні групи. Мета методу — розділити *n* спостережень на *k* кластерів, так щоб кожне спостереження належало до кластера з найближчим до нього середнім значенням [9]. Принцип алгоритму полягає в пошуку таких центрів кластерів та наборів елементів кожного кластера при наявності деякої функції *F*, що виражає якість поточного розбиття множини на *k* кластерів, коли сумарне квадратичне відхилення елементів кластерів від центрів цих кластерів буде найменшим:

$$E = \sum_{i=1}^k \sum_{p \in C_i} (p - m_i)^2$$

де *k* – заздалегідь вказана кількість кластерів, *C_i* – отримані кластери, *m_i* – центри відповідних кластерів.

Класифікаційні методи, зокрема кластерний аналіз реалізовані у більшості сучасних програмних аналітичних пакетах, таких як SAS, SPSS, Stata, Matlab, Statistica, тощо. У роботі для аналізу використано програму SAS Enterprise Miner [5, 6].

Розгляд обмежимо показниками рентабельності банків, які є важливими для акціонерів банку та його вкладників та показником достатності капіталу, який є одним з найважливіших у процесі регулювання діяльності банку (не менше 10 %).

Кластерний аналіз показників рентабельності активів та рентабельності капіталу (задня стислості наведемо дані рентабельності капіталу):

Таблиця 1. Значення центрів кластерів рентабельності капіталу

Final Cluster Centers										
	Cluster									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Рентабельність капіталу	-112.2	2.6	-1794124624.0	197027102380.0	-3340.9	51.6	-952003438208.0	-249.0	215426394156.0	-1012.5

Результати кластерного аналізу показників рентабельності активів та рентабельності капіталу (таб.1) свідчать про виважену стратегію отримання прибутку банками з іноземним капіталом, більшість яких попали у спільний кластер №6.

Таблиця 2. Значення центрів кластерів

Final Cluster Centers										
	Cluster									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
достатність капіталу	10.6	99.7	61.3	48.9	71.6	90.6	39.5	16.4	26.8	-8.1

Результати кластерного аналізу показників достатності капіталу свідчать про виважену стратегію банками підтримки показника Н2 вище встановленого значення не менше 10 %. Таблиця 2 свідчить про можливість (необхідність) перегляду критичних значень економічних нормативів (зокрема показника Н2), які регулюють банківську діяльність [3].

Висновки. Під час сучасної кризи в Україні, пов'язаною з російською агресією проти України, відбулося значне підвищення ризиків банківської діяльності. Національному банку необхідно розробити інструменти підтримки банків і посилити протидію зростанню ризиків, стабілізувати валютну політику, розробити та запровадити нові механізми кредитування економіки, закрити канали відтоку капіталу.

Найбільш виважену стратегію управління ризиками проводять банки за частю іноземного капіталу.

Методи Data Mining, зокрема кластерний аналіз, є потужними інструментами аналізу показників діяльності банків, збільшення кількості кластерів у методі k-середніх дозволяє покращити якість аналізу і виявляти аномальну поведінку окремих банків.

1. Кредитування та ризики: Навчальний посібник з шифром МО України / *М.П.Денисенко, В.М. Домрачев*. та ін. – К.: Видавничий дім “Професіонал”, 2008. – 480 с.
2. *Домрачев В.М.* Методи оцінки банком ризиків кредитування окремих галузей економіки України / *В.М. Домрачев* // Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України: зб. наук. праць. – 2011. – Т. 31.– С. 63–70.
3. *Домрачев В.М.* Щодо регулювання діяльності комерційних банків в Україні / *В.М.Домрачев, К.С. Раєвський, Ю.М. Гудзь* // Економіка і управління, №3, 2014, с. 120 – 129.
4. Національний банк України [електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.bank.gov.ua>. – Дата звернення: 2016 р.
5. *George Fernandez*. Statistical Data Mining Using SAS Applications / *Fernandez George* – CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010. – 466 р.
6. *Терентьев А.Н.* SAS base основы программирования / *А.Н.Терентьев, В.М.Домрачев, Р.И. Костецкий*. – К.: Эдельвейс, 2014. - 304 с.

УДК 519.85

О.О.Ємець⁽¹⁾, Т.М.Барболіна⁽²⁾⁽¹⁾Полтавський університет економіки і торгівлі,⁽²⁾Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г.Короленка)**ВЛАСТИВОСТІ ЕКСТРЕМАЛІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ НА ЗАГАЛЬНІЙ МНОЖИНІ РОЗМІЩЕНЬ**

Актуальним напрямком теорії оптимізації є вивчення оптимізаційних задач із обмеженнями комбінаторного характеру. Дослідження таких задач здійснюється, зокрема, в рамках евклідової комбінаторної оптимізації (відповідну термінологію вживатимемо переважно з [1]). У доповіді розглядається розв'язування безумовної задачі мінімізації дробово-

лінійної функції $\Phi(x) = \frac{\sum_{j=1}^k c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^k d_j x_j + d_0}$ на розміщеннях, тобто задачі

знаходження пари $\langle \Phi(x^*), x^* \rangle$ такої, що

$$\Phi(x^*) = \min_{x \in E_\eta^k(G)} \Phi(x), \quad x^* = \arg \min_{x \in E_\eta^k(G)} \Phi(x), \quad (1)$$

де $x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k$, $c_j, d_j \in R^1 \quad \forall j \in J_k^0$ (тут і далі $J_r^s = \{s, s+1, \dots, r\}$), $E_\eta^k(G)$ — загальна множина розміщень з елементів мультимножини $G = \{g_1, \dots, g_\eta\}$. Вважатимемо, що $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k$ і для довільного

$x \in E_\eta^k(G)$ виконується нерівність $\sum_{j=1}^k d_j x_j + d_0 > 0$.

У [2] запропоновано метод розв'язування задачі (1), в основі якого лежить перебір вершин деякого многогранника, проте теоретичні оцінки алгоритму не одержані. У даній доповіді пропонується поліноміальний метод, який ідейно близький до параметричного методу розв'язування задач дробово-лінійного програмування.

Нехай функція $\varphi(x, \lambda) = \sum_{j=1}^k x_j \bar{c}_j(\lambda)$, де $\bar{c}_j(\lambda) = c_j - \lambda d_j$. Разом із

задачею (1) розглянемо задачу мінімізації на множині $E_\eta^k(G)$ функції $\varphi(x, \lambda)$ при певному значенні λ : знайти $\langle \varphi(x^*, \lambda), x^* \rangle$ таку, що

$$\varphi(x^*, \lambda) = \min_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^k x_j \bar{c}_j(\lambda), \quad x^* = \arg \min_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^k x_j \bar{c}_j(\lambda). \quad (2)$$

Як показано в [3], якщо для мінімалі в задачі (2) виконується співвідношення $\varphi(x^*, \lambda) = \lambda d_0 - c_0$, то $\langle \lambda, x^* \rangle$ — розв'язок задачі (1).

Якщо елементи мультимножини G упорядковані за неспаданням, а коефіцієнти функції $\varphi(x, \lambda)$ при певному λ задовольняють умову

$$\bar{c}_{q_1}(\lambda) \geq \bar{c}_{q_2}(\lambda) \geq \dots \geq \bar{c}_{q_h}(\lambda) > 0 \geq \dots \geq \bar{c}_{q_k}(\lambda) \quad \forall \lambda \in I(t), \quad (3)$$

то, як випливає з [1], одна з мінімалей функції $\varphi(x, \lambda)$ на множині $E_\eta^k(G)$ задовольняє умови

$$x_{q_j}^* = g_j \quad \forall j \in J_h^1, \quad x_{q_j}^* = g_{\eta-k+j} \quad \forall j \in J_k^{h+1}. \quad (4)$$

Проте при іншому значенні λ упорядкування коефіцієнтів може змінитися, точка (4) не буде мінімаллю в задачі (2).

Для всіх $i \in J_{k-1}^1$, $j \in J_k^{i+1}$ визначимо величини

$$\alpha(i, j) = \begin{cases} \frac{c_i - c_j}{d_i - d_j}, & \text{якщо } d_i \neq d_j; \\ M, & \text{якщо } d_i = d_j, c_i \geq c_j; \\ -M, & \text{якщо } d_i = d_j, c_i < c_j, \end{cases} \quad (5)$$

де M — достатньо велике додатне число. Оскільки нерівність $\bar{c}_i(\lambda) \geq \bar{c}_j(\lambda)$ рівносильна $c_i - c_j \geq \lambda(d_i - d_j)$, то при $|\lambda| < M$ нерівність $\bar{c}_i(\lambda) \geq \bar{c}_j(\lambda)$ виконується тоді і лише тоді, коли $\lambda \leq \alpha(i, j)$.

Упорядкуємо величини (5) за неспаданням:

$$\alpha(i_1, j_1) = \dots = \alpha(i_{r-1}, j_{r-1}) = -M < \alpha(i_r, j_r) \leq \dots \leq \alpha(i_s, j_s) < M = \\ = \alpha(i_{s+1}, j_{s+1}) = \dots = \alpha(i_m, j_m),$$

де $m = \frac{k(k-1)}{2}$. Позначимо $I(t) = \{\lambda \mid \alpha(i_t, j_t) < \lambda \leq \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})\}$ для всіх $t \in J_{s-1}^r$. Тоді $\forall \lambda \in I(t)$ маємо $\lambda > \alpha(i_t, j_t) \geq \alpha(i_\tau, j_\tau) \quad \forall \tau \in J_t^1$, звідки $\bar{c}_i(\lambda) < \bar{c}_j(\lambda)$. Аналогічно внаслідок $\lambda \leq \alpha(i_\tau, j_\tau) \quad \forall \tau \in J_m^{t+1}$ отримуємо $\bar{c}_i(\lambda) \geq \bar{c}_j(\lambda)$.

Нехай $I(r-1) = \{\lambda \mid \lambda \leq \alpha(i_r, j_r)\}$, $I(s) = \{\lambda \mid \lambda > \alpha(i_s, j_s)\}$. Тоді для довільного $\lambda \in I(r-1)$ маємо $\bar{c}_i(\lambda) \geq \bar{c}_j(\lambda) \quad \forall \tau \in J_m^r$ і $\bar{c}_i(\lambda) < \bar{c}_j(\lambda)$

$\forall \tau \in J_{r-1}^1$ (якщо $r-1 \geq 1$), а для будь-якого $\lambda \in I(s)$ — $\bar{c}_{i_r}(\lambda) < \bar{c}_{j_r}(\lambda)$
 $\forall \tau \in J_s^1, \bar{c}_{i_r}(\lambda) \geq \bar{c}_{j_r}(\lambda) \quad \forall \tau \in J_m^{s+1}$ (якщо $s+1 \leq m$).

Таким чином, $\forall \lambda \in I(t)$, де $t \in J_s^{r-1}$, коефіцієнти функції $\varphi(x, \lambda)$ задовольняють умови

$$\bar{c}_{i_r}(\lambda) < \bar{c}_{j_r}(\lambda) \quad \forall \tau \in J_t^1, \bar{c}_{i_r}(\lambda) \geq \bar{c}_{j_r}(\lambda) \quad \forall \tau \in J_m^{t+1}. \quad (6)$$

Умова (6) визначає упорядкування коефіцієнтів функції $\varphi(x, \lambda)$. У цьому випадку для визначення мінімалі в задачі (2), як видно з (4), достатньо знати кількість додатних серед коефіцієнтів $\bar{c}_i(\lambda)$.

Нехай $h \in J_k^1$, точка x^* задовольняє умову (2), де $\lambda \in I(t)$. Обчислимо $\lambda^* = \Phi(x^*)$. Якщо також $\lambda^* \in I(t)$, причому серед чисел $c_l - \lambda^* d_l$ ($l \in J_k^1$) маємо h додатних, то x^* — також мінімаль функції $\varphi(x, \lambda^*)$ на множині $E_n^k(G)$. А тоді $\langle \lambda^*, x^* \rangle$ є розв'язком задачі (1).

Якщо для жодного $h \in J_k^0$ мінімаль функції $\Phi(x)$ на множині $E_n^k(G)$ знайдена не буде, то перейдемо до розгляду наступного значення t . При цьому якщо $\alpha(i_{t+f-1}, j_{t+f-1}) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$, то $I(t+f) = \emptyset$. Тому покладаємо наступне значення t рівним попередньому, збільшеному на f (тобто $t+f$), де f — найбільше число, для якого $\alpha(i_{t+f}, j_{t+f}) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$.

Оскільки $\bigcup_{t \in J_s^{r-1}} I(t) = R^1$, то для деяких значень t і h буде знайдено точку x^* , що задовольняє (2) і для якої $\Phi(x^*) \in I(t)$, причому серед чисел $c_l - \lambda^* d_l$ ($l \in J_k$) маємо h додатних. Як показано вище, ця точка є мінімаллю в задачі (1).

Авторами показано, що алгоритм, який ґрунтується на наведених вище міркуваннях, є поліноміальним. Зазначимо, що мінімаль, одержана у відповідності з таким алгоритмом, може виявитися не єдиною. Розглянемо питання про одержання решти мінімалей.

Позначимо $y_j = x_{q_j}$ для всіх $j \in J_k^1$. Нехай $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ — первинна специфікація мультимножини $\{\bar{c}_1(\lambda), \dots, \bar{c}_k(\lambda)\}$, елементи якої впорядковані відповідно до порядку зростання елементів основи; $p_1 = 1, p_{i+1} = p_i + \bar{p}_i \quad \forall i \in J_n$. Нехай також $x^* = (g_{l_1}, \dots, g_{l_k})$, тоді відповідна точка $y^* = (x_{q_1}, \dots, x_{q_k}) = (g_{w_1}, \dots, g_{w_k})$, де $w_j = l_{q_j}$. Позначимо $S = \{i \in J_m \mid c_{p_i} \neq 0\}$ і

розглянемо розбиття числа k на n доданків $k = \bar{p}_1 + \dots + \bar{p}_n$ і розбиття множини J_n на n підмножин N'_i за правилом:

$$N'_i = \begin{cases} \{J_j \mid j \in \bar{N}_i\}, \text{ де } \bar{N}_i = \{q_{p_i}, \dots, q_{p_{i+1}-1}\}, \text{ якщо } i \in S, \\ J_n \setminus \bigcup_{j \in I} N'_j, \text{ якщо } c_{p_i} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Доведено, що точка $y' = (y'_1, \dots, y'_k)$ є мінімальною функції

$\varphi(y, \lambda) = \sum_{j=1}^k y_j \bar{c}_j(\lambda)$ на $E_n^k(G)$ тоді і лише тоді, коли вона є елементом

множини полірозміщень [1,4] $E_{\eta n}^{ks}(G, H) = \{(g_{\pi(1)}, \dots, g_{\pi(k)}) \mid \forall \pi \in H\}$, де

H — множина всіх k -вибірок з множини J_n^1 вигляду

$$\pi = (\pi(1), \dots, \pi(k)) = (\pi_{11}, \dots, \pi_{1k_1}, \dots, \pi_{s1}, \dots, \pi_{sk_s}) = (\pi^1, \dots, \pi^s), \quad (8)$$

$\pi^i = (\pi_{i1}, \dots, \pi_{ik_i})$ — довільна k_i -вибірка з множини $N'_i \quad \forall i \in J_n^1$, визначеної згідно із (7)

Отже, точка x' також є мінімальною в задачі (1) тоді і лише тоді, коли для всіх $j \in J_k^1$ $x'_{q_j} = y_j$, где $(y_1, \dots, y_k) \in E_{\eta n}^{ks}(G, H)$.

Викладені у доповіді підходи до розв'язування задач безумовної оптимізації на розміщеннях можуть бути використані при розробці методів розв'язування інших класів евклідових задач комбінаторної оптимізації, у тому числі з різними видами невизначеності.

1. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г.Стоян, О.О.Ємець. – К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487>
2. Емец О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях / О.А.Емец, О.А. Черненко – К. : Наукова думка, 2011. – 154 с. – Режим доступа: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/467>
3. Барболіна Т.М. Розв'язування дробово-лінійних безумовних задач оптимізації на розміщеннях / Т.М. Барболіна // Збірник наукових праць викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету. — Полтава : Астрія, 2016. — С. 12–14.
4. Стоян Ю.Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. — Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с. – Режим доступу: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/376>.

УДК

В. А. Качановський, М. О. Киселиця, М. М. Притула

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ПРО СОЛІТОННІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНІЇ НЕЛІНІЙНОЇ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Нехай на нескінченновимірному періодичному многовиді $M = C_l^\infty(R^1, R^3)$, де l – період, задана нелінійна гідродинамічна система

$$\begin{cases} u_t = v - uu_x \\ v_t = z - uv_x \\ z_t = -2zu_x - uz_x \end{cases} . \quad (1)$$

Зробивши заміну $x_1 = x, x_2 = t$, а також прийнявши $U_1(x_1, x_2) = u(x, t)$, $U_2(x_1, x_2) = v(x, t)$ та $U_3(x_1, x_2) = z(x, t)$, $u, v, z \in M = C_l^\infty(R^1, R^3)$, перепишемо систему у такому вигляді

$$\begin{cases} U_{1,x_2} - U_2 + U_1 U_{1,x_1} = 0 \\ U_{2,x_2} - U_3 + U_1 U_{2,x_1} = 0 \\ U_{3,x_2} + 2U_3 U_{1,x_1} + U_1 U_{3,x_1} = 0 \end{cases} . \quad (2)$$

Щоб отримати явні розв'язки системи (2) опишемо наступні кроки.

Крок 1. Перетворимо систему (2) у нелінійне звичайне диференціальне рівняння, розв'язок якого шукаємо у рухомій системі відліку $\varphi = \sum_{j=1}^2 k_j x_j + \varphi_0$, де компоненти $k_j, j = 1, 2$ і фаза $\varphi_0 \in$ постійними.

Для знаходження поліноміальних розв'язків використаємо метод \tanh -функцій [1, 2, 3]. Приведемо систему (2) до наступного вигляду

$$\begin{cases} k_2(1 - T^2)U'_1 - U_2 + U_1 k_1(1 - T^2)U'_1 = 0 \\ k_2(1 - T^2)U'_2 - U_3 + U_1 k_1(1 - T^2)U'_2 = 0 \\ k_2(1 - T^2)U'_3 + 2U_3 k_1(1 - T^2)U'_1 - U_1 k_2(1 - T^2)U'_3 = 0 \end{cases} , \quad (3)$$

де $U_1(T) = U_1(x_1, x_2)$, $U_2(T) = U_2(x_1, x_2)$, $U_3(T) = U_3(x_1, x_2)$, $T = \tanh \varphi$.

Крок 2. Визначаємо степінь поліноміальних розв'язків. З цією метою поліноміальні розв'язки шукаємо у формі

$$U_i(T) = \sum_{j=0}^{M_i} a_{ij} T^j \quad (4)$$

Отримуємо $M_i, i = 1, 2, 3$ із системи лінійних рівнянь. В результаті $M_1 = 1, M_2 = 3, M_3 = 5$. Отже,

$$\begin{cases} U_1 = a_{10} + a_{11}T \\ U_2 = a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^3 \\ U_3 = a_{30} + a_{31}T + a_{32}T^2 + a_{33}T^3 + a_{34}T^4 + a_{35}T^5 \end{cases} . \quad (5)$$

Крок 3. Після підстановки (4) у (3) групуємо елементи з однаковими степенями, прирівнюємо їх до нуля. Отримаємо систему алгебраїчних рівнянь з невідомими a_{ij} та k_i , $i = 1, 2$, $j = 0, 1, 2$.

Крок 4. На даному етапі систему рівнянь розв'язуємо з умовами, що коефіцієнти при найвищих степенях кожного з розв'язків і параметри k_j , $j = 0, 1, 2$ відмінні від нуля. Обираємо один з двох можливих розв'язків системи (3)

$$\begin{cases} k_1 = k_1, k_2 = k_2, a_{10} = \frac{-k_2}{k_1}, a_{11} = a_{11}, a_{12} = -\frac{6\gamma k_1^2}{\beta} \\ a_{20} = 0, a_{21} = a_{11}^2 k_1, a_{22} = 0, a_{23} = -a_{11}^2 k_1 \\ a_{30} = 0, a_{31} = a_{11}^3 k_1^2, a_{32} = 0, a_{33} = -4a_{11}^3 k_1^2, \\ a_{34} = 0, a_{21} = 3a_{11}^3 k_1^2 \end{cases} \quad (6)$$

Крок 5. Підставивши (6) у (4) і виконавши обернену процедуру до запропонованої на кроці 1, отримаємо розв'язок системи (2), а отже і системи (1) у явному вигляді. Повернувшись до замін та прийнявши $a_{11} = 1$, $k_1 = k_2 = 0$ та $\varphi_0 = 0$ отримаємо аналітичний розв'язок системи (2)

$$\begin{cases} u = -1 + \tanh(x + t) \\ v = \tanh(x + t) - \tanh^3(x + t) \\ z = \tanh(x + t) - 4\tanh^3(x + t) + \tanh^5(x + t) \end{cases} \quad .$$

1. *Baldin D., Goktas U., Hereman W., Hong L., Martino R.S., Miller J.C.* Symbolic computation of exact solutions expressible in hyperbolic and elliptic functions for nonlinear partial differential and differential-difference equations. – 2001. Available at URL: // www.mines.edu/fs_home/whereman/.
2. *Fan B. G.* Extended-function method and its applications to nonlinear equation // *Phys. Lett.* – 2000. – P. 212-218.
3. *Malfliet W.* Solitary wave solutions on nonlinear wave equation // *Am. J. Phys.* – 1992, 60. – P. 650-654.

УДК 519.6

Г.А. Квасниця, Г.А. Шинкаренко

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ДВОСТОРОННІ АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНКИ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ В ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ

Метою даної роботи є побудова двосторонніх апостеріорних оцінювачів похибок апроксимацій МСЕ розв'язку одновимірної крайової задачі.

Апостеріорні оцінювачі похибок частинами лінійних апроксимацій МСЕ для крайових задач із звичайними диференціальними рівняннями другого порядку побудовані в [1], для частинами квадратичних і кубічних апроксимацій в [2]. Стратегія адаптування запропонована в [4]. Двосторонні оцінки похибок побудовано в [5]. Тут розглядаються двосторонні оцінювачі похибок для частинами лінійних та кубічних ермітових апроксимацій.

Розглянемо крайову задачу: знайти функцію $u = u(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння

$$-\left[\mu(x)u'(x)\right]' + \beta(x)u'(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in (0, L) \quad (1)$$

і задовольняє крайові умови

$$u(0) = 0, \quad u(L) = 0. \quad (2)$$

Тут $\mu = \mu(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ та $f = f(x)$ – задані функції такі, що

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \mu_0 = \text{const} > 0, & \sigma(x) \geq 0, \\ \mu, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega), & f \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Крайова задача (1),(2) допускає варіаційне формулювання вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V := \{v \in H^1(0, L) : v(0) = 0, v(L) = 0\} \text{ таку, що} \\ c(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (3)$$

з такими білінійною формою та лінійним функціоналом

$$\begin{cases} c(u, v) := \int_0^L (\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv) dx, \\ \langle l, v \rangle := \int_0^L f v dx \quad \forall u, v \in V. \end{cases} \quad (4)$$

Нехай $\mathfrak{T}_h = \{K_{i+1/2}\}$ — деякий поділ відрізка $[0, L]$ на скінченні елементи $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$, $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, N-1$, на кожному із яких обчислено апроксимацію u_h розв'язку задачі (3). Для знаходження

скінченноелементної апроксимації $e_h(x)$ похибки $e(x) = u(x) - u_h(x)$ отримаємо таку задачу про лишок:

$$\begin{cases} \text{знайти оцінювач похибки } e_h \in E_h \text{ такий, що} \\ a(e_h, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle = \langle l, v \rangle - a(u_h, v) \quad \forall v \in E_h, \end{cases} \quad (5)$$

де $E_h \subset E := V \setminus V_h$, $\dim E_h < +\infty$.

Оцінювач апостеріорної похибки $e_h = e_h(x)$ будемо шукати у вигляді

$$e_h(x) = \sum_{K \in \mathfrak{I}_h} e_K(x) \equiv \sum_{K \in \mathfrak{I}_h} \lambda_K \phi_K(x) \quad \forall x \in (0, L), \quad (6)$$

де $\phi_K(x)$ – відповідні базисні функції із простору E_h , коефіцієнти λ_K

знаходимо за формулою $\lambda_K = \frac{\rho(u_h; \phi_K)}{a(\phi_K, \phi_K)} \quad \forall K \in \mathfrak{I}_h$.

Норму апостеріорного оцінювача похибки знаходимо у вигляді

$$\|e_h\|_1^2 = \sum_{K \in \mathfrak{I}_h} \|e_h\|_{1,K}^2 = \sum_{K \in \mathfrak{I}_h} \lambda_K^2 \|\phi_K\|_{1,K}^2. \quad (7)$$

Згущення сітки відбувалося відповідно до стратегії, описаної в [4], а саме: обчислюємо на кожному скінченному елементі індикатор апостеріор-

ної похибки у вигляді $\eta_K := \frac{\sqrt{N} \|e_h\|_{1,K}}{\|u_h + e_h\|_{1,\Omega}} 100\%$; якщо це число більше від

заданого допустимого рівня похибки, то скінченний елемент поділяється на два нових.

Розв'язувалась крайова задача (1), (2) з наступними коефіцієнтами: $\mu = 1$, $\beta(x) = 5600(1 - x^2)$, $\sigma = 0$, $f = 5600$. Початкова сітка – рівномірний поділ відрізка на $N_0 = 5$ скінченних елементів, допустимий рівень похибки $\varepsilon = 1\%$. Наближені розв'язки цієї задачі будувалися описаною вище процедурою h -адаптування із використанням лінійних та кубічних ермітових апроксимацій МСЕ. Скрізь нижче вжито таких позначень: m – номер біжучого кроку адаптування; N_m – загальна кількість скінченних елементів поділу \mathfrak{I}_h ; u_m – розв'язок модельної задачі (1),(2), отриманий

засобами пакету Mathematica 10.3, $\varepsilon_h := \frac{\|e_h\|_1}{\|u_h + e_h\|_1} 100\%$ – відносна

апостеріорна похибка.

На кожному скінченному елементі $K_{i+1/2}$ введемо локальну координату ξ згідно правила:

$$x = x(\xi) := \frac{1}{2}(1 - \xi)x_i + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_{i+1} = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \quad \forall \xi \in [-1, 1]. \quad (8)$$

У визначенні (8) використано наступні позначення:

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \omega(\xi) := \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (9)$$

1. Частинами лінійні апроксимації МСЕ.

На кожному скінченному елементі вибиралась апроксимація шуканого розв'язку варіаційної задачі (3) у вигляді:

$$u[x(\xi)] \approx u_h(\xi) := \theta(\xi)u_i + \omega(\xi)u_{i+1}.$$

Для цих апроксимацій будувався оцінювач Діріхле

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1/2}^D(\xi) &:= \lambda_{i+1/2}^D b_{i+1/2}^D(\xi), \\ \text{де } b_{i+1/2}^D(\xi) &= \begin{cases} 2\omega(\xi), & -1 \leq \xi \leq 0 \\ 2\theta(\xi), & 0 < \xi \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

та оцінювач Неймана

$$\varepsilon_{i+1/2}^N(\xi) := \lambda_{i+1/2}^N \varphi_{i+1/2}^N(\xi) = 4\theta(\xi)\omega(\xi)\lambda_{i+1/2}^N.$$

Результати обчислень наведені в таблиці 1.

Таблиця 1. Збіжність h -адаптування з лінійними апроксимаціями МСЕ

m	N_m	$\ e_h^D\ _1$	$\ u_M - u_h\ _1$	$\ e_h^N\ _1$	$\varepsilon_h^D, \%$	$\varepsilon_h, \%$	$\varepsilon_h^N, \%$
4	80	6.2852	7.1980	7.1605	30.81	35.38	35.10
5	89	3.0195	3.4870	3.4742	14.82	17.14	17.05
6	96	1.5072	1.7401	1.7388	7.40	8.55	8.54
7	105	0.7563	0.8720	0.8730	3.72	4.29	4.29
8	121	0.3841	0.4411	0.4434	1.89	2.17	2.18
9	146	0.2070	0.2347	0.2649	1.02	1.15	1.30
10	172	0.1516	0.1698	0.2648	0.75	0.83	1.30
11	177	0.1438	0.1604	0.2652	0.71	0.79	1.30
12	179	0.1414	0.1583	0.2635	0.70	0.78	1.30
13	180	0.1398	0.1563	0.2638	0.69	0.77	1.30

2. Ермітові кубічні поліноми на скінченному елементі

Кубічна апроксимація розв'язку будувалась у вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} u[x(\xi)] \approx u_h(\xi) &:= \{\theta(\xi)[\theta(\xi) - \omega(\xi)]^2\}u_i + \frac{h}{2}\{4\theta(\xi)\omega(\xi)\}u'_i \\ &+ \{\omega(\xi)[\theta(\xi) - \omega(\xi)]^2\}u_{i+1} + \frac{h}{2}\{-2\omega(\xi)\theta(\xi)[\theta(\xi) - \omega(\xi)]\}u'_{i+1} \end{aligned} \right.$$

Для неї були також побудовані оцінювач Діріхле

$$\varepsilon_{i+1/2}^D := \lambda_{i+1/2}^D \{(1 - 2\theta(\xi))(2\omega(\xi) - 1)[\theta(\xi) - \omega(\xi)]^2\}$$

та оцінювач Неймана

$$\varepsilon_{i+1/2}^N := \lambda_{i+1/2}^N \{16\theta(\xi)\omega(\xi)[\theta(\xi) - \omega(\xi)]^2\}$$

Числові результати для кубічних апроксимацій наведені в таблиці 2.

Таблиця 2. Збіжність h -адаптування з кубічними апроксимаціями

m	N_m	$\ e_h^D\ _1$	$\ u_M - u_h\ _1$	$\ e_h^N\ _1$	$\varepsilon_h^D, \%$	$\varepsilon_h, \%$	$\varepsilon_h^N, \%$
0	7	133.707	16.8656	222.074	99.28	82.89	99.74
1	14	36.3523	9.9544	58.6390	87.28	48.92	94.48
2	28	0.2574	1.4879	0.4123	1.26	7.31	2.02
3	32	0.4849	0.7931	0.7534	2.38	3.89	3.69
4	34	0.0557	0.0924	0.0861	0.27	0.45	0.42
5	35	0.0218	0.0359	0.0337	0.11	0.17	0.16

Наведені в таблицях числові результати підтверджують двосторонній характер оцінок апостеріорної похибки, отриманих з використанням побудованих оцінювачів Діріхле та Неймана.

Інші оцінювачі апостеріорної похибки описані в [3], [6].

1. *Абрамов Є.* Кусково лінійні апроксимації h -адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач. / Є. Абрамов, О. Ліпіна, Г. Шинкаренко, А. Ямелинець // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 3–18.
2. *Абрамов Є.* Частинами квадратичні та кубічні апроксимації h -адаптивного МСЕ для одновимірних крайових задач. / Є. Абрамов, Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. - 2011.-Вип. 17. – С. 47–61.
3. *Вовк О.* Точна сумарна оцінка апостеріорних похибок апроксимацій МСЕ для двоїстих задач кручення стрижнів. / О. Вовк, Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. – 2015. – Вип. 24. – С. 44-52.
4. *Квасниця Г.* Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики. / Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. - 2002. -Вип. 5. – С. 95-106.
5. *Kvasnytsia H.A.* Computable double-sided a posteriori error estimates and h -adaptive finite element approximations/ H.A. Kvasnytsia, O.Yu. Ostapov, H.A. Shynkarenko, O.V. Vovk // Manufacturing Process: Actual Problems-2014; M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler eds. – Opole: Politechnika Opolska, 2014 – Vol. 1. Basic science applications in manufacturing processes. – P. 96-111.
6. *Repin S.I.* A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations / S.I. Repin. – Berlin · New York: Walter de Gruyter, 2008. – pp. 328.

УДК 517.95

Ю. Є. Климяк

(Рівненський державний гуманітарний університет)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У БАГАТОШАРОВИХ КУСКОВО- ОДНОРІДНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Гідрогеоекологічні дослідження все частіше проводяться з використанням математичного моделювання [2, 4, 5]. Використання математичних методів моделювання конкретизує розуміння усього, що відбувається і може відбутися з підземними водами, прагматизує оцінки і висновки, допомагає знаходити оптимальні рішення.

Процеси масоперенесення забруднюючих речовин у пористих середовищах у випадку переважання конвективних складових процесу над дифузійними досить часто описуються сингулярно-збуреними крайовими задачами [1–3]. У [1] розроблено ефективну методику розв’язання просторових сингулярно-збурених крайових задач типу “фільтрація-конвекція-дифузія” для модельних складної геометрії однозв’язних областей, обмежених еквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії. Актуальною залишається задача математичного моделювання та прогнозування просторових процесів масоперенесення багатокомпонентних забруднюючих речовин у багатошарових кусково-однорідних пористих середовищах.

Для області $G = G_z \times (0, \infty)$ ($z = (x, y, z)$), $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – однозв’язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями ABB_*A_* , CDD_*C_* і чотирма поверхнями течії ADD_*A_* , BCC_*B_* , $ABCD$, $A_*B_*C_*D_*$ та розділений деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$) на деякі p підобластей $G_z^1 = ABF_1 E_1 A_* B_* F_{*1} E_{*1}$, $G_z^s = E_s F_s F_{*s+1} E_{*s+1} E_{*s} F_{*s} F_{*s+1} E_{*s+1}$ ($s = \overline{2, p-2}$), $G_z^p = E_{p-1} F_{p-1} C D E_{*p-1} F_{*p-1} C_* D_*$, розглянемо модельну задачу:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0,$$

$$\text{div}(D_j \cdot \text{grad } C_j) - \vec{v} \cdot \text{grad } C_j - \sum_{k=1}^m a_{j,k} \cdot C_j +$$

$$+ \sum_{k=1}^m a_{k,j} \cdot C_k = \sigma \cdot C_{j_t} \quad (j = \overline{1, m}), \quad (x, y, z) \in G_z^s \quad (s = \overline{1, p})$$

за наступних крайових умов:

$$\begin{aligned} \varphi \Big|_{ABB_n A_n} = \varphi_*^*, \quad \varphi \Big|_{CDD_n C_n} = \varphi^*, \quad \varphi_{\bar{n}} \Big|_{ADD_n A_n \cup BCC_n B_n \cup ABCD \cup A_n B_n C_n D_n} = 0 \\ C_j \Big|_{ABB_n A_n} = c_{j*} \quad \text{або} \quad D_j \cdot C'_{j\bar{n}} - v_{n*} \cdot (C_j - c_{j*}) \Big|_{ABB_n A_n} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \\ C_j \Big|_{CDD_n C_n} = c_j^* \quad \text{або} \quad C'_{j\bar{n}} \Big|_{CDD_n C_n} = 0, \\ \text{або} \quad D_j \cdot C'_{j\bar{n}} - v_n^* \cdot (C_j - c_j^*) \Big|_{CDD_n C_n} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \\ C_j \Big|_{ADD_n A_n} = c_{j**} \quad \text{або} \quad C'_{j\bar{n}} \Big|_{ADD_n A_n} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \\ C_j \Big|_{BCC_n B_n} = c_j^{**} \quad \text{або} \quad C'_{j\bar{n}} \Big|_{BCC_n B_n} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \\ C_j \Big|_{ABCD} = c_{j***} \quad \text{або} \quad C'_{j\bar{n}} \Big|_{ABCD} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \\ C_j \Big|_{A_n D_n C_n B_n} = c_j^{***} \quad \text{або} \quad C'_{j\bar{n}} \Big|_{A_n B_n C_n D_n} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \end{aligned}$$

початкових умов:

$$C_j \Big|_{t=0} = c_j^0 \quad (j = \overline{1, m})$$

і умов узгодженості на поверхнях розділу $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$):

$$\begin{aligned} \varphi \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = \varphi \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} = \varphi_{*s}^*, \\ \kappa_s \cdot \varphi'_{\bar{n}} \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = \kappa_{s+1} \cdot \varphi'_{\bar{n}} \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} \quad (s = \overline{1, p-1}), \\ C_j \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = C_j \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}}, \quad D_{s,j} \cdot C'_{j\bar{n}} + v_n^s \cdot C_j \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = \\ = D_{s+1,j} \cdot C'_{j\bar{n}} + v_n^s \cdot C_j \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} \quad (s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}), \quad (12) \end{aligned}$$

де $\varphi = \varphi(x, y, z)$ і $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – відповідно потенціал і вектор швидкості

фільтрації, $\varphi_* < \varphi < \varphi^*$, $0 < \varphi_* = \varphi_{*0}^* < \varphi_{*1}^* < \varphi_{*2}^* < \dots < \varphi_{*p-1}^* < \varphi_{*p}^* = \varphi^* < \infty$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > 0$, κ – коефіцієнт фільтрації,

$\kappa = \left\{ \kappa_s, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \right\}$, $\kappa_s > 0$ ($s = \overline{1, p}$), \bar{n} – зовнішня нормаль до

відповідної поверхні; $C_j = C_j(x, y, z, t)$ – концентрація j -тої компоненти багатокомпонентної забруднюючої речовини у фільтраційній течії в точці (x, y, z) у момент часу t , D_j – власний коефіцієнт дифузії j -тої

компоненти багатокомпонентної забруднюючої речовини у фільтраційній течії, $D_j = \left\{ D_{s,j}, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \right\}$, $D_{s,j} = \varepsilon \cdot d_{s,j}$, $d_{s,j} > 0$ ($s = \overline{1, p}$,

$j = \overline{1, m}$), ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$), σ – коефіцієнт активної пористості,

$\sigma = \left\{ \sigma_s, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \right\}$, $0 < \sigma_s < 1$ ($s = \overline{1, p}$), $a_{j,k}$ – коефіцієнт, що

характеризує швидкість протікання масообмінних процесів між j -тою і k -тою компонентами забруднюючої речовини у фільтраційному розчині,

$$a_{j,k} = \begin{cases} a_{s,j,k}, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}, \\ 0, & j = k, \end{cases} \quad a_{s,j,k} = \begin{cases} \varepsilon \cdot \bar{a}_{s,j,k}(x, y, z, t), j < k, \\ 0, & j = k, \end{cases}$$

$\bar{a}_{s,j,k}(x, y, z, t)$ ($s = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$) – неперервні обмежені функції,

$$c_{j^{**}} = \{c_{s,j^{**}}(x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\}, \quad c_j^{**} = \{c_{s,j}^{**}(x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\},$$

$$c_{j^{***}} = \{c_{s,j^{***}}(x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\}, \quad c_j^{***} = \{c_{s,j}^{***}(x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\},$$

$$c_j^0 = \{c_{s,j}^0(x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\}, \quad c_{j^*} = c_{j^*}(M, t), \quad c_j^* = c_j^*(M, t),$$

$$c_{s,j^{**}} = c_{s,j^{**}}(M, t), \quad c_{s,j}^{**} = c_{s,j}^{**}(M, t), \quad c_{s,j^{***}} = c_{s,j^{***}}(M, t),$$

$$c_{s,j}^{***} = c_{s,j}^{***}(M, t), \quad c_{s,j}^0 = c_{s,j}^0(x, y, z) \quad (s = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, m})$$

– достатньо гладкі функції, узгоджені між собою вздовж ребер області G , M – довільна точка відповідної поверхні, v_{n^*} , v_n^* і v_n^s – нормальні складові швидкості відповідно на поверхнях ABB_*A_* , CDD_*C_* і $E_sF_sF_{*s}E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$).

Аналогічно [1] побудовано числово-асимптотичне розв'язку відповідної сингулярно-збуреної задачі відносно координат області комплексного потенціалу і отримано нового типу поправки, що характеризують механізм конвективно-дифузійного перерозподілу концентрацій в околах ділянок розділу шарів.

1. *Бомба А. Я.* Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: монографія / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климяк. – Рівне : ТзОВ фірма «Ассоль», 2014. – 273 с.
2. *Бомба А. Я.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечський. – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.
3. *Бомба А. Я.* Нелінійні сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія” / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 254с.
4. *Власюк А. П.* Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2010. – 277 с.
5. *Рудаков Д. В.* Моделирование массопереноса радионуклидов в потоках подземных вод: монография / Д. В. Рудаков. – Д. : Герда, 2010. – 160 с.

УДК 519.6

О.В.Ковальчук

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**ОГЛЯД ТРИКРОКОВИХ МЕТОДІВ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ХОРД
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ**

Розглянемо задачу розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$P(x) = 0, \quad P: R^n \rightarrow R^n \quad (1)$$

Для розв'язування задачі (1) існує багато методів, серед яких використовують різницеві аналоги метода Ньютона. Наприклад метод хорд [1]

$$x_{k+1} = x_k - P(x_k, x_{k-1})^{-1} P(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

де $P(x', x'')(x' - x'') = P(x') - P(x'')$ – поділена різниця [2]

При використанні даного методу, на кожній ітерації ми неефективно використовуємо інформацію, яку отримали при обчисленні одного наближення, щоб більш повно використовувати вже маючу інформацію, пропонуємо трикрокові методи на базі методу хорд [3].

$$\begin{aligned} u_k &= x_k - P(x_k, x_{k-1})^{-1} P(x_k) \\ v_k &= x_k - \beta_k P(x_k, x_{k-1})^T P(x_k) \\ x_{k+1} &= \arg \min_{\lambda} \|P(u_k + \lambda(v_k - u_k))\| \end{aligned} \quad (3)$$

Та ще один метод [4]

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - P(x_0, x_{-1})^{-1} P(x_0) \\ u_k &= x_k - P(x_k, x_{k-1})^{-1} P(x_k) \\ v_k &= x_k - \beta_k P(x_{k-1}, x_{k-2})^{-1} P(x_k) \\ x_{k+1} &= \arg \min_{\lambda} \|P(u_k + \lambda(v_k - u_k))\|. \end{aligned} \quad (4)$$

де β_k вибирається так, щоб $\|P(v_k)\| \leq \|P(x_k)\|$.

Наступна теорема встановлює швидкість збіжності методів (3) та (4) відповідно для розв'язування системи (1).

Теорема Нехай виконується.

1) $P(x)$ – неперервно-диференційована в області $D \subset R^n$;

$$D = \left\{ x \in R^n : \|x - x_0\| \leq 2B \|P(x_0)\| \right\}$$

$$2) \forall x, y \in D \quad \|P(x, y)\| \leq M_1 \quad \|P(x, y)^{-1}\| \leq B$$

$$3) \forall x, y, z \in D \quad \|P(x, y, z)\| \leq M_2$$

4) Початкові наближення вибрані таким чином, що виконується $\|x_{-1} - x^*\| \leq B \|P(x_0)\| \quad q = M_1 M_2 B^3 \|P(x_0)\| \leq 1$

Тоді послідовність, породжена алгоритмом (3) – (4), збігається, і має місце оцінка

$$\|P(x_k)\| \leq \left(\prod_{i=0}^{k-1} \mu_{k-i-1}^i \right) q^{D_k} \|P(x_0)\|,$$

де $D_{k+1} = D_k + D_{k-1} + 1$, $D_0 = D_{-1} = 0$, $t_{i+1} = t_i + t_{i-1}$, $t_{-1} = 0$, $t_0 = 1$.

Та для методу (2) $\mu_k \in (0; 1]$, $k = 0, 1, \dots$

Для методу (3) $\mu_0 = 1$, $\mu_k \in (0; 1]$, $k = 1, 2, \dots$

Швидкість збіжності можна визначити із наступного рівняння $\rho = 1 + \frac{1}{\rho}$,

$$\text{звідки швидкість збіжності } \rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Запропоновані трикрокові методи було апробовано на багатьох тестових функціях. Під час застосування різницевого методів та побудованих на їхніх основі трикрокових методів, було введено кроковий множник $\alpha_k \in (0; 1]$

Використовуватимемо такі позначення ε – точність обчислень, I – номер ітерації, на якій отримано розв’язок задач (1) з точністю ε , K – кількість обчислень, еквівалентних кількості обчислень значень функції, витрачених на отримання розв’язку.

За критерій зупинки роботи алгоритмів ми використовували об’єднання таких умов:

$$\|P(x_k)\| \leq \varepsilon = 10^{-8},$$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon = 10^{-8}.$$

Задача 1. Сингулярна система Пауелла[5]

$$P_{4k-3}(x) = x_{4k-3} - 10x_{4k-2};$$

$$P_{4k-2}(x) = \sqrt{5}(x_{4k-1} - x_{4k});$$

$$P_{4k-1}(x) = (x_{4k-2} - 2x_{4k-1})^2;$$

$$P_{4k-3}(x) = \sqrt{10}(x_{4k-3} - x_{4k})^2;$$

$$x_0 = (3; -1; 0; 1; \dots; 3; -1; 0; 1); \quad 1 \leq k \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Розв’язок } x^* = (0; \dots; 0); \quad P(x^*) = 0.$$

Порівняльні характеристики роботи методів. Задача 1.

Метод\Розмірність задачі		16	40	60	80	100	200	300
(2)	I	41	42	42	43	43	44	44
	K	739	1765	2605	3527	4387	8889	13289
(3)	I	20	22	22	22	22	22	22
	K	628	1217	1657	2097	2537	4737	6937
(4)	I	20	22	23	23	23	23	23
	K	690	1280	1808	2268	2728	5028	7328

Задача 2 Розширена функція Френденштейна і Руфа [5]

$$P_{2k-1}(x) = x_{2k-1} + ((5 - x_{2k})x_{2k} - 2)x_{2k} - 13;$$

$$P_{2k}(x) = x_{2k-1} + ((x_{2k} + 1)x_{2k} - 14)x_{2k} - 29;$$

$$x_0 = (90; 60; \dots; 90; 60); \quad 1 \leq k \leq \frac{1}{2};$$

Розв'язок $x^* = (5; 4; \dots; 5; 4); \quad P(x^*) = 0.$

Порівняльні характеристики роботи методів. Задача 2

Метод\Розмірність задачі		16	40	60	80	100	200	300
(1.10)	I	17	17	17	17	17	17	17
	K	307	715	1055	1395	1735	3435	5135
(4.34)-(4.36)	I	10	11	11	11	11	11	11
	K	491	804	1024	1244	1464	2564	3664
(4.38)	I	9	9	9	9	9	9	9
	K	278	494	674	854	1034	1934	2834

Як показали чисельні експерименти, запропоновані методи ефективно працюють при великих розмірностях системи (1) і у випадку особливостей матриці Якобі (наприклад, вродженість у точці розв'язку). В деяких випадках кращі результати показував метод (3), в інших випадках метод (4). Використання запропонованих методів дозволяє зменшити обчислювальні затрати для пошуку розв'язку системи (1), з порівнянням із методом хорд.

1. Сергеев А.С. О методах хорд // Сибирский матем. журнал. -1961. -**11**. -№2. - С.282-289.
2. Ульм С. Ю. Об обобщенных разделенных разностях / С. Ю. Ульм // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1967. – Т. 16, № 1. – С. 13–26.
3. Ковальчук О.В. Трехшаговый метод для решения систем нелинейных уравнений на базе метода хорд. / Ковальчук О.В. //Материалы 5-й международной конференции математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии. Том II , Кишинэу, 22-25 марта 2016 г. с. 202-203.
4. Kovalchuk O. Three step method with memory based on method chord for solving system of nonlinear equations. // XXVII International Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU -2016) Tbilisi-Batumi, Georgia May 23-27, 2016 p. 98
5. More J.J., Garbow B.S., and Hillstom K.E. Testing unconstrained optimization software // ACM Transactions on Mathematical Software. -1981. -**7**(1). -p.17-41.

УДК 004.9

Р.В.Король, О.В. Кравченко, А.А. Златкін

(Черкаський державний технологічний університет)

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ПРОЕКТУВАННЯ ДІАГНОСТИЧНИХ ЕКСПЕРТНИХ СИСТЕМ

Прогресивний розвиток медичної науки і практики став можливим завдяки впровадженню сучасної комп'ютерної техніки. Використання персональних комп'ютерів надає додаткові можливості в отриманні та передачі медичної інформації.

Медична діагностика, тобто, процес розпізнавання типу захворювання є одним з найбільш інтелектуальних і одночасно одним з найбільш складних видів лікарської діяльності [1]. Це обумовлено наявністю значної кількості різнорідних параметрів, що характеризують стан хворого та впливають на діагноз, а також труднощами побудови аналітичних моделей, що зв'язують значення цих параметрів з типом відповідного діагнозу. Сьогодні інтерес до інтелектуальних інформаційних компонентів у медицині постійно зростає. Найбільш відомими з інтелектуальних програм є програми, що використовують формалізовані емпіричні знання висококваліфікованих фахівців (експертів) у будь-якій вузькій предметній галузі [2].

Об'єктом дослідження є система підтримки ухвалення рішень педіатром, яка міститиме базу медичних даних, базу знань на основі правил експерта та формувати рекомендації педіатру для допомоги в ухваленні попередніх рішень. Структуру головних модулів системи наведено на рис.1.



Рис. 1 Структура головних модулів програми

Медичні СППР, ЕС та СПУР використовують для діагностування, моніторингу, прогнозування, підтримки прийняття рішень, тобто, тих самих завдань, які становлять природу медицини. Якість діагностики оцінюють на рівні кваліфікованого лікаря, а це дуже високий показник. Системи підтримки прийняття рішень високоартісні, поки вони забезпечують вирішення ізольованих завдань медичної діагностики і використовуються в медичних приладно-комп'ютерних системах[3].

Відповідно до розглянутої предметної області та на основі медичних довідників в процесі розробки системи підтримки прийняття рішень формуємо набір правил в базу знань, що характеризують хворобу за симптомами (рис.2).

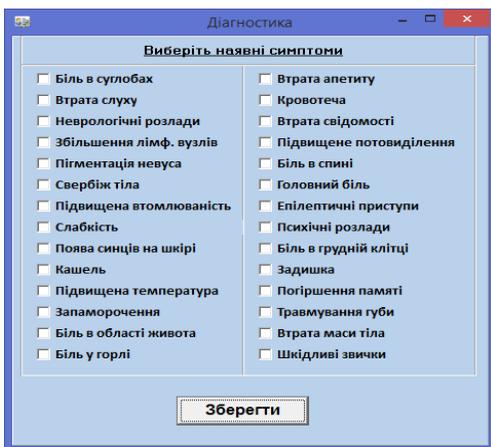


Рисунок 2 – Вікно вибору симптомів

пацієнтові на етапі попереднього огляду та зібраного анамнезу.

В подальшому планується розширення системи за рахунок додаткового модуля «Облік», що дозволить зменшити паперовий документообіг лікаря-педіатра.

1. *Гнатовська Ю.О.* Розробка медичних діагностичних систем реального часу [Електронний ресурс].–Режим доступа: \www/URL: <http://lib.chdu.edu.ua/pdf/naukpraci/computer/2008/90-77-15.pdf>.
2. *Любченко К.М.* Експертні системи в практичній медицині [Електронний ресурс].–Режим доступа: \www/ URL: http://it-visnyk.kpi.ua/wp-content/uploads/2011/03/49_01.pdf.
3. *Шаховська Н.Б., Мельникова Н.І.* Аналіз методів підтримки прийняття рішень у лікувальних системах // ж. Математичні машини і системи, 2011, № 2. - с. 62-72

В кожному правилі вказано набір симптомів та вагові коефіцієнти їх важливості для даного захворювання. За результатами хвороб формується можливий попередній діагноз та рекомендації щодо поглиблених медичних досліджень.

Однією з головних передумов створення програмного продукту є необхідність розвантажити педіатра в процесі встановлення діагнозу

УДК 004.94

О.В. Кравченко

(Черкаський державний технологічний університет)

ВПЛИВ ФІЗИЧНОЇ ДЕГРАДАЦІЇ МАТЕРІАЛУ НА НАДІЙНІСТЬ РОБОТИ ДИСКРЕТНОГО ПРИСТРОЮ

В наш час неможливо представити розвиток виробництва, транспорту, зв'язку, жодну сферу життя людини без використання комп'ютерної техніки та дискретних пристроїв, зокрема. В ряді областей застосування збої та відмови дискретних пристроїв можуть призвести не тільки до економічних втрат, а навіть до техногенних катастроф. Виходячи з цього гостро стоїть питання забезпечення надійності засобів обчислювальної техніки, а також прогнозування працездатності пристроїв .

Процес деградації матеріалу дискретного пристрою проходить «повільно» у відношенні до амортизаційного часу роботи самого пристрою. Фізична деградація комп'ютерних компонентів призводить до неправильної роботи дискретних пристроїв

Закономірності протікання фізико-хімічних процесів, що впливають на працездатність елементів технічних пристроїв, визначаються, як правило, тим, що в цих процесах беруть участь тільки частинки речовини (молекули, атоми, електрони), що володіють енергією, значення якої не менше, ніж необхідно для подолання енергетичного бар'єру, що перешкоджає процесу. Переміщення та перегрупування елементарних частинок, зміна їх положення в кристалічній решітці, що зумовлюють багато з цих процесів, можуть проходити лише в тому випадку, якщо енергія частинок перевищує встановлений для даного матеріалу рівень, достатній для подолання зв'язків між частинками.

Збільшення зворотних струмів витоку в напівпровідникових приладах пояснюється утворенням каналів внаслідок інверсії в n- або p-області кристала. Утворення каналів обумовлено різним ступенем забрудненості поверхні кристалів зарядженими іонами в процесі виробництва або з огляду розгерметизації корпусу приладу на етапі його застосування. В n-p-п-транзисторах колекторні інверсійні шари вказують на наявність негативних іонів на поверхні оксиду SiO₂, а базові інверсійні шари - на наявність позитивних іонів [3].

Застосування гібридних інтегральних мікросхем в спеціальній та вимірjuвальній апаратурі дозволяє отримувати вироби зі стабільними у часі вихідними параметрами. Стабільність параметрів виробів в даному випадку багато в чому визначається тимчасовим дрейфом опору тонкоплівкових резисторів, що входять в конструкції мікросхем. Для

з'ясування причин зміни властивостей тонкоплівкових резисторів представляють інтерес дослідження процесів, що відбуваються в них з часом [1].

Алгоритм прогнозування надійності дискретних пристроїв будемо будувати на основі моделі композитних матеріалів, що відображає поведінку матеріалу дискретного пристрою з врахуванням завершених фізичних процесів в самому матеріалі [2].

Збої в роботі приладу за рахунок неправильного проходження струму в $n - p - n$ переходах викликатиме відмови в роботі пристроїв та зменшуватиме їх надійність.

Функція надійності дискретних пристроїв $G = f(G_i, p, U, t)$ залежить від значення надійності пристрою G_i , надане виробником, константа надпровідності кристалів пристрою p , функції характеристики матеріалів пристрою U та часу відповіді пристрою на тестове завдання – t . Всі вищезазначені параметри є нечіткими.

Отже, для визначення рівня надійності G_i необхідно:

- розрахувати концентрацію речовини міжфазового прошарку;
- розрахувати питому електропровідність матеріалу міжфазового прошарку;
- розрахувати площу поперечного перерізу міжфазового прошарку.

Введемо оцінку рівня надійності K у вигляді правил.

$$\left. \begin{array}{l} C_{FM} \rightarrow 0, \\ \text{Якщо } S_{FM} \rightarrow 0, \\ I \rightarrow \max \end{array} \right\}, \text{ то } K = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{FM} \approx \alpha_F C_F + \alpha_M C_M, \\ \text{Якщо } 0 \leq \alpha_F, \alpha_M \leq 0.1 \\ 0 \leq S_{FM} \leq 0.1, \\ I \rightarrow \text{const} \end{array} \right\}, \text{ то } 0.8 \leq K \leq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{FM} \approx \alpha_F C_F + \alpha_M C_M \\ \text{Якщо } 0.1 \leq \alpha_F, \alpha_M \leq 0.2 \\ 0.1 \leq S_{FM} \leq 0.2, \\ I \rightarrow \text{const} \downarrow \end{array} \right\}, \text{ то } 0.5 \leq K \leq 0.8$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{FM} \approx \alpha_F C_F + \alpha_M C_M \\ \text{Якщо } 0.2 \leq \alpha_F, \alpha_M \leq 0.3 \\ S_{FM} \geq 0.2, \\ I \rightarrow \min \end{array} \right\}, \text{ то } K \leq 0.5$$

Вибір значень відсоткового співвідношення α_F і α_M в межах $0 \leq \alpha_F, \alpha_M \leq 0.1$, $0.1 \leq \alpha_F, \alpha_M \leq 0.2$ та $0.2 \leq \alpha_F, \alpha_M \leq 0.3$ відповідає 10%, 20% та 30%. Вибір такого відсоткового співвідношення обумовлено фізичними умовами існування міжфазового прошарку. При збільшенні

концентрації розчинності одного матеріалу в іншому призводить до знищення композитної системи.

Таблиця 1 – Фізична інтерпретація правил критерію надійності від значення оцінки критерію

№	Оцінка критерію надійності K	Критерій надійності
1	$K = 1$	Дискретний пристрій працює надійно
2	$0.8 \leq K \leq 1$	Дискретний пристрій працює в стандартному режимі, але має відхилення від еталонних значень
3	$0.5 \leq K \leq 0.8$	Дискретний пристрій працює в з відхиленнями від еталонних значень та частковими відмовами
4	$K \leq 0.5$	Дискретний пристрій працює з постійними відмовами

Площа міжфазового прошарку[3] є головним параметром для обчислення сили струму, тому будемо говорити про вплив міжфазового прошарку на формування критерію оцінки рівня надійності дискретного пристрою K .

При збільшенні площі міжфазового прошарку, отримуємо збільшення концентрації речовини міжфазового прошарку, що суттєво впливає на енергопровідність. Зменшення енергопровідності матеріалу веде до перебігної роботи дискретного пристрою.

1. *Кравченко О. В.* Моделювання процесу деградації комп'ютерних компонентів дискретних пристроїв /О.В.Кравченко //Технологічний аудит та резерви виробництва. –2015. – № 5/2(25), 2015.- м. Харків. – С.23-26 DOI: 10.15587/2312-8372.2015.51795.
2. *Кравченко О. В.* Исследование причин деградации материала дискретных устройств для обеспечения их надежности/О.В.Кравченко// Materiály XI mezinárodní vědecko - praktická konference «Věda a technologie: krok do budoucnosti – 2015». – Díl 17. Technické vědy.Matematika. Moderní informační technologie. Výstavba a architektura.: Praha. Publishing House «Education and Science» s.r.o – 112 Stran P.77 –80.
3. *Kravchenko O.V.* Research the causes of degradation of the material discrete devices to ensure their reliable/O.V.Kravchenko//Матеріали III міжнародної науково-технічної конференції «Обчислювальний інтелект», Київ-Черкаси, 2015. – С.283-284, ISBN 978-966-493-975-8.
4. *Локазюк В.М.* Оцінка надійності пристроїв з програмованою логікою/ В.М. Локазюк, Д.М. Медзтий// Вісник Хмельницького університету. – 2010. – №5. – С. 226-232.

УДК 004.89

Ю.В.Крак⁽¹⁾, О.В.Бармак⁽²⁾, Р.О. Багрій⁽²⁾, С.С.Кондратюк⁽¹⁾

⁽¹⁾Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
⁽²⁾Хмельницький національний університет)

КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ ДЛЯ КОМУНІКАЦІЇ ЛЮДЕЙ З ОБМЕЖЕНИМИ МОЖЛИВОСТЯМИ

Дослідження орієнтовані на створення та розвиток засобів спілкування та адаптації у суспільство груп людей з обмеженими можливостями - вадами слуху, неможливістю говорити, щелепо-лицьовими травмами, після інсультів тощо. Одним із засобів такої комунікації є рухи тіла: жести руками, конфігурації кисті, рухи очима та головою тощо. Пропонується комплексний підхід, комп'ютерні технології та апаратно-програмна реалізація для забезпечення спілкування таких людей.

Для розпізнавання інформації, яка передається рухами руки людини, використовуються найбільш перспективні технології: технології рукавичок, давачів п'ястку, 2D та 3D камери та платформи Kinect[1]. Зокрема, платформа Microsoft Kinect призначена для розпізнавання руху і застосування Kinect для розпізнавання жестової інформації показало, що система дозволяє розпізнавати рухи з великими амплітудами, але не спроможна розпізнавати рухи мілкої моторики[2]. Для розпізнавання мілких рухів, особливо рухів пальців людини, потрібно застосовувати контролер Leap Motion[3], який дає можливості для нового способу взаємодії руки людини з обчислювальними пристроями. Контролер Leap Motion є давачем, за допомогою якого перетворюються рухи рук у комп'ютерні команди. До переваг цього контролера можна віднести точний рівень деталізації API Leap Motion, який забезпечує доступ до даних, що відтворюються руками та пальцями. Дані, отримані від API є детермінованими, розпізнає одну руку з п'ятьма пальцями, клієнтський застосунок не потребує інтерпретації отриманих даних. Це контрастує з іншими доступними 3D пристроями сенсорного введення, зокрема з Microsoft Kinect - де рівень сенсорних даних потрібно додатково обробляти та інтерпретувати. До недоліків варто віднести складності в підтримці точності розпізнавання, коли рука не у прямій видимості контролера.

Іншим засобом, який можна використовувати для альтернативної комунікації є рухи голови. Ці рухи можна досить легко розпізнавати за допомогою веб-камери[4]. Рухи очей також можна використовувати для комунікації, але для їх фіксації потрібно відповідний давач[5]. Для створення засобів комунікації також можна використати стандартні

можливості сучасної обчислювальної техніки – маніпулятор миші або сенсорний екран

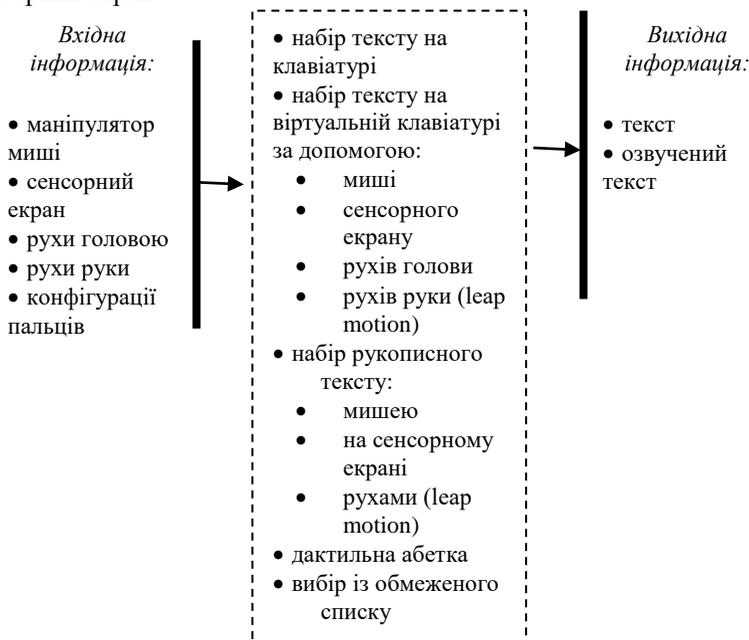


Рис.1. Інформаційна технологія альтернативної комунікації

За допомогою перерахованих засобів управління можна реалізувати комунікацію (див. рис.1.) у вигляді введення (з подальшим озвученням за допомогою синтезатора тексту у звук): 1) рукописного тексту; 2) тексту набраного на клавіатурі чи віртуальній клавіатурі; 3) показу слів за допомогою дактильної абетки жестової мови глухих; 4) показу (вибору) слів із словників за допомогою відповідних жестів (конфігураційних чи рухових).

На рис. 2 зображено дизайн застосування, що реалізує технологію на базі пристрою Leap Motion, за допомогою якого можна керувати курсором рухами руки. Застосування містить наступні області: 1) поле для відображення введеного різними способами тексту; 2) кнопка для озвучення введеної інформації (передбачається створення синтезаторів мови, або використання існуючих); 3) область для відображення списку слів чи виразів, що часто використовуються; 4) область, що може містити віртуальну клавіатуру або місце для введення рукописного тексту.

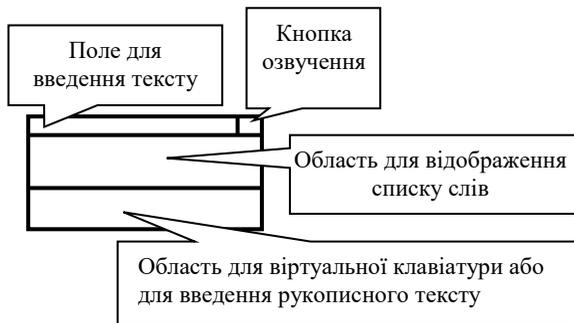


Рис. 2. Дизайн застосування для комунікації

Досліджено процес введення тексту за допомогою віртуальної клавіатури. Управління курсором, при цьому, можливе: маніпулятором миші, сенсорним екраном або рукою (через пристрій Leap Motion). На рис. 3. наведено технологію введення рукописного тексту – за допомогою миші, сенсорного екрану чи рукою через пристрій Leap Motion за допомогою дактильної абетки. Також дослідувались управління курсором за допомогою нахилів голови людини.



Рис. 3. Введення рукописного тексту

Проведені дослідження і пілотні випробовування показали ефективність розроблених методів до створення засобів комунікації людей з обмеженими можливостями. Подальші дослідження направлені на вдосконалення запропонованих інформаційних технологій.

1. Wang R.Y. Real-Time Hand-Tracking with a Color Glove / R.Y. Wang, J. Popovic // ACM Transaction on Graphics (SIGGRAPH 2009). – 28(3), August 2009. – P.63
2. Yang H.-D. Sign Language Recognition with the Kinect Sensor Based on Conditional Random Fields. / H.-D.Yang // Sensors 2015. – №15. – P.135-147.
3. <https://www.leapmotion.com/> Leap Motion | Mac & PC Motion Controller for Games, Design, & More
4. <http://eviacam.sourceforge.net/> Enable Viacam. Free webcam based mouse emulator.
5. <https://theyetribe.com/> Eye tracking, or gaze tracking, is a technology that consists in calculating the eye gaze point of a user as he or she looks around.

УДК 004.422.81

О.О. Кряжич⁽¹⁾, О.В. Коваленко⁽²⁾⁽¹⁾Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України,⁽²⁾Інститут ядерних досліджень НАН України)

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ МОЖЛИВИХ НАПРЯМКІВ ПРИ ОПИСІ ЗАБРУДНЕННЯ МІСЦЕВОСТІ РАДІОІЗОТОПОМ ВОДНЮ - ТРИТІЄМ

Радіоізоотоп водню – тритій, – може бути використаний майже в усіх напрямках, де застосовуються ізотопи: як радіоактивний індикатор, у вигляді джерела іонізуючого випромінювання, як радіоактивне або ядерне паливо, для генерації нейтронів, у складі люмінесцентних джерел світла, у складі рентгенівських джерел і т.п. Широкі можливості практичного використання тритію обумовлені в першу чергу специфікою його властивостей, економічною ефективністю його застосування, технологічністю тощо.

Проте при потраплянні в оточуюче середовище тритій виступає джерелом опромінювання живих організмів. Ядро тритію дуже нестабільне і розпадається з основного стану, перетворюючись в ядро гелію теж в основному стані. Тому компонента бета-випромінювання одна і її абсолютна інтенсивність дорівнює 100%. До людського організму тритій легко проникає через органи травлення з водою, а при випаровуванні забрудненої води разом із повітрям потрапляє до органів дихання.

Основні фізико-хімічні властивості тритію взагалі аналогічні властивостям водню. Тритій, як і водень, активно бере участь у взаємообміні речовин в організмі людини [1], у зв'язку з чим легко стає джерелом опромінювання організму із середини.

Актуальність зазначеної теми обумовлена наступним: не зважаючи на те, що функціонуванню ізоотопів вуглецю і кисню присвячено численні праці, міграцію ізоотопів водню в процесі життєдіяльності організмів розглянуто в роботах науковців дуже фрагментарно. Забруднення території тритієм взагалі важко піддається опису та моделюванню через те, що дуже важко знайти закономірності руху ізоотопу, який за багатьма характеристиками нагадує звичайний атом водню.

Україна після Чорнобильської аварії значно просунулася у дослідженнях з впливу радіонуклідів, у тому числі і тритію, на організми живих істот. Найбільш відомий дослідник в Україні і за кордоном в цій галузі – доктор біологічних наук Б.С. Прістер з Інституту проблем безпеки АЕС НАН України [2]. Також серед Українських науковців, які займаються дослідженням та моделюванням подій, пов'язаних з імовірним

побудови полінома найкращого наближення до $f(x)$ на деякому інтервалі за умов забезпечення відповідної гладкості $P(x)$ [5].

На практиці зазначена задача була вирішена шляхом побудови алгоритму покрокового опису території та написанням комп'ютерної програми «Випадкова точка».

Деяка обрана територія X обмежується прямокутником з координатною сіткою, де розміри кожної фіксованої комірки (клітини) дослідження визначаються дослідником виходячи з поставлених задач. Розмір клітини може бути від декількох кілометрів до (1 x 1) см. В одній з клітин довільно (випадково) обирається базисна точка x_k , визначаються об'єкти для досліджень (рослини, ґрунт, роса, тала вода снігового покриву і т. інш.).

Визначається концентрація небезпечної речовини (зокрема, радіоізотопу водню – тритію), без врахування того, перевищена чи ні гранично припустима концентрація речовини. Після цього від точки x_k будуються вектори (напрями) від 1 до n та здійснюється довільно будь-який малий крок $\alpha_k > 0$ для отримання полюсної точки, яка стане центром відбору нової партії проб. Щоб комірки ділянок досліджень не дублювалися, обирається напрям за методом генерації випадкових чисел.

За отриманими напрямками в полюсних точках збираються проби з базового об'єкта для досліджень, отримуються виміри, дані заносяться до таблиці вимірів, на основі яких буде побудований контур забруднення.

Після цього обирається точка, за якою отримане найбільше значення концентрації небезпечної речовини, вона стає базисною точкою, за якою повторюються перелічені кроки.

Дослідження триває покроково за напрямом, де отримується найбільше значення вимірів. Це необов'язково повинно бути перевищення концентрації речовини, а просто поступове збільшення результатів. Виміри за наведеним способом проводяться до тих пір, поки базисна точка перестане належати ділянці, що досліджується ($x_k \notin X$), або всі отримані результати вимірів будуть від'ємними. Для достовірності досліджень можна також обирати базисною точкою будь-яку іншу точку або високе значення вимірів за полюсними точками.

Наведений підхід з використанням методу Дж. Зойтендейка використано при розробці комп'ютерної програми «Випадкова точка» («Random point») і перевірено на практиці для уточнення зон забруднень території радіоізотопом водню тритієм.

Тестове випробування програмного продукту «Випадкова точка» дозволило уточнити розташування зони концентрації тритію на території підприємства, що тривалий час працювало з цим радіонуклідом. Наведений підхід до опису екологічного стану території дозволяє описати ділянку навіть дуже маленьких розмірів. Так, у наведеному прикладі, точність визначення плями забруднення тритієм складала (5 – 20) см. Візуалізація

результатів за допомогою зазначеної комп'ютерної програми – побудова векторів дослідження, – наведена на рис. 1.

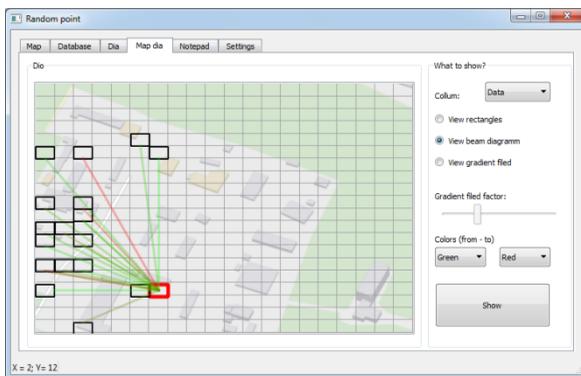


Рис. 1. Побудова векторів дослідження в програмі «Випадкова точка»

За результатами вимірів органічно зв'язаного тритію у соку рослин було встановлено, що гранично допустима концентрація не перевищена, показники вимірів занесені до бази даних досліджень, що формується.

1. Коваленко О.В. Модель управління персоналом підприємств, що працюють з тритієм / О.В. Коваленко // Математичне моделювання в економіці. – 2016. – №1. – С. 74–84.
2. Пристер Б.С. Проблемы сельскохозяйственной радиозкологии и радиобиологии при загрязнении окружающей среды молодой смесью продуктов ядерного деления: монография / Борис Самуилович Пристер; И.о. НАН Украины. Ин-т проблем безопасности атомных электростанций; Предисл. Р. М. Алексахин. – Чернобыль: Ин-т проблем безопасности АЭС НАН Украины, 2008. – 320 с.
3. Коваленко Г.Д., Турбаєвський В.В. Деякі питання моделювання розповсюдження тритію в ґрунтових водах // Ядерні й радіаційні технології – 2004 – т.4, №3. – С. 46-52.
4. Зойтендейк Дж. Методи возможных направлений. – М.: Издательство Иностранной литературы, 1963. – 178 с.
5. Кряжич О.О. Апроксимація складних функцій для опису розвитку локальної надзвичайної ситуації / О.О. Кряжич // Математичні машини і системи. – 2016. – № 1. – С. 148 – 157.

УДК 004.8

В.С. Ленько, Ю.М. Щербина

(Національний університет «Львівська Політехніка»)
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ВІДНОВЛЕННЯ ГРАФІЧНИХ ОБРАЗІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КАРТ КОХОНЕНА

Відновлення графічного образу – це процес відтворення втраченої інформації або певної її частини у графічному образі (зображенні, фотографії). Втраченою інформацією може бути відсутнє значення кольору та певна нечіткість даних. Мета відновлення – отримати більш якісний графічний образ, у якому немає втраченої інформації, або ж її кількість менша порівняно з вихідним зображенням.

Для вирішення проблеми відновлення графічного образу існує велика кількість різноманітних підходів і алгоритмів. У 2010 р. було подано застосування карт Кохонена для відновлення зображень. Отримані результати виявились набагато ліпшими, ніж при використанні методу інтерполяції бікубічними сплайнами. У 2011 р. було проаналізовано, як на якість відновлення впливають параметри карти, а саме розмірність вектора ваги кожного нейрона, кількість нейронів на карті, кількість ітерацій навчання. Отримані результати дали змогу говорити про те, що карти Кохонена можна використовувати для відновлення втрачених мультимедійних даних, де якість відновлення досить висока порівняно з класичними алгоритмами.

Самоорганізаційні карти Кохонена – це спеціальний клас штучних нейронних мереж, робота яких ґрунтується на конкурентному принципі навчання (competitive learning): виходи нейронів карти конкурують між собою за право перейти в стан збудження. Виходом мережі вважають нейрон-переможець (winner takes all).

Карта Кохонена складається з набору нейронів. Кожний нейрон типово описується двома векторами:

- 1) вектор ваги нейрона, m . У загальному випадку розмірність вектора збігається з розмірністю векторів даних;
- 2) вектор координат, p . У загальному випадку вектор p описує точку в просторі, в якому розташований нейрон.

Зазвичай нейрони розташовують на площині у вершинах регулярної решітки з квадратними або шестикутними комітками. У процесі конкурентного навчання нейрони вибірково налаштовують на різні вхідні образи (стимули), а позиції нейронів-переможців впорядковуються стосовно інших.

Ключовими елементами в алгоритмі відновлення графічного образу за допомогою карти Кохонена є наступні:

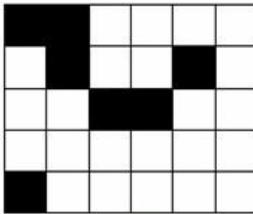
1) x – вектор даних, за якими спостерігають. У застосуванні до відновлення графічного образу це може бути деякий набір пікселів, згрупованих за певним правилом;

2) m – вектор ваги нейрона. За означенням він має бути однієї розмірності з x ;

3) $h_{ci}(t)$ – міра сусідства нейронів. Деяка функція, що повертає відстань між нейронами й залежить від номера ітерації t ;

4) $d(x(t), m_i(t))$ – міра відхилення, яка виявляє, наскільки вектор $x(t)$ не схожий на вектор $m_i(t)$.

Для навчання карти Кохонена треба створити вибірку блоків, причому жоден з них не повинен містити пошкоджених пікселів. Зауважимо, що ці карти безпосередньо залежать від розміру блоку. Тому для опису карти міри пошкодженості потрібно зазначити графічний образ і розмір блоку, якому вона відповідає.



а

3	3	2	1	1	1
3	4	4	3	2	1
1	2	3	3	2	1
1	2	2	2	1	0
1	1	0	0	0	0

б

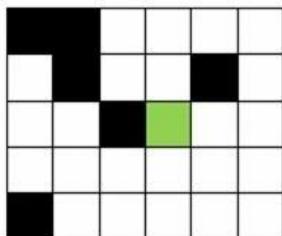
Рис. 1. (а) матричне подання графічного образу розміром 6×5 ; чорні комірки відповідають пошкодженим пікселям; (б) карта міри пошкодженості для блоків розміром 3×3

Процес навчання карти Кохонена розпочинається з ініціалізації значень вагових векторів нейронів карти. Початково усі елементи в кожному з вагових векторів повинні дорівнювати нулю. Задля того, щоб карта мала максимальну кількість інформації з графічного образу, з множини блоків для навчання вибирають 10 найінформативніших блоків і рівномірно розподіляють їх між нейронами карти. Після ініціалізації, навчання карти продовжується за класичною схемою, де кожна ітерація складається з трьох етапів: конкуренція, кооперація та адаптація. Вибір блоків для навчання відбувається випадково. Критерієм зупинки доцільно вибрати факт, який у процесі адаптації жодна компонента у жодному з вагових векторів не змінила свого значення більше, ніж на 1

Процес відновлення пошкоджених пікселів виконується ітеративно, причому на кожній ітерації відновлюється рівно один піксель. Алгоритм ітерації виглядає так.

1. З графічного образу вибирають блок з рівно одним пошкодженим пікселем;
2. Для блоку шукають нейрон-переможець (процес конкуренції);
3. Пошкоджений елемент у блоці замінюється відповідним елементом вагового вектора нейрона-переможця;
4. Виконується оновлення графічного образу, шляхом заміни відновленим значенням відповідного пошкодженого пікселя.

Якість відновлення пікселя значною мірою залежить від його позиції в блоці відновлення. Зазвичай можна створити декілька блоків відновлення для одного пошкодженого пікселя, в яких він займатиме різні позиції. Найоптимальнішим є той блок, у якому пошкоджений піксель є центром блока, проте зрозуміло, що не завжди такий блок задовольняє критерії алгоритму. Коли комірку знайдено, то створюється відповідний блок, зберігаються позиції пошкодженого пікселя. Далі виконується відновлення пошкодженого значення та оновлення відповідного пікселя в графічному образі. Також після кожної ітерації потрібно оновити карту міри пошкоженості блоків, а саме: зменшити на 1 значення в усіх комірках, які входять до блока, центром якого є відновлений піксель.



а

3	3	2	1	1	1
3	4	3	2	1	1
1	2	2	2	1	1
1	2	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0

б

Рис. 2. (а) відновлений піксель; (б) оновлена карта міри пошкоженості для блоків розміром 3×3

Варто зазначити, що в процесі дослідження представленого алгоритму було виявлено обмеженість його застосовності, яка полягає в тому, що графічний образ може містити такі пошкодження, за яких на деякій ітерації відновлення не знайдеться блока з одним пошкодженим пікселем (рис. 3).

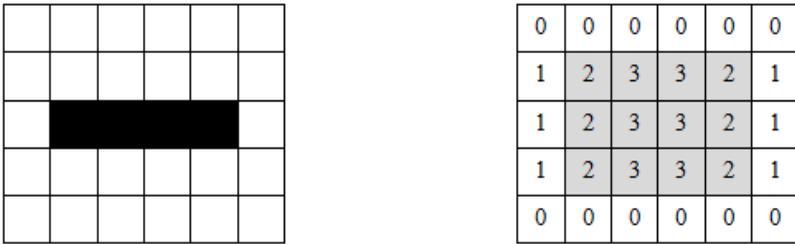


Рис. 3. Пошкодження, які не можливо відновити алгоритмом

Програмним експериментом було виявлено значну залежність якості відновлення графічного образу від параметрів алгоритму, а саме:

- великий розмір блоку погіршує якість відновлення, оскільки він містить багато пікселів, що значно різняться між собою, відповідно їхнє узагальнення – це компроміс, який зазвичай відрізняється від пікселів, що формують блок;
- що більший розмір карти Кохонена, то якісніший результат відновлення, адже існує більша кількість нейронів, і, відповідно, більша кількість класів спостережень;
- використання модифікованих формул для навчання карти сприяє покращенню якості відновлення, оскільки вони адаптовані саме для роботи з графічною інформацією;
- вибір метрики для визначення різниці між пікселями також має вплив на результат відновлення графічного образу;
- початкова ініціалізація нейронів і критерії зупинки навчання карти є суттєвими для якісного відновлення зображення.

1. *Нікольський Ю. В.* Системи штучного інтелекту / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина. – Львів.: Магнолія-2006, 2010. – 279 с.
2. *Хайкен С.* Нейронные сети: полный курс / С. Хайкен, 2-е изд., испр.: пер с англ. – М.: ООО И.Д. Вильямс, 2006. – 1104 с.
3. *Russell S., Norvig P.* Artificial Intelligence: A modern approach / Russell S., Norvig P., 3rd edition. – Pearson, 2009. – 1132 с.

УДК 004.773.2

Ю. М. Линник

(Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)

ОСОБЛИВОСТІ СТВОРЕННЯ ЕФЕКТИВНОГО СЕМАНТИЧНОГО ЯДРА ВЕБ-САЙТУ

З кожним днем Інтернет усе глибше проникає у кожен з аспектів нашого життя. Соціальні мережі, блоги, інформаційні портали, відео архіви, месенджери та хмарні сервіси стали невід'ємною частиною нашої суспільної та професійної діяльності. За допомогою Інтернету ми можемо спілкуватися і ділитися думками, дізнаватися новини та навчатися, шукати інформацію або поширювати її, купувати товари і послуги та відкривати інтернет-магазини. Очевидно, що Інтернет відкриває перед людством практично необмежені можливості, виступаючи каталізатором створення нової, інформаційної моделі суспільства.

Не зважаючи на множину технологій, інструментів та засобів мережі Інтернет основною структурною одиницею Інтернету усе ж залишається веб-сайт. Під веб-сайтом будемо розуміти сукупність веб-сторінок, доступних у мережі Інтернет, які об'єднані як за змістом, так і за навігацією [1]. Як відомо, у мережі Інтернет функціонують мільйони сайтів. Не зважаючи на розмір, тип чи цільове призначення, кожен із них має певну структуру, яка є своєрідним кістяком для розміщення сторінок, розділів, підрозділів, додаткових матеріалів. Очевидно, що першочерговим завданням розробника є створення стрункого порядку з хаотичного скупчення інформації.

Саме вдале структурування якісного контенту, робота із семантикою забезпечує ефективність та рейтинговість сайту. Структура сайту – це та основа (ядро), на якому базується його подальше проектування та просування у мережі Інтернет [2]. Таким чином, ми можемо зробити висновок, що в основі проектування якісної структури сайту лежить ефективно сформоване семантичне ядро сайту.

З наукової точки зору, семантичне ядро сайту – це набір пошукових слів, їх морфологічних форм і словосполучень, які найбільш точно характеризують вид діяльності, товар або послугу, пропонувані сайтом. Саме тому ядро повинно бути чітко і якісно сформульованим ще на початку роботи над сайтом, адже воно є основою для подальшого розвитку сайту.

Для пошуку оптимального алгоритму побудови ефективного семантичного ядра веб-сайту розглянемо основні категорії та поняття нашого дослідження.

Цільова аудиторія сайту

Ефективність та успіх веб-сайту безпосередньо залежить від кількості відвідувачів (масштабу аудиторії). Проте, ця аудиторія повинна бути цільовою, тобто цілі користувачів повинні збігатися з цілями сайту. Люди, знайшовши на ваш веб-сайт повинні побачити його чітку та зрозумілу структуру. Зміст сайту повинен відповідати тим ключовим словам, за якими користувачі знайшли ваш веб-сайт у пошуковій системі. Інакше, враження про ваш веб-сайт різко погіршується і користувач іде із нього. Уявіть ваші відчуття, коли б ви розраховували потрапити у крутий гіпермаркет, а прийшли у складські приміщення із напівпорожніми полицями.

Спируючись на сказане вище, можна зробити висновок: якщо сайт матиме навіть 10 тис. відвідувачів у день, однак, вони не будуть зацікавлені у тому що пропонує даний сайт, то його можна вважати неефективним. Натомість, коли користувач прийде на сайт і знайде бажану інформацію, запит даного користувача як і самого користувача можна назвати цільовим.

Тому важливо ще на початку роботи:

1. Правильно визначити цільову аудиторію сайту.
2. Сформувати ефективне семантичне ядро сайту для визначеної категорії користувачів.

Пошукова система та частотність запиту

Одним із основних інструментів пошуку у мережі Інтернет є пошукові системи. Кожен із нас знає, що для того, щоб відшукати необхідну інформацію, необхідно лише ввести у пошукове певну обмежену кількість слів – сформувати *пошуковий запит*. Під *пошуковим запитом* ми будемо розуміти кількість введених запитів користувачем пошукової системи, щодо певного слова чи фрази за певний проміжок часу або ж міра популярності сайту серед користувачів [2].

Таким чином, створюючи семантичне ядро сайту, дуже важливо ввести таке поняття як «частотність запитів» – як часто користувачі набирають певний запит в пошукових системах.

Нехай, ми ведемо у пошукове поле словосполучення «купити телефон у Львів». Google запропонує вам 568 тисяч пошукових результатів. Yandex – 395 тисяч пошукових результатів. Якщо ж написати «купити телефон **PROBA** у Львів», то пошукових результатів буде лише приблизно 170 тисяч.

Таким чином, за частотністю бувають такі види пошукових запитів:

- Високочастотні – ті, що ми набираємо кожного дня (наприклад, купити телефон, читати книгу, скачати реферат, тощо).
- Середньо частотні є більш конкретизовані (наприклад, купити телефон Proba).
- Низькочастотні (запити, що граматично чи лексично складно побудовані або дуже конкретизовані, наприклад, купити телефон Proba

Piligrum S4 червоного кольору із чорними кнопками).

У залежності від того, на який вид пошукових запитів орієнтується сайт, буде залежати стратегія його просування. При побудові семантичного ядра сайту, надзвичайно важливо вибрати оптимальну кількість ключових слів кожної із вищезгаданих категорії. Оскільки їх некоректний підбір може привести до неочікуваних наслідків. Наприклад, ваш сайт просто ніхто не знайде серед сотень-тисяч більш рейтинговіших.

Методи створення семантичного ядра сайту/

Спираючись на сказане вище, розглянемо шляхи створення ефективного семантичного ядра веб сайту.

По-перше, за умови, що ви працюєте над створення невеликого веб-сайту(до 50-60 сторінок) семантичне ядро сайту можливо створити, використовуючи, умовно кажучи, лише папір та ручку. Якщо ви маєте багато вільного часу, сил і бажання, ви за певний час таки впораєтесь із цим завданням.

Іншим шляхом створення семантичного ядра веб-сайту є використання сучасних спеціалізованих веб-сервісів. Існує велика кількість онлайн сервісів та програм, що зроблять процес створення семантичного ядра легким та швидким. Виділимо такі основні їх класи:

Системи аналітики: Google Analytics, Яндекс.Метрика, LiveInternet, тощо.

Сервіси пошукових систем: Яндекс Вордстат, Keyword Planner від Google, Тренди Google, тощо.

Готові оффлайн та онлайн бази: База Пастухова, UP Base, KeyBooster, тощо

Сервіси аналізу конкурентів: SpyWords, Prodvigator, Spy Fu, Alexa, тощо.

Спеціалізовані сервіси підбору семантики: keywordtool.io, keywords.megaindex.ru, wordtracker.com, тощо.

Програми для роботи із семантичним ядром: Key Collector, Yandex Wordstat Helper, Макрос от Devaka

З їх допомогою ви зможете підібрати ключові слова для власного сайту, а також оцінити конкурентів, за якими ключовими словами просувають сайт вони. І, зробивши відповідні висновки, сформувані ефективне семантичне ядро сайту, яке забезпечить прихід саме вашої цільової аудиторії.

Етапи створення семантичного ядра

1. «Мозковий штурм»

На даному етапі джерелом усіх можливих слів є ваш власний мозок. Перед собою можна поставити такі питання:

- Чим я займаюсь ?
- Якими загальними словами можна описати тематику моєї справи ?

- Чи існує спеціальна термінологія чи сленг ?

«Мозковий штурм» бажано проводити декілька разів, щоб зібрати якнайбільше варіантів.

2. Аналіз статистики пошукових систем

Як вже згадувалось, існує безліч сервісів які стануть вам у пригоді, проаналізують статистику пошукових систем і частоту введення подібних запитів.

3. Відсіювання слів

На даному етапі вам потрібно буде видалити ті слова, за якими ви точно не збираєтеся просуватися. Таких, як правило, більше половини. Для цього бажано відразу скористатися готовими списками стоп слів як загальними, так і спеціальними по вашій тематиці.

Також, варто очистити запит від фраз, які не несуть особливого смислового навантаження і не впливають на пошук.

Наприклад, для інтернет магазинів можна видалити такі фрази, які містять такі ключові слова: купити, продаж, ціна, інтернет магазин, тощо.

4. Розподіл списку запитів по сторінках сайту

Варто розмістити основні ключові слова на головній сторінці та на початку всіх категорій чи підкатегорій, це допоможе пошуковій системі краще зорієнтувати користувача і привести саме до вас.

Висновки

1. *Сторінка повинна відповідати на запит користувача.* Всім до вподоби, коли серед масиву інформації можна швидко і легко знайти те, що потрібно, тому саме це приваблюватиме відвідувачів вашого сайту.

2. *Кількість та якість ключових слів.* Кількість ключових слів не повинна бути замалою чи зовеликою на обсяг тексту; а також ви повинні охоплювати занадто загальні запити, а натомість більш конкретні. І навпаки, занадто вузькі запити не дадуть вам достатньої кількості відвідувачів. Потрібно шукати золоту середину.

3. *Подальший розвиток сайту.* Зібравши одного разу семантичне ядро, не можна залишати його незмінним. З'являються нові товари і технології, тому відповідно з'являються нові запити, а старі в свою чергу втрачають актуальність. Тому, мінімум один раз на півроку-рік необхідно проводити актуалізацію семантичного ядра, підключати нові запити, а старі – що втратили актуальність – виключати.

1. *Веб-сайт* [Електронний ресурс] // Вікіпедія. Вільна енциклопедія. – Режим доступу : <https://uk.wikipedia.org/wiki/Веб-сайт>
2. *Кокшаров С.* SEO: Поисковая Оптимизация от А до Я – Средний уровень / С. Кокшаров, 2014.- 576 с.
3. *Seo Словник* – Igroup Ukraine [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://igroup.com.ua/seo-articles/>

УДК 681.3.07

В.Л Лисицький⁽¹⁾, Н.Д Гернет⁽²⁾⁽¹⁾Харківський національний технічний університет «ХПІ»,⁽²⁾Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

СТРУКТУРНИЙ ТА ПАРАМЕТРИЧНИЙ СИНТЕЗ РОЗПОДІЛЬНОЇ ПІДСИСТЕМИ ЛОГІСТИЧНОЇ СИСТЕМИ ТЕРИТОРІЇ

В якості території розглядається ареал цілеспрямованого, масованого, соціально-економічного зростання, який повинен оптимізуватися з адміністративних, соціальних, економічних, територіальних позицій і бути структурно і функціонально цілісним і безперервним відносно ринку труда, транспортних комунікацій, виробничих і ресурсних баз і т. і [1, 3]. Для підвищення ефективності соціально-економічного розвитку території шляхом збільшення рівня регіонального національного продукту, що створюється, необхідно підвищувати доход від реалізації продукції, що виробляється, зменшувати витрати на її транспортування та ризики. Одним з суттєвих шляхів підвищення доходів і зменшення витрат є ефективна використання наявної регіональної логістичної системи з метою за забезпечення доставки товарів до потрібної точки території у потрібний час, у потрібному об'ємі та формі [2]. Досягнення вказаної мети залежить від: географії та природних ресурсів території; розміщення центрів виробництва продукції; розміщення центрів споживання продукції; чисельності та розподілення населення; кількості та розміщення розподільних центрів (РЦ); транспортної системи території та т. і.

В подальшому передбачається, що розміщення центрів виробництва і споживання продукції, розподіл і чисельність населення фіксовані. Також суттєво не змінюється транспортна система. У цьому випадку важливим фактором, що впливає на соціально-економічний розвиток території, є кількість і розміщення РЦ, які обслуговують різні торговельні точки, оскільки це впливає на план виробництва продукції, меню споживання населення, на ефективне управління виробництвом і споживанням продукції, потоком продукції в процесі її руху впродовж логістичних ланцюгів поставок [3]. У зв'язку з цим ставиться задача визначення такого числа РЦ і розподілу їх на території, які забезпечуватимуть виробництво продукції, що створює максимальну вартість, мінімізуватимуть транспортні видатки на задоволення потреб споживачів. Процес рішення задачі складається з кількох етапів, на першому з яких визначається кількість необхідних РЦ, що забезпечать мінімальні видатки на збереження і розподіл продукції, запобігання дефіциту, заданий мінімальний рівень обслуговування споживачів. Для цього пропонується ітераційна процедура закріплення

споживачів до пунктів розподілення. На першій ітерації вирішується задача обрання місця розташування РЦ

$$L = \min \sum_{j=1}^n r_j \cdot m_j, \quad \sum_{j=1}^n m_j = m, \quad (1)$$

m_j - число комплектів $\vec{e} = (e_1, \dots, e_i, \dots, e_k)$ продукції, що визначає попит на продукцію j -го споживача, n - число споживачів, e_i - об'єм i -го продукту в комплекті, $i = \overline{1, k}$, k - число продуктів у комплекті, m - сумарний попит на продукцію в території, L - сумарна оцінка витрат на збереження та розподіл продукції в першому РЦ, $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$ - відстань від j -го споживача до РЦ в обраній прямокутній системі координат, (x, y) - координати РЦ, (x_j, y_j) - споживача.

В результаті розв'язання задачі (1) визначаються координати

$$x^* = \sum_{j=1}^n x_j \cdot m_j / m, \quad y^* = \sum_{j=1}^n y_j \cdot m_j / m \quad (2)$$

РЦ та значення C_j витрат на збереження та розподіл комплекту продукції на одиницю відстані від j -го споживача до РЦ. Обрахувавши для кожного j -го споживача витрати $L_j = C_j \cdot r_j \cdot m_j$ на збереження та розподіл числа комплектів продукції, що дорівнює попиту m_j , і проранжирувавши споживачів за ступенем зростання міри L_j , виділяємо споживачів, для яких $L_j \leq h$, h - допустимий поріг витрат. Споживачів з номером j , що належать множині $\Pi_1 = \{j : L_j \leq h\}$ закріплюємо за першим РЦ, який характеризується об'ємом $M_1 = \sum_{j \in \Pi_1} m_j$ комплектів продукції, що розподіляється.

Для визначення місця розташування другого РЦ процедуру, що описано, повторюємо для множини споживачів $\Pi - \Pi_1$, де Π - множина усіх центрів споживання території, і отримуємо множину $\Pi_2 = \{j \in (\Pi - \Pi_1) : L_j \leq h\}$ споживачів, закріплених до другого РЦ, який розподіляє число комплектів, що дорівнює $M_2 = \sum_{j \in \Pi_2} m_j$. Далі визначаємо

місце розташування третього РЦ і так доти, поки усі центри споживання не будуть розподілені між центрами збереження і розподілення комплектів продукції. Кількість k РЦ, що створюються, логістичної системи території

залежить від величини порога h . Збільшення h призводить до зменшення k , а зменшення h призводить до збільшення k .

Сумарні витрати на створення розподільної системи при деякому h_0 досягають мінімального значення. Величину h_0 знаходять шляхом чисельних експериментів з використанням моделі (1) і рішень (2).

Для формування плану виробництва продукції $j = \overline{1, m}$ виробником, використовується ресурсна модель

$$z_j \rightarrow \max, \quad A_j \cdot \bar{x}_j \leq \bar{b}_j, \quad B_j \cdot \bar{x}_j \geq z_j \cdot \bar{e}, \quad \bar{x}_j \geq 0, \quad \bar{z}_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

де \bar{z}_j - максимальна кількість комплектів \bar{e} , які може виробити j виробник, що має обмежені ресурси \bar{b}_j , технології виробництва продукції, які визначають технологічну матрицю A_j і матрицю продуктивностей продукції B_j .

Закріплення виробників до РЦ визначають в результаті розв'язання транспортної задачі (ТЗ)

$$L = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m C_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min, \quad x_{ij} \geq 0, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq z_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad \sum_{i=1}^k x_{ij} = M_j \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

Якщо задача (4) є закритою ТЗ, то $z_i, i = \overline{1, m}$ визначають план виробництва, а рішення $x_{ij}, j = \overline{1, k}$, план поставок продукції для i -го виробника. Якщо задача (4) є відкритою ТЗ, то у цьому випадку вирішується задача організації експорту (імпорту) продукції з іншими територіями.

1. Джонсон Д., Вуд Д., и другие. Современная логистика. М.: Издательский дом «Вильямс». – М. 2002.
2. Лисицький В.Л. Совершенствование системы управления функционированием и развитием территории на основе современных информационных технологий. // Материалы 7-й международной междисциплинарной школы-конференции «Сучасні проблеми науки та освіти». – Х.: ХНУ, УАЖНО.2007р.
3. Сток Д.Р., Ламберт Д., М. Стратегическое управление логистикой. – М.: ИНФРА – М. 2005.

УДК 519.6

Н. В. Майко, В. Л. Рябічев

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ПОКРАЩЕНІ ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТУ ВІД КРАЙОВИХ УМОВ

У теорії та застосуваннях методу сіток для стаціонарних і нестаціонарних задач важливим є питання про точність наближеного розв'язку поблизу тієї частини межі області, де задана крайова умова Діріхле. Оскільки сітковий розв'язок задовольняє таку умову точно, природно очікувати, що в примезових вузлах швидкість збіжності дискретного розв'язку до точного розв'язку буде вищою, ніж у внутрішніх вузлах. Це припущення підтверджується в ряді праць (див., наприклад, [1, 2]).

Мета цієї публікації – продовжити дослідження праці [1] й отримати покращені оцінки точності сіткових розв'язків першої крайової задачі для двовимірного рівняння теплопровідності, які враховують вплив крайової умови.

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \Delta u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in D_T = D \times (0,T), \\ u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \Gamma \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in D, \end{aligned} \quad (1)$$

де $x = (x_1, x_2)$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $D = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\}$ –

одичинний квадрат, $\Gamma = \partial D$ – межа квадрата D .

Використовуючи позначення [3], апроксимуємо задачу (1) різницевою схемою

$$\begin{aligned} y_{\bar{t}}(x,t) &= (\Lambda y)(x,t) + (T_1 T_2 f)(x,t), \quad (x,t) \in \omega \times \omega_{\bar{t}}, \\ y(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \gamma \times \omega_{\bar{t}}, \\ y(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \omega, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha}$, $x \in \omega$, $\alpha = 1, 2$.

Для похибки $z(x,t) = y(x,t) - u(x,t)$ маємо задачу

$$\begin{aligned} z_{\bar{t}}(x,t) &= (\Lambda z)(x,t) + \psi(x,t), \quad (x,t) \in \omega \times \omega_{\bar{t}}, \\ z(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \gamma \times \omega_{\bar{t}}, \\ z(x,0) &= 0, \quad x \in \omega, \end{aligned}$$

де $\psi = \Lambda u + T_1 T_2 f - u_{\bar{t}} = \Lambda_1 \eta_1 + \Lambda_2 \eta_2 + \eta_3$ – похибка апроксимації,

$$\eta_\alpha(x, t) = u(x, t) - (T_{3-\alpha}u)(x, t), \quad \alpha = 1, 2, \quad \eta_3(x, t) = \frac{\partial(Tu)}{\partial t}(x, t) - u_t(x, t),$$

$$(x, t) \in \omega \times \omega_\tau.$$

На множині H_h сіткових функцій, які задані на $\bar{\omega}$ і перетворюються на нуль на γ , визначимо скалярний добуток і норму:

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} h^2 y(x) v(x), \quad \|v\| = \|v\|_{L_2(\omega)} = \sqrt{(v, v)} = \left(\sum_{x \in \omega} h^2 v^2(x) \right)^{1/2}.$$

Відомо, що різницева спектральна задача

$$\begin{aligned} \Delta w + \lambda w &= 0, & x \in \omega, \\ w &= 0, & x \in \gamma, \end{aligned}$$

має розв'язки

$$\begin{aligned} w_{k_1 k_2}(x) &= 2 \sin k_1 \pi x_1 \cdot \sin k_2 \pi x_2, \quad \|w_{k_1 k_2}\| = 1, \\ \lambda_{k_1 k_2} &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h}{2} + \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h}{2}, \quad k_1, k_2 = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= (\Delta v)(x, t) + 1, & (x, t) \in \omega \times \omega_\tau, \\ v(x, t) &= 0, & (x, t) \in \gamma \times \omega_\tau, \\ v(x, 0) &= 0, & x \in \omega. \end{aligned}$$

Її розв'язок $v(x, t)$ має вигляд

$$v(x, t) = \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left(1 - \left(1 + \tau \lambda_{k_1 k_2} \right)^{-t/\tau} \right) \lambda_{k_1 k_2}^{-1} c_{k_1 k_2} w_{k_1 k_2}(x), \quad (x, t) \in \omega \times \omega_\tau.$$

Справджується таке твердження.

Т е о р е м а. Нехай розв'язок $u(x, t)$ задачі (1) задовольняє умову $u \in W_\infty^4(D_T)$. Тоді точність різницевої схеми (2) характеризується оцінкою

$$|z(x, t)| \leq M v(x, t) (\tau + h^2), \quad (x, t) \in \omega \times \omega_\tau,$$

де стала M не залежить від h і τ , а для функції $v(x, t)$ рівномірно по $t \in \omega_\tau$ виконуються співвідношення $v(x, t) = O(h)$ і $v(x, t) = O(h^2 \ln h^{-1})$ поблизу сторін і вершин області D відповідно.

1. *Макаров В. Л., Демків Л. І.* Оцінки точності різницевих схем для параболічних рівнянь, що враховують початково-крайовий ефект // Доповіді НАН України. – 2003. – № 2. – С. 26–32.
2. *Mayko N. V.* The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for the two-dimensional heat equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2013. – № 3(113). – P. 91–106.
3. *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М. Высшая школа, 1987. – 296 с.

УДК 532.526

В. Мамчук

(Національний авіаційний університет)

РОЗРАХУНОК ДЕЯКИХ ТУРБУЛЕНТНИХ ПРИМЕЖЕВИХ СТИСЛИВИХ ШАРІВ

Математичне моделювання складних турбулентних пристінних течій, які виникають при застосуванні пристроїв і транспортних засобів, що використовують крило в якості рушія або несучого чи керуючого елемента, не можливе без розуміння природи розвитку течії в примежевому шарі (ПШ). Примежеві ж пристінні струмені – один із ефективних засобів керування ПШ, що широко застосовується в аеро-гідродинаміці. З математичної точки зору розрахунок таких течій складає серйозну проблему і по сьогоднішній день [1-10], оскільки в практичних задачах їх необхідно розглядати як турбулентні, а характеристики турбулентності значною мірою залежать від геометрії притаманного пристінному струменю немонотонного профіля поздовжньої складової осередненої швидкості. Крім того, реальна обтічна поверхня має певні особливості (кривизна, шорсткість тощо) і взаємодіючи з потоком, впливає на формування пристінної струменевої течії.

Математичне моделювання турбулентних стаціонарних нестисливих примежевих шарів та пристінних струменів, що розвиваються вздовж поверхонь, які можуть бути гладкими або шорсткими: шорсткість розглядається у вигляді канавок квадратної форми, розташованих паралельно або перпендикулярно до напрямку розвитку течії – один з наукових напрямів автора. Метою даної праці є висвітлення доробок автора на шляху вдосконалення розрахункових методів та математичної моделі [2], яка має деякі переваги перед іншими, так щоб вона описувала як можна більше видів турбулентних пристінних течій.

1. Математичне моделювання розглядуваних видів течій. ПШ є одним з найрозповсюдженіших видів течії в'язкої рідини, система диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описує його та пристінний струмінь має вигляд

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

де u, v – проекції швидкості на осі Ox та Oy відповідно.

Високоєфективний без ітераційний метод розрахунку системи рівнянь (1), який базується на основі різницевої схеми з підвищеними стабілізуючими властивостями, описано в роботі [2]. У цій праці проводяться дослідження з адаптації цього методу на зазначені вище розрахункові випадки.

Однією з найбільш довершених моделей, що достатньо повно та істотно враховує накопичені на даний час відомості про структуру та властивості деяких видів пристінних течій та процеси турбулентного перемішування в них є модель турбулентної в'язкості, запропонованої в роботі.

Оскільки профіль осередненої швидкості для течії, яка вивчається, має складну форму, то для описування коефіцієнта турбулентної в'язкості μ_t , на першому етапі, для кожної з ділянок використовувалися співвідношення з робіт [1-5] для початкової ділянки

$$\mu_t = \chi \rho \delta u_H \gamma \operatorname{th} \frac{l \sqrt{\bar{\tau}}}{\chi \delta u_H}, \quad l = ky \operatorname{th} \frac{\operatorname{sh}^2(\chi_1 y^+) \operatorname{th}(\operatorname{sh}^2(\chi_2 y^+))}{ky \sqrt{\bar{\tau}}}; \quad (2)$$

для струменевої і слідної ділянок

$$\mu_t = \begin{cases} \rho \chi_{\text{ст}} \delta_{\text{ст}} (u_{\text{max}} - u_{\text{min}}) \gamma & \text{при } \delta_{\text{max}} \leq y \leq \delta_1, \\ \rho \chi_{\text{сл}} \delta_{\text{сл}} (u_{\text{min}} - u_h) \gamma & \text{при } \delta_1 < y \leq \delta; \end{cases} \quad (3)$$

де k, χ, χ_1, χ_2 – коефіцієнти моделі; δ – товщина примежевого шару або пристінного струменя; l – довжина ділянки змішування; ρ – густина; u_H – значення швидкості на зовнішній межі ПШ (струменя); $\bar{\tau}$ – безрозмірне напруження тертя в околі стінки:

$$\bar{\tau} = \begin{cases} 1 + \Phi_1 \eta & \text{при } \Phi_1 \geq 0, \\ \frac{1}{1 - \Phi_1 \eta} & \text{при } \Phi_1 < 0; \end{cases} \quad \Phi_1 = \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dp}{dx}$$

– формпараметр К. К. Федяєвського; p – тиск; τ_w – значення дотичного напруження тертя на поверхні; $\eta = y/\delta$; $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ – динамічна швидкість; $y^+ = y v_* \rho/\mu$; $\gamma = \sqrt{1 - \eta}$ – функція, яка враховує переміжність течії; $\chi_{\text{ст}}, \chi_{\text{сл}}$ – емпіричні сталі моделі; $\delta_{\text{ст}}$ і $\delta_{\text{сл}}$ – товщини струменевої та слідної ділянок відповідно.

За k приймалася відома формула з [9]:

$$k = 0,4 + 0,182275 \cdot (1 - e^{-0,32068\Phi_1}).$$

Коефіцієнти χ, χ_i бралися з [1-5].

В рамках розрахункового методу виявилась доцільною модифікація пов'язана з використанням сплайнів для задання початкових та граничних умов на зовнішній межі турбулентного ПШ, зокрема в роботі [9] вони з успіхом були застосовані для інтерполяції табличної функції, яка описує форму профіля крила літака.

Чисельні розрахункові експерименти показали, що співвідношення (2) із [1] можна використовувати тільки для певних, в основному безградієнтних ПШ (у цьому випадку від нього можна взагалі відмовитися

застосувавши «стару» модель Прандтля, оскільки $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{sh } \alpha / \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{th } \alpha / \alpha = 1$), тоді як (3) – автора застосовне і для моделювання пристінного струменя. Для багатьох практичних задач необхідно моделювати течії, які розвиваються в діапазоні від значних додатних до від’ємних градієнтів тиску. Зокрема практично найбільш цікавим є дослідження течій, що формуються під впливом значних додатних градієнтів тиску, що приводять до виникнення небажаного на практиці явища відриву турбулентного ПШ. Тому для поширення можливостей моделі (2-3), щодо використання її для більш широкого кола прикладних задач, необхідні додаткові дослідження і уточнення деяких залежностей модельних коефіцієнтів від параметрів течії, що враховують градієнт тиску. Що і проводилося на наступних етапах чисельних експериментів.

Для цих цілей проводилися модифікації не лише коефіцієнтів моделі (2-3), а й її структури. Чисельні експерименти, проведені за викладеною методикою, дозволили у випадку обчислення характеристик градієнтних течій, в першому наближенні запропонувати наступні формули:

$$\mu_t = \chi \rho \delta u_H \gamma \ln \left(\frac{l \sqrt{\tau}}{\chi \delta u_H / v_*} + 1 \right), \quad l = ky; \quad (4)$$

$$k = 0,223 + 0,121 \arctg \frac{du_H}{dx}, \quad \chi = 0,01 + \frac{1}{75 + (2,5 + \Phi_1)^2}. \quad (5)$$

Попередні розрахунки порівнювалися з відомим експериментальним матеріалом [6] та [10] і дали обнадійливі результати, що дало можливість зробити висновок про доцільність продовження чисельних експериментів з метою уточнення формул (4) – дає можливість уникнути використання емпіричних коефіцієнтів χ_1 і χ_2 , та (5) з використанням більш широкого обсягу експериментального матеріалу. З зазначеною вище метою були проведені чисельні експерименти і за формулою (2), що дає можливість уже на теперішньому етапі для k запропонувати формулу (5), в якій перший числовий доданок в правій частині замінявся на 0,4 та формулою (4), в якій l бралось із (2). Завдяки цьому дещо покращувалися розрахункові результати. Такі ж експерименти проводяться за формулою аналогічною (2), в якій th замінюється на \arctg але, відповідно, з іншими модельними коефіцієнтами k , χ , χ_1 , χ_2 .

Результати обчислень порівнювалися з результатами інших авторів, зокрема [1], що мають перевагу над іншими і продемонстрували більш точну відповідність розрахункових значень експериментальним даним а отже підтвердили доцільність запропонованих вище модифікацій.

2. Результати тестування. В наведених нижче ілюстраціях розрахунків прийнято єдиний принцип подання розрахункової інформації для демонстрації результатів моделювання, а саме: наводяться порівняння розрахованих розподілів швидкості $\bar{u}(y)$ ($\bar{u} = u/u_H$, $\bar{x} = x/L$, $\bar{y} = y/L$, $\bar{u} = \bar{u}(\bar{y})|_{x=x_0}$ – початкові умови, L – характерний розмір обтічної поверхні) з наявними з експериментальних робіт вимірними профілями швидкості в різних перерізах уздовж напрямку розвитку ПШ чи пристінного струменя. Таке порівняння локальних розподілів швидкості має перевагу над порівнянням розподілів уздовж координати x інтегральних характеристик $\delta^* = \int_0^\delta (1 - u/u_H) dy$ – товщина витіснення та $\delta^{**} = \int_0^\delta u/u_H (1 - u/u_H) dy$ – товщина втрати імпульсу, які на кожному кроці знаходились за допомогою квадратурної формули Сімпсона, досліджуваних течій, оскільки дає змогу простежити характер відтворення розрахунковим методом деформації профілю швидкості під впливом умов розвитку течії. Розрахунки обох течій проводилися за власною моделлю турбулентності.

Сліди, що утворюються за окремими елементами крила, розташованими над обтічною поверхнею, взаємодіють з примежевим шаром на його поверхні. Математичне моделювання такої взаємодії сліду з примежевим шаром представляє особливу практичну цінність, оскільки воно необхідне для оптимізації форми профілю крила, передкрилка та закрилка. Крім того, дослідження механізмів взаємодії має важливе значення для поглибленого розуміння природи турбулентності.

Тому показано результати порівняння чисельних розрахунків з експериментальними даними роботи [6] – взаємодії сліду з примежевим шаром: слід є результатом злиття примежевих шарів, що утворилися на верхній і нижній поверхнях симетричного профілю NASA 0012 (довжина хорди 100 мм, d висота щілини між обтічною поверхнею і профілем), встановленим під нульовим кутом атаки. Слід зазначити, що і в цьому випадку застосовані модель і метод дозволили фізично коректно змоделювати основні властивості, притаманні розглянутому виду пристінної течії, що підтверджується відтворений шляхом розрахунку поступовий перехід від немонотонних профілів швидкості, характерних для пристінних струменів, до монотонних розподілів їх, притаманних ПШ.

Висновки

1. Порівняння розрахункових результатів з відомими експериментальними даними показують, що запропоновані підходи з математичного моделювання розглянутих видів турбулентних течій дають змогу моделювати течії адекватно їх фізичним властивостям.

2. Розроблена математична модель для розрахунку турбулентних примежевих шарів і пристінних струменів дає можливість розраховувати і такий складний та практично цінний вид течії, як слід за тілом,

розташованим в примежевому шарі гладкої поверхні, що дає змогу сподіватися на подальші узагальнення запропонованих підходів на більш складні види течій.

1. *Мовчан В.Т., Захарюгин Б.Д.* Расчет турбулентного пограничного слоя на основе единого представления турбулентной вязкости поперек пограничного слоя // Прикладная аэродинамика, 1979. – С. 38 – 44.
2. *Мамчук В.І.* Модель турбулентності та результати розрахунків плоских турбулентних пристінних струменів // Вісник КМУЦА. – К.: КМУЦА. – 1998. – № 1. – С. 291–294.
3. *М. Лунис, В.И. Мамчук, В.Т. Мовчан, Л.А. Романюк, Е.О. Шквар.* Алгебраические модели турбулентной вязкости и теплопроводности в расчетах пристенных турбулентных течений // Прикладна гідромеханіка. – 2001. – Т. 3 (75), №1. – С. 37–45.
4. *В.І. Мамчук.* Математичне моделювання розвитку турбулентних примежевих шарів та пристінних струменів на пластинах, які коливаються // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2002. – 4(24). – С. 65–67.
5. *В.І. Мамчук.* Математичне моделювання розвитку турбулентних пристінних течій на тілах, які коливаються // Вісник Львів. ун-ту, Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2002. – Вип. 4. – С. 131–136.
6. *Тулапуркара Э.Г., Рамжи В., Раджасекар Р.* Взаимодействие пограничного слоя со следами тел различной формы // Аэрокосмическая техника. – 1990. – № 12. – С. 3–10.
7. *Хинце И.О.* Турбулентность. – М.: Физматгиз, 1963. – 680с.
8. *Хорстмен.* Модель турбулентности для расчета неравновесных течений при положительном градиенте давления // Ракет. техника и космонавтика, 1977. – 15, № 2. – С. 5–7.
9. *Ahlbery J.H., Nilson E.N., Walsh J.L.* (1967). Theory of Splines and Their Applications.– New York.
10. Computation of turbulent boundary layer – Proceedings AFOSR–IFR–Stanford Conference. – Vol.1. –
Ed. Kline S.I., Morcovin M.V., Sovran G., Cockrell D. I. – 1968. – Vol.2. – *Ed. Coles D.E., Hirst E.A.* – 1969. – 519 p.

УДК 519.85

М. Я. Марко, Г. Г. Цегелик

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ІДЕАЛЬНОЇ ТОЧКИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЦТВА

Розглянемо використання методу ідеальної точки [1-3] для розв'язування двокритеріальної задачі планування виробництва, в якій за критерії оптимальності пиймається прибуток від виробництва і попит на продукції, що виготовляється.

Нехай n – кількість найменувань продукції, що може виготовляти підприємство; m – кількість різних ресурсів, що використовуються у виробництві продукції; a_{ij} – кількість одиниць i -го ресурсу, що використовується для виробництва одиниці продукції j -го найменування; b_i – кількість одиниць i -го ресурсу, що може використовуватись в виробництві; p_j – прибуток від виробництва одиниці продукції j -го найменування; r_j – попит на продукцію j -го найменування; x_j – план виробництва продукції j -го найменування (шукані величини). Тоді математична модель задачі матиме вигляд

$$P = \sum_{j=1}^n p_j x_j \rightarrow \max, \quad R = \sum_{j=1}^n r_j x_j \rightarrow \max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Для розв'язання задачі нами використаний метод ідеальної точки. Тоді скаляризована задача матиме вигляд:

$$\left(\sum_{j=1}^n p_j x_j - a_1 \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n r_j x_j - a_2 \right)^2 \rightarrow \min$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

де $a = (a_1, a_2)$ – ідеальна точка, яка визначається так:

$$a_1 = \max \sum_{j=1}^n p_j x_j, \quad a_2 = \max \sum_{j=1}^n r_j x_j$$

на множині, що визначається нерівностями .

Для відшукування a_1, a_2 можна використати симплексний метод [4], оскільки це є задачами лінійного програмування. Для розв’язування скаляризованої задачі можна використати, наприклад, метод множників Лагранжа [5,6].

Приклад. Методом ідеальної точки розв’язати таку задачу:

$$P = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \tag{1}$$

$$R = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max, \tag{2}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20, \end{cases} \tag{3}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{4}$$

Розв’язування. Знайдемо спочатку ідеальну точку $a = (a_1, a_2)$. Для цього окремо розв’яжемо такі дві задачі (1), (3), (4) і (2), (3), (4).

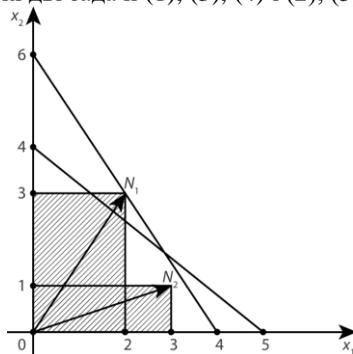


Рис. 1. Геометричний розв’язок задачі (1), (3), (4) і (2), (3), (4).

Задачі (1), (3), (4) і (2), (3), (4) розв’яжемо геометрично (рис. 1).

Із рис. 1 бачимо, що розв’язок задачі (1), (3), (4) є вектор e вектор $x_1 = (0;4)$, $\max P = 12$. Розв’язок задачі (2), (3), (4) є вектор e вектор $x_2 = (4;0)$, $\max R = 12$. Ідеальною точкою є точка $a = (12,12)$.

Тепер розв'яжемо скалярну задачу:

$$L = (2x_1 + 3x_2 - 12)^2 + (3x_1 + x_2 - 12)^2 \rightarrow \min ,$$

з умовами (3) і (4).

Оскільки

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4(2x_1 + 3x_2 - 12) + 6(3x_1 + x_2 - 12) ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 6(2x_1 + 3x_2 - 12) + 2(3x_1 + x_2 - 12) ,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 8 + 18 = 26 , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 18 + 2 = 20 ,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 12 + 6 = 18 , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 12 + 6 = 18 , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} > 0 ,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 20 \end{vmatrix} = 196 > 0 ,$$

то функція L є опуклою в усіх точках площини. Тому для розв'язання скаляризованої задачі знайдемо точку мінімуму функції L . Якщо ця точка буде задовольняти обмеження, то вона буде розв'язком задачі. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 26x_1 + 18x_2 - 120 = 0, \\ 18x_1 + 20x_2 - 96 = 0 \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є точка $\left(\frac{64}{7}, \frac{24}{7}\right)$, яка не задовольняє обмеження.

Тому точка мінімуму скаляризованої задачі знаходиться на межі допустимих значень. Тобто вона є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} L &= (2x_1 + 3x_2 - 12)^2 + (3x_1 + x_2 - 12)^2 \rightarrow \min , \\ 3x_1 + 2x_2 &= 12, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

або

$$\begin{aligned} L &= (2x_1 + 3x_2 - 12)^2 + (3x_1 + x_2 - 12)^2 \rightarrow \min, \\ 4x_1 + 5x_2 &= 20, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

Розв'язком задачі (5) є точка $\left(\frac{48}{17}, \frac{30}{17}\right)$, $\min L \approx 4,2$. Друга задача (6) не

має розв'язку. Отже, розв'язком скаляризованої задачі є точка $\left(\frac{48}{17}, \frac{30}{17}\right)$,

$\min L \approx 4,2$.

1. Волошин О. Ф., Машенко С. Д. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. – К., 2010.
2. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений. – М., 2000.
3. Цегелик Г. Г. Моделі та методи підтримки прийняття рішень в умовах визначеності: текст лекцій. – Львів, 2016.
4. Цегелик Г. Г. Математичне програмування: навч. посіб. – Львів ЛНУ імені Івана Франка, 2011.
5. Бартіш М. Я. Методи оптимізації. Теорія і алгоритми. – Львів ЛНУ імені Івана Франка, 2006.
6. Бертсенас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М., 1987.

УДК 519.633.2

Н.В. Медвідь, В.А. Герус, П.М. Мартинюк

(Національний університет водного господарства та природокористування)

**МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ
КОНСОЛІДАЦІЇ ГРУНТОВОЇ ГРЕБЛІ З ВОДОВОДОМ ТА ЗОНОЮ
ВИМИВУ**

Математична модель тривимірної задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі (область Ω_1) з водоводом та зоною вимиву (область Ω_2) з врахуванням впливу тепло-солеперенесення та модифікованої кінематичної граничної умови на депресійній поверхні в загальноприйнятих позначеннях містить наступні рівняння [1,2]:

$$\operatorname{div}(\mathbf{K}(c, T)\nabla h) - \operatorname{div}(\mathbf{K}_c \nabla c) - \operatorname{div}(\mathbf{K}_T \nabla T) = \beta \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}_T^{(e)} \nabla T) + \operatorname{div}(\mathbf{D}_c \nabla c) - (\mathbf{u}, \nabla c) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - \mathbf{u} \cdot \nabla s, \mathbf{X} \in \Omega_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = -((u_1, u_2, u_3), (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})) \cdot (u_1, u_2, u_3) + v \cdot \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - g \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(c, T)\nabla h + \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

які доповнюються граничними та початковими умовами для відповідних функцій. Значення коефіцієнтів вищенаведених рівнянь залежать від області Ω_1 або Ω_2 , в яку попадає точка \mathbf{X} .

Вільна межа (крива депресії) описується співвідношенням

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = (y - h(\mathbf{X}, t))|_{\Gamma_0} = 0$$

і на ній задається модифікована кінематична гранична умова

$$\frac{d\sigma}{dt} \varphi(\mathbf{X}, t) + (1 + \sigma) \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \int_{L(x, y, t)}^{\varphi(\mathbf{X}, t)} \left(\frac{e}{1 + e} \left(\frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz - \frac{1}{\sigma_{\max} - \sum_{i=1}^n S_i(\mathbf{X}, t)} \sum_{i=1}^n (\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{n}_{i2}) \Big|_{\mathbf{X} \in \Gamma_{12}}.$$

Для відшукування наближеного розв’язку відповідної крайової задачі використано метод скінченних елементів (МСЕ). Задача розв’язана в середовищі FreeFem++[3], яке являє собою безкоштовне програмне забезпечення для розв’язування крайових задач МСЕ. Проведено ряд чисельних експериментів. Досліджено вплив зони вимиву, водоводу та тепло-солеперенесення на розподіл напорів в греблі та на положення кривої депресії. Отримані значення температури, концентрації солей та напорів на момент часу 360 діб, наприклад, відображені на графіках 1-3.

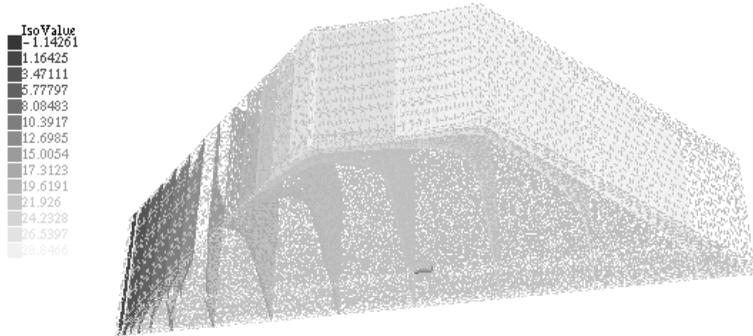


Рис.1. Розподіл надлишкових напорів

Максимальна зміна положення вільної межі становить 1.18 м.

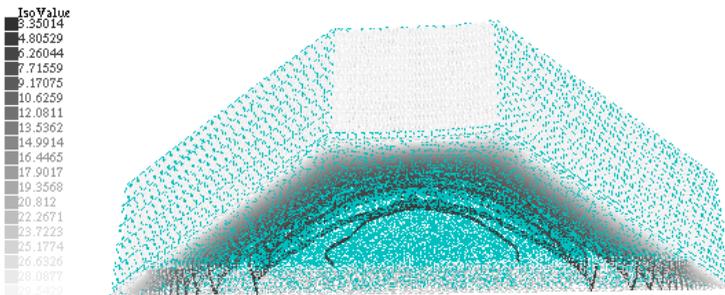


Рис.2. Розподіл температури

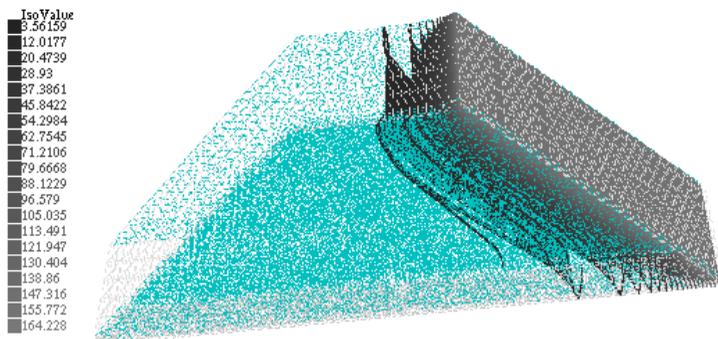


Рис.3. Розподіл концентрації солей

1. *Медвідь Н.В.* Математичне моделювання впливу на надлишкові напори наявності зони вимиву в ґрунтовій греблі з водоводом/ Н.В. Медвідь, П.М. Мартинюк// Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – 2014. - Випуск 10.- С.101-112.
2. *Медвідь Н.В.* Дослідження впливу тепло-солеперенесення на швидкість фільтрації в ґрунтовій греблі (просторова задача)/ Н.В.Медвідь, П.М.Мартинюк // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2015. - №4. – С.169-178.
3. FreeFem++. Third Edition / F.Hecht, S.Auliac, O.Pironneau, J.Morice, A. Le Hyaric, K.Ohtsuka. - Laboratoire Jacques-Louis Lions, Universite Pierre et Marie Curie, Paris. – 378p (режим доступу: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>).

УДК 004.451.53:004.632.5

А. В. Мельничин

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ІНДЕКСІВ У ІНДЕКСНИХ МЕТОДАХ ОРГАНІЗАЦІЇ ФАЙЛІВ БАЗ ДАНИХ

Найбільш поширеними методами організації файлів баз даних на сьогодні є індексні методи [2]. Однією із найважливіших задач, що виникає при реалізації таких методів, є задача ефективної організації індексу. В [3] досліджено оптимальні моделі індексу, який організований у вигляді багаторівневого збалансованого дерева, за використання різних методів пошуку у його вузлах у випадку рівномірного розподілу ймовірностей звертання до елементів індексу.

У роботі визначаються параметри оптимальної організації індексу у вигляді багаторівневого повністю збалансованого індексного дерева у випадку нерівномірного розподілу ймовірностей звертання до його елементів. При цьому розглядаються такі близькі до дійсності закони нерівномірного розподілу [1] як, “бінарний”, закон Зіпфа, узагальнений, частковим випадком якого є розподіл, що наближено задовольняє правило “80-20”. Для пошуку елементів у вузлах дерева використовується метод послідовного перегляду, а за критерій ефективності приймається математичне сподівання кількості порівнянь, необхідних для пошуку елемента в індексі.

Припустимо, що індекс, який містить N елементів, організований у вигляді повного збалансованого багаторівневого дерева, r – кількість рівнів вузлів у дереві, p_i – ймовірність звертання до i -го елемента індексу. Тоді за використання методу послідовного перегляду у вузлах дерева, математичне сподівання кількості порівнянь E , необхідних для пошуку елемента в індексі, виразиться формулою

$$E = \sum_{i_r=1}^l \sum_{i_{r-1}=1}^l \cdots \sum_{i_1=1}^l (i_1 + i_2 + \dots + i_r) p_{\varphi(i_1+i_2+\dots+i_r)},$$

$$\text{де } \varphi(i_1 + i_2 + \dots + i_r) = i_1 + \sum_{j=2}^r (i_j - 1) l^{j-1}.$$

Для конкретних законів розподілу ймовірностей звертання до елементів індексу знайдено явний вигляд математичного сподівання кількості порівнянь, необхідних для пошуку елемента в індексі E і визначено значення параметрів l або r , за яких воно досягає мінімуму.

Якщо розподіл ймовірностей звертання до елементів індексу буде рівномірним, то

$$E = \frac{(l+1) \ln N}{2 \ln l}.$$

Нехай розподіл ймовірностей звертання до записів є “бінарним”, то для E матимемо:

$$E = \left(r + 1 - (l-1) \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{2^i - 1} \right) (1 - 2^{-N}) + (r-1) 2^{-N}.$$

Зокрема, якщо $r=1$ – $E = 2(1 - 2^{-N})$, а при $r=2$ –
 $E = 3 - \frac{l-1}{2^l - 1} (1 - 2^{-N}) + l 2^{-N}$.

Нехай ймовірності звертання до елементів індексу задовольняють закону Зіпфа, тоді

$$E = \frac{1}{H_N} \left((r+l-N-1) H_N + N + (l-1) \sum_{i=1}^{r-1} S_i(l^{r-i}) \right),$$

де $S_i(l^{r-i}) = \sum_{k=1}^{l^{r-i}} H_{kl^i}$ ($i=1, 2, \dots, r-1$).

Підставляючи у знайдений вираз для E замість $S_i(l^{r-i})$ її апроксимацію, отримаємо що $E \approx \bar{E}$, де

$$\bar{E} = (1 + (l-1)h_1) \frac{\ln N}{\ln l} + lh_2 + h_1 - 1,$$

а $h_1 = \frac{1}{H_N} \left(\frac{1}{4} \ln N + C_1 \right)$, $h_2 = \frac{1}{H_N} - h_1$.

Для узагальненого розподілу, зробивши деякі перетворення, отримано:

$$\bar{E} = \frac{1}{H_N^{(c)}} \left((r-1) H_N^{(c)} + H_N^{(c-1)} - \left(\frac{N - \sqrt[r]{N}}{2-c} - \frac{\sqrt[r]{N} - 1}{1-c} \delta(r) \right) N^{1-c} \right),$$

де $\delta(r) = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\alpha(N^{1-i/r})}{(N^{1-i/r})^{1-c}}$.

1. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3: Сортировка и поиск / Д. Кнут. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2000. – 832с.
2. Мартин Дж. Организация баз данных в вычислительных системах / Дж. Мартин. – М.: Мир, 1980. – 664с.
3. Цегелик Г.Г. Организация и поиск информации в базах данных / Г.Г. Цегелик. – Львов: Вища школа, 1987. – 176с.

УДК 519.642

Г.Л. Милейко, С.Г. Солодкий

(Інститут математики НАН України, Київ)

ПРО ТОЧНІ ПОРЯДКОВІ ОЦІНКИ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СКЛАДНОСТІ НА ДЕЯКИХ КЛАСАХ ЕКСПОНЕНЦІЙНО НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ

Як відомо, недоліком апіорного вибору параметру регуляризації при розв'язуванні некоректних задач є його обов'язкове «налаштування» на певне значення гладкості шуканого розв'язку. Очевидно, що такий підхід до розв'язування некоректних задач можливий, якщо нам точно відомо це значення. Але оскільки така інформація, зазвичай, або відсутня, або не є точною, тому на практиці необхідні апостеріорні правила вибору параметра регуляризації, реалізація яких не потребує додаткових знань про гладкість розв'язку. Одним з найбільш розповсюджених таких правил є принцип нев'язки Морозова. Іншим, не менш поширеним, апостеріорним правилом є принцип рівноваги. Нагадаємо, що принцип рівноваги полягає у виборі такого значення параметра регуляризації, щоб урівноважити дві функції, що складають оцінку похибки алгоритму. У даних дослідженнях для ефективного розв'язування експоненціально некоректних задач будуть розроблені економічні проєкційні методи, де за регуляризатор застосовується стандартний метод Тіхонова з правилами зупинки згідно принципам нев'язки та рівноваги. Приведемо строго постановку задачі.

Розглянемо рівняння Фредгольма I роду

$$Ax(t) := \int_0^1 a(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [0;1], \quad (1)$$

з інтегральним оператором, що неперервно діє в $L_2 = L_2(0;1)$ й таким, що множина $\text{Range}(A)$ незамкнена в L_2 та $f \in \text{Range}(A)$.

Нехай права частина рівняння (1) задана з похибкою $\delta > 0$, тобто замість f відомо її збурення $f_\delta \in L_2 : \|f(t) - f_\delta(t)\| \leq \delta$. Характерною особливістю жорстко некоректних задач є той факт, що гладкість розв'язку істотно гірша ніж гладкість ядра оператора A . Тому для таких задач природно вважати, що точний розв'язок рівняння (1) задовольняє деяку логарифмічну умову джерела. У нашому випадку будемо вважати, що точний розв'язок належить множині

$$x^+ \in M_p(A) = \{u : u = \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v, \quad \|v\| \leq \rho\}.$$

Тут величини $p, \rho > 0$, A^* - оператор спряжений до A . Такі задачі прийнято називати експоненціально некоректними. Слід зазначити, що точна інформація про гладкість шуканого розв'язку (тобто параметр p), зазвичай на практиці, невідома, тому замість $M_p(A)$ розглянемо множину

$$M(A) := \bigcup_{0 < p \leq p_1} M_p(A), \quad (2)$$

де параметр $p_1 < \infty$ - верхня межа можливих значень p . У межах наших досліджень будемо шукати наближення до точного розв'язку (1), що має мінімальну норму в L_2 , і належить множині (2). Крім того, припускатимемо, що параметр p - невідомий.

Розглянемо наступний клас досліджуваних операторів:

$$H_\gamma^r = \{A : \|A\| \leq \gamma_0, \sum_{n+m=1}^{\infty} \hat{a}_{n,m}^2 (\underline{n} \cdot \underline{m})^{2r} \leq \gamma_1^2\},$$

де $\hat{a}_{n,m} = \int_0^1 \int_0^1 e_n(t) e_m(\tau) a(t, \tau) dt d\tau$, $\gamma_0 \leq e^{-1/2}$, $\gamma = (\gamma_0; \gamma_1)$, $n, m \in Z_+$, $\underline{n} = 1$ при

$n = 0$ й $\underline{n} = n$ у протилежному випадку.

Надалі клас рівнянь (1) із операторами з H_γ^r й розв'язками з (2) будемо позначати $(H_\gamma^r, M_p(A))$. Зосередимося на дослідженні проєкційних методів розв'язування задач саме з цього класу.

Зазначимо, що будь-яку проєкційну схему дискретизації рівнянь (1) зі збуреною правою частиною f_δ можна визначити за допомогою скінченного набору скалярних значень

$$(Ae_j, e_i), \quad (i, j) \in \Omega, \quad (3)$$

$$(f_\delta, e_k), \quad k \in \omega_1, \quad \omega_1 := \{i : (i, j) \in \Omega\}, \quad (4)$$

де Ω - довільна обмежена область координатної площини $[1; \infty) \times [1; \infty)$. Скалярні добутки (3), (4) прийнято називати гальоркінською інформацією про рівняння (1), а під $\text{card}(\Omega)$ розуміється загальна кількість скалярних добутків вигляду (3). Зокрема, якщо $\Omega = [1, n] \times [1, m]$, $\omega_1 = [1, n]$, то ми одержуємо стандартну гальоркінську схему дискретизації з $\text{card}(\Omega) = n \cdot m$. Дослідження різних класів некоректних задач за допомоги саме такої схеми дискретизації були проведені у низці робіт, серед яких виділимо [1], [2].

Під проєкційним методом розв'язування рівняння (1) будемо розуміти будь-яке відображення $P = P(\Omega) : L_2 \rightarrow L_2$, яке за допомогою гальоркінської інформації (3) про рівняння (1) зіставляє правій частині розв'язуваного рівняння елемент $P(A_\Omega) f_\delta \in L_2$ що є многочленом за базисом $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ з

номерами гармонік із $\omega_2 := \{j : (i, j) \in \Omega\}$. Цей елемент приймається за наближений розв'язок (1).

Під похибкою проєкційного методу $P(\Omega)$ на класі рівнянь $(H_\gamma^r, M(A))$, як зазвичай, будемо розуміти його найбільше відхилення

$$e_\delta(H_\gamma^r, M(A), P(\Omega)) = \sup_{A \in H_\gamma^r} \sup_{x^+ \in M(A)} \sup_{f_\delta: \|f - f_\delta\| \leq \delta} \|x^+ - P(A_\Omega) f_\delta\|.$$

Мінімальний радіус гальоркінської інформації задамо величиною

$$R_{N, \delta}(H_\gamma^r, M(A)) = \inf_{\Omega: \text{card}(\Omega) \leq N} \inf_{P(\Omega)} e_\delta(H_\gamma^r, M(A), P(\Omega)).$$

Ця величина визначає найменшу можливу точність серед усіх проєкційних методів при обмеженні на обсяг дискретної інформації. Таким чином, $R_{N, \delta}(H_\gamma^r, M(A))$ характеризує інформаційну складність класу задач $(H_\gamma^r, M_p(A))$.

Для економічної дискретизації за область Ω візьмемо гіперболічний хрест вигляду

$$\{1\} \times [1; 2^{2n}] \bigcup_{k=1}^{2n} (2^{k-1}; 2^k] \times [1; 2^{2n-k}] \subset [1; 2^{2n}] \times [1; 2^{2n}].$$

З метою забезпечення стійкості наближень застосуємо стандартний метод Тіхонова, згідно з яким наближений розв'язок шукається у вигляді

$$x_{\alpha, \delta}^n = (\alpha I + A_n^* A_n)^{-1} A_n^* f_\delta, \quad (5)$$

де

$$A_n = P_1 A P_{2^{2n}} + \sum_{k=1}^{2n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{2n-k}}. \quad (6)$$

Проекційний метод (5) – (6) з правилами зупинки згідно принципу нев'язки Морозова та принципу рівноваги позначимо, відповідно, через P_1^i та P_2^i .

Тепер сформулюємо основне твердження.

Теорема 1. *Мають місце порядкові оцінки*

$$R_{N, \delta}(H_\gamma^r, M(A)) = O(\ln^{-p} N^{2r}) = O(\ln^{-p} \delta^{-1}),$$

де $N = O(\delta^{-1/r} \ln^{1+1/2r} \delta^{-1})$. Зазначений оптимальний порядок на класі $(H_\gamma^r, M_p(A))$ реалізується у рамках проєкційних методів P_1^i та P_2^i .

З результатів роботи [2] випливає, що для стандартної схеми Гальоркіна обсяг задіяної гальоркінської інформації на тих самих класах задач складає $O(\delta^{-(1+\varepsilon)/r} \ln^{-p/r} \delta^{-1})$, де величина $\varepsilon > 0$ не може бути як завгодно близькою

до нуля, щоб не допустити істотне зростання похибки. Порівняння результатів для методу з [2] з результатами теореми 1 дозволяє дістатися висновку, що обидва підходи гарантують оптимальний порядок точності на всьому класі досліджуваних жорстко некоректних задач, у той же час задіяна нами модифікація гальоркінського методу дозволяє суттєво скоротити обсяг дискретної інформації.

З результатів роботи [3] випливає, що у разі апіорного вибору параметру регуляризації обсяг задіяної дискретної інформації складає $O(\delta^{-1/r} \ln^{-(p-1-r)/r} \delta^{-1})$. Порівнюючи результати роботи [3] з результатами теореми 1, можна дістатися висновку, що у випадку апостеріонного вибору обсяг дискретної інформації є більшим на логарифмічний множник. Таке збільшення обсягу інформації можна розглядати як деяку «платню» за відмову від знання гладкості шуканого розв'язку.

1. *Plato R., Vainikko G.M.* On the regularization of the projection method for solving ill-posed problems // Numer. Math. – 1990. – **57**, no. 1. – P. 63 – 79.
2. *Mathe P, Pereverzev S.G.* Discretization strategy for ill-posed problems in variable Hilbert scales. // Numer. Funct. Anal. Optim., 2002, - **23** – P. 623-63.
3. *Solodky S.G., Myleiko G.L.* On optimization of projection methods for solving some classes of severely ill-posed problems // J. Appl. Anal. – 2016. – **95**, no. 4. – P. 826 – 841.

УДК 539.3

Г. Й. Михальчук, В.І. Кузьменко

(Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара)

**МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ
БІОМЕХАНІКИ РУХУ**

Технічні засоби і біологічні об'єкти здійснюють рух уздовж поверхонь за рахунок різних механізмів. На сьогодні найбільш вивчені способи руху, які використовують силу тертя, що виникає за дії притискального навантаження. Проте деякі біологічні об'єкти використовують інший фізичний механізм, що ґрунтується на періодичному зчепленні різних частин поверхні тіла з контактною поверхнею та роз'єднанні з нею. Це дозволяє таким об'єктам рухатися уздовж довільно орієнтованих поверхонь, навіть по стелі.

Виходячи з аналізу кінематики руху видовжених біологічних об'єктів, в роботі [1] запропоновано математичну модель квазістатичного руху суцільних пружних тіл уздовж твердих поверхонь. При побудові моделі не фіксується конкретний механізм, який забезпечує зчеплення пружного тіла із твердою поверхнею, і вводиться модельне уявлення про тонкий шар матеріалу зчеплення, у якому відбувається з'єднання і роз'єднання тіла та поверхні. Модель передбачає можливість деформування контактної поверхні при перевищенні контактними нормальними або дотичними напруженнями деяких порогових значень.

Наступним кроком вивчення особливостей пересування тіл уздовж поверхонь є дослідження руху порожнистих тіл. Побудовано математичну модель руху порожнистих тіл уздовж недеформованих поверхонь. Для урахування умов взаємодії контактуючих тіл використано нерівності. Застосовано наведену в [1] методику числового розв'язання.

Числовий аналіз ґрунтується на варіаційному формулюванні:

$$\inf_{\mathbf{u}^* \in V} \left\{ J(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^*) d\Omega - \int_{\Omega} Q_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_a} \sigma_m |u_v^*| d\Gamma + \int_{\Gamma_a} \tau_m |\mathbf{u}_t^*| d\Gamma \right\},$$

$$\forall \mathbf{u}^* \in V,$$

де V – множина допустимих переміщень;

\mathbf{u}^* – можливі переміщення;

ε_{ij}^* – компоненти можливого тензора деформацій;

$W(\varepsilon_{ij}^*)$ – питома потенціальна енергія деформації;

Γ_a – частина поверхні тіла, на якій задано умови зчеплення;

σ_m – максимально припустимі значення нормальних напружень;

τ_m – максимально припустимі значення контактних напружень.

Для дискретизації варіаційної задачі застосовано метод скінченних елементів. Цей метод дозволяє здійснити апроксимацію умов у вигляді нерівностей. Умови непроникання накладаються тільки у вузлах, але ці умови забезпечуються і поза вузлами. Обрано прямокутні скінченні елементи з білінійною функцією форми. Варіаційну задачу наближено замінено скінченновимірною задачею пошуку мінімуму функції багатьох змінних за додаткових умов у вигляді нерівностей.

Для мінімізації функції багатьох змінних застосовано метод послідовної верхньої релаксації, модифікований для урахування обмежень у вигляді лінійних нерівностей. Ітераційний процес будується таким чином, щоб функція багатьох змінних $J_h^K(w)$ зменшувалася, а значення вузлових переміщень не виходили за межі допустимої множини [2].

Розроблено програмне забезпечення для визначення напружено-деформованого стану суцільного і порожнистого тіл під час руху. Побудовано числові розв'язки низки контактних задач плоскопаралельного руху деформівних тіл уздовж поверхонь. Встановлено якісні й кількісні закономірності впливу геометричних параметрів і пружних сталих тіла, власної ваги, величини ділянок зчеплення поверхонь на дотичні й нормальні контактні напруження. Досліджено локалізацію максимальних внутрішніх напружень, величину ділянок відриву поверхонь в зонах зчеплення і форму зазору між поверхнями.

Подальший розвиток запропонованого підходу може бути присвячений дослідженню руху тіл з анізотропних матеріалів, моделюванню руху тіла у випадку складної геометрії його поверхні і поверхні основи.

1. Кузьменко В. І. Контактні задачі руху пружних тіл уздовж твердих поверхонь / В. І. Кузьменко, Г. Й. Михальчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, №1. – С. 84–93.
2. Кузьменко В. І. Про особливості застосування методу скінченних елементів у неklasичних контактних задачах / В. І. Кузьменко, Г. Й. Михальчук // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць. – Львів, Львівський національний університет імені Івана Франка. – 2015. – С. 200–202.

УДК 627.324.2/3:532.72

О. Р. Мічута, П. М. Мартинюк

(Національний університет водного господарства та природокористування)

**ПРО МАТЕМАТИЧНУ МОДЕЛЬ ЗАГАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ВПЛИВУ
КОЛЬМАТАЖУ НА ПРОЦЕС КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТІВ**

Математична модель задачі консолідації ґрунту в області Ω під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження з урахуванням впливу кольматажу та неізотермічних умов на основі робіт [1-3] в загальноприйнятих позначеннях описується наступною крайовою задачею:

$$\mu_e \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, c, T) \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D(x, c, T) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) - u \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, c, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c \rho u \frac{\partial T}{\partial x} = c T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

$$u = ev - k(x, c, T) \frac{\partial h}{\partial x} + v(x, c, T) \frac{\partial c}{\partial x} + \mu(x, c, T) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma_{pr} (N_{\max} - N)c - \gamma_v N, \quad (5)$$

$$h(0, t) = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (6)$$

$$c(0, t) = C_m, \quad \left(D(x, c, T) \frac{\partial c}{\partial x} + D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0 \quad (7)$$

$$T(0, t) = T_1(t), \quad T(l, t) = T_2(t), \quad (8)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x). \quad (9)$$

Чисельний розв'язок вищенаведеної нелінійної крайової задачі знайдено методом скінченних різниць. При проведенні і аналізі чисельних результатів було враховано ряд експериментальних та теоретичних

залежностей. Зокрема, в таблиці наведено врахована залежність концентрації граничного насичення солі C_m від температури.

Таблиця. Залежність $C_m(T)$

$T, ^\circ C$	0...19	20...24	25...29	30...39	40...50
$C_m(T), \frac{г}{л}$	357	359	360	361	364

Прийнята наступна залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину [4]:

$$k(c, T) = a_5 \cdot \left(\frac{c}{C_m(T)} \right)^5 + a_4 \cdot \left(\frac{c}{C_m(T)} \right)^4 + a_3 \cdot \left(\frac{c}{C_m(T)} \right)^3 + a_2 \cdot \left(\frac{c}{C_m(T)} \right)^2 + a_1 \cdot \left(\frac{c}{C_m(T)} \right) + a_0,$$

де $a_5 = 0,042557151$, $a_4 = -0,12857957$, $a_3 = 0,140291508$,

$a_2 = -0,0643274$, $a_1 = 9,345668647 \cdot 10^{-3}$, $a_0 = 0,0010339$.

Окрім цього враховано залежність коефіцієнта дифузії речовин від швидкості фільтрації у формі:

$$D(x, c, T) = D_0 + \alpha_0 |u|,$$

де α_0 – параметр, що відображає залежність коефіцієнта конвективної дифузії від швидкості фільтрації, D_0 – початкове значення коефіцієнта конвективної дифузії.

Виявлено, що врахування процесу кольматажу сповільнює розсіювання надлишкових напорів, а, отже, може змінити прогностні розрахунки величини просідання верхньої межі ґрунту

1. *Добронравов О.О.* Моделювання фільтрації ґрунтових вод з урахуванням суфозії і кольматації / *О. О. Добронравов, В. С. Кремез* // Пробл. водопостачання, водовідведення та гідраліки. – 2006. – Вип. 7. – С. 141-146.
2. *Власюк А. П.* Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / *А.П.Власюк, П.М.Мартинюк.* – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
3. *Мичута О. Р.* Математическое моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неізотермических условиях / *О. Р. Мичута, А. П. Власюк, П. Н. Мартинюк* // Математическое моделирование. – 2013. –Т. 25, № 2. – С. 3-18.
4. *Мічута О. Р.* Математичне моделювання фільтраційної консолідації засолених ґрунтів при залежності концентрації граничного насичення від температури / *О. Р. Мічута, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк* // Вісник НУВГП. Сер. технічні науки. – 2010. – Вип. 4 (52). – С. 194-201.

УДК 517.958

Д.А. Номіровський

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНОСУ В ОБЛАСТЯХ З РОЗРІЗАМИ

Багато актуальних прикладних задач описують тепло- і масоперенос, що протікає в середовищах зі сторонніми включеннями. Наприклад, всередині області або на її межі можуть знаходитися шари фарби, окиси, вогнетриви, газові зазори, тонкі шари рідини, плівки, тріщини, різні мембрани тощо.

При моделюванні таких процесів сторонні включення, ураховуючи їх малий характерний розмір, видаляють з області протікання процесу і на поверхнях видалених включень визначають умови спряження, що ураховують фізичні характеристики прошарку і інтегрально описують процес переносу в цій частині простору. Діючи у такий спосіб, приходять до крайової задачі в області с розрізами, що зазвичай не є однозв'язною. У межах подібних постановок процес переносу вивчався у великій кількості робіт, дивись, наприклад, [1].

У випадку параболічної крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} + d(\xi)u - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(k_{ij}(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \right) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial \xi_i} (v_i(\xi)u) = f(t, \xi), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\xi \in \partial\Omega} = 0,$$

що описує процес переносу в двох різномірних областях Ω_+ і Ω_- , розділених включенням Ω_0 , умови спряження на поверхні Ω_0 можуть мати такий вигляд:

$$[u] + a_1(\xi)(\bar{\omega}, \bar{n})^+ + a_2(\xi)(\bar{\omega}, \bar{n})^- = f_a(t, \xi), \quad (2)$$

$$[(\bar{\omega}, \bar{n})] + b_1(\xi)u^+ + b_2(\xi)u^- = f_b(t, \xi), \quad (3)$$

де $\bar{\omega} = -\mathbf{K} \text{grad}u + \bar{v}u$, $\mathbf{K} = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^m$, \bar{n} – вектор нормалі до поверхні Ω_0 ,

$[u]$ і $[(\bar{\omega}, \bar{n})]$ — стрибки функцій u і $(\bar{\omega}, \bar{n})$ на поверхні Ω_0 , а u^+ , u^- , $(\bar{\omega}, \bar{n})^+$ і $(\bar{\omega}, \bar{n})^-$ – граничні значення цих функцій, отримані при наближенні до Ω_0 з боку областей Ω_+ і Ω_- відповідно.

Інший підхід до моделювання процесів переносу в областях зі сторонніми включеннями був запропонований В.Ф. Демченко і описаний в роботі [2]. Замість одного рівняння (1) другого порядку, що описує динаміку процесу, пропонується розглядати систему диференціальних рівнянь першого порядку з природними змінними u і $\bar{\omega}$. При цьому видалений прошарок (розріз) повертається до просторової області дослідження, а вплив сторонніх включень, виражений умовами спряження (2), (3), ураховують через коефіцієнти рівнянь системи [3, 4].

Такий підхід концептуально має низку переваг. Наприклад, отримані рівняння мають просту фізичну інтерпретацію — виражають основні фізичні закони, що описуються досліджуваній процес. Одне з цих рівнянь (скалярне) виражає закон збереження субстанції, друге (векторне) — феноменологічний закон переносу цієї субстанції за тим чи інших механізмом. Наявність декількох рівнянь системи дає значно більше свободи для доведення необхідних властивостей досліджуваних операторів, ніж традиційна постановка. Наприклад, так званий мішаний метод скінчених елементів за своєю суттю відповідає цьому підходу. Крім цього, при такому способі моделювання досліджувана область протікання процесу є однозв'язною, що часто є важливим на етапі чисельного розрахунку задачі. Характерною негативною особливістю запропонованого підходу є наявність узагальнених функцій в коефіцієнтах рівнянь.

У даній роботі на основі підходу В.Ф. Демченко будується єдина математична модель процесів переносу для параболічних систем з різноманітними умовами спряження, зокрема, ідеального контакту, неідеального контакту, неідеального контакту через трьохшарове включення, зосередженого власного джерела, зосередженого зовнішнього джерела. Досліджується зв'язок побудованої моделі з класичними та слабкими постановками задачі.

1. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. – 616 с.
2. Ляшко И.И., Демченко В.Ф. Обобщенные формулировки задач тепло- и массопереноса в слоистых средах / Препринт АН УССР. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова. – Киев, 1987. – 27с.
3. *Nomirovskii D.* Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution // Journal of differential equations. – 2007. – V. 233, No.1. – P. 1-21.
4. *Klyushin D.A., Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Petunin Yu.I., Semenov V.V.* Generalized solutions of operator equations and extreme elements. – New York. Springer, 2012. – 202p.

УДК 519.2:519.6

А.О. Пашко

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ПРО ОДИН МЕТОД СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

В роботі досліджуються методи статистичного моделювання випадкових процесів типу дробового броунівського руху. Моделі будуються із заданими точністю і надійністю в різних функціональних просторах.

Нехай (T, Ξ, μ) - деякий вимірний простір і $\mu(T)=1$. Модель $S_\alpha(t, M)$ наближає процес $\xi(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ та точністю δ у нормі деякого функціонального простору $A(T)$, якщо має місце нерівність $P\{\|\xi(t) - S_\alpha(t, N)\|_A > \delta\} \leq \varepsilon$. В роботах [3-4] досліджувались оцінки точності і надійності субгауссових моделей випадкових процесів в різних функціональних просторах.

Означення 1. Дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста $\alpha \in (0,1)$ називається гауссовий випадковий процес $W_\alpha(t), t \in [0,1]$ з кореляційною функцією $R_\alpha(t, s) = \frac{1}{2}(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha})$, такий що $W_\alpha(0) = 0, EW_\alpha(t) = 0$.

При $\alpha = \frac{1}{2}$ маємо стандартний вінерівський процес.

Вінерівський процес з довільним індексом Хюрста можна представити у вигляді ряду [2]

$$W_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(x_k t) X_k + b_k (1 - \cos(y_k t)) Y_k), \quad (1)$$

де $\{X_k, Y_k\}$ - незалежні стандартні гауссові випадкові величини,

$\{x_k\}$ - дійсні нулі функції Бесселя $J_{-\alpha}(x)$,

$\{y_k\}$ - дійсні нулі функції Бесселя $J_{1-\alpha}(x)$,

$$a_k = \frac{\pi^\alpha \sqrt{2C}}{x_k^{\alpha+1} J_{1-\alpha}(x_k)}, \quad b_k = \frac{\pi^\alpha \sqrt{2C}}{y_k^{\alpha+1} J_{-\alpha}(y_k)}, \quad C = \frac{\Gamma(2\alpha+1) \sin(\pi\alpha)}{\pi^{2\alpha+1}}.$$

Модель процесу будується у вигляді ряду

$$S_\alpha(t, M) = \sum_{k=1}^M (a_k \sin(x_k t) X_k + b_k (1 - \cos(y_k t)) Y_k),$$

де $\{X_k, Y_k\}$ - незалежні строго субгауссові випадкові величини. Властивості строго субгауссовських випадкових величин і процесів досліджувались в роботі [1].

Оскільки нулі функції Бесселя точно знайти не можемо, то їх будемо знаходити з деякою точністю. Позначимо наближені значення a_k, b_k, x_k, y_k відповідно $\bar{a}_k, \bar{b}_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k$.

Нехай $|a_k - \bar{a}_k| \leq h_k^a$, $|b_k - \bar{b}_k| \leq h_k^b$, $|x_k - \bar{x}_k| \leq h_k^x$, $|y_k - \bar{y}_k| \leq h_k^y$, де $h_k^a, h_k^b, h_k^x, h_k^y$ точність обчислення. І модель процесу має вигляд $\bar{S}_\alpha(t, M) = \sum_{k=1}^M (\bar{a}_k \sin(\bar{x}_k t) X_k + \bar{b}_k (1 - \cos(\bar{y}_k t)) Y_k)$. А точність моделювання

$\Delta(t)$ буде рівною $\Delta(t) = W_\alpha(t) - \bar{S}_\alpha(t, M)$.

В роботах [6-7] досліджувались оцінки точності і надійності моделей $\bar{S}_\alpha(t, M)$ в різних функціональних просторах, а саме, в просторі $L_2(T)$, в просторах Орліча та в просторі неперервних функцій.

Використання розглянутого алгоритму вимагає значних обчислювальних затрат. Наприклад, в просторі $L_2(T)$ кількість нулів функції Бесселя має бути $M = 100000$, точність обчислення $h = 0.00001$ для $\alpha = 0.3$, $\delta = 0.1$ та $\varepsilon = 0.05$. Це накладає додаткові вимоги до обчислення нулів функції Бесселя і на загальну точність моделювання [6].

Стандартний вінерівський процес є процесом з незалежними приростами. Дробовий броунівський рух є процесом з стаціонарними приростами. Тобто, випадковий процес $w(t) = W_\alpha(t+h) - W_\alpha(t)$, є стаціонарним гауссовим процесом із кореляційною функцією.

$$Ew(t+\tau)w(t) = \frac{1}{2} \left(|\tau+h|^{2\alpha} + |\tau-h|^{2\alpha} - 2|\tau|^{2\alpha} \right)$$

і спектральною щільністю

$$f(\lambda) = \frac{A^2}{\pi} \left(\frac{1 - \cos(\lambda h)}{|\lambda|^{2\alpha+1}} \right), \quad \lambda \in (-\infty, +\infty),$$

$$\text{де } A^2 = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(\lambda)}{\lambda^{2\alpha+1}} d\lambda \right)^{-1} = \left(-\frac{2}{\pi} \Gamma(-2\alpha) \cos(\alpha\pi) \right)^{-1}.$$

Оскільки, $W_\alpha(0) = 0$, то для будь-якого заданого кроку h можна задати представлення $W_\alpha(t+h) = W_\alpha(t) + w(t)$. І моделювання дробового

броунівського руху зводиться до побудови моделі стаціонарного гауссового процесу. Методи моделювання стаціонарних гауссових процесів досліджувались в роботі [5].

Випадковий процес $w(t)$ можна представити у вигляді

$$w(t) = \int_0^{\infty} \cos(\lambda t) d\xi_1(\lambda) + \int_0^{\infty} \sin(\lambda t) d\xi_2(\lambda),$$

де $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ центровані некорельовані випадкові процеси з некорельованими приростами такі, що для $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$ має місце $E(\xi_1(\lambda_2) - \xi_1(\lambda_1))^2 = E(\xi_2(\lambda_2) - \xi_2(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$, а $F(\lambda)$ - спектральна функція процесу $w(t)$.

Нехай D_{Λ} - деяке розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$, $D_{\Lambda} : 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = \Lambda$. Модель випадкового процесу $w(t)$ будемо будувати у вигляді $S(t, M) = \sum_{k=1}^M (\sin(\lambda_k t) X_k + (\cos(\lambda_k t)) Y_k)$, де $\{X_k, Y_k\}$ - некорельовані центровані строго субгауссові випадкові величини з $E(X_k)^2 = E(Y_k)^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)$.

Для перевірки якості моделювання можна використати оцінку кореляційної функції.

1. *Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов/В.В. Булдыгин, Ю.В. Козаченко. - Киев:ТВиМС, 1998 - 288 с.
2. *Dzharidze K.O.* A series expansion of fractional Brownian motion / K.O. Dzharidze, J.H. Zanten // CWI. Probability, Networks and Algorithms, R0216.
3. *Kozachenko Yu.V.* Accuracy of simulation of stochastic processes in norm of Orlicz spaces. I / Yu.V. Kozachenko, A.A. Pashko // Theor. Probability and Math. Statist. - 1999, 58. - P.51-66.
4. *Kozachenko Yu.V.* Accuracy of simulation of stochastic processes in norm of Orlicz spaces. II / Yu.V. Kozachenko, A.A. Pashko // Theor. Probability and Math. Statist. - 1999, 59. - P.77-92.
5. *Kozachenko Yu.V.* Accuracy of Simulation of the Gaussian random processes with continuous spectrum / Yu.V. Kozachenko, A. A. Pashko // Computer Modelling and New Technologies. — 2014. — Vol.18, №3. — P. 7–12.
6. *Пашко А.О.* Оцінка точності моделювання узагальненого вінерівського процесу / А.О. Пашко // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія:математика і інформатика. - 2014. - Вип. 25, № 1. - С. 106-113.
7. *Пашко А.О.* Точність моделювання субгауссових вінерівських процесів в рівномірній метриці / А.О. Пашко // Журнал обчислювальної та прикладної математики. - 2015. - № 3(120). - С.160–169.

УДК 539.3

С.О. Пискунов, В.В. Валер

(Київський національний університет будівництва і архітектури)

ДОСТОВІРНІСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРИ ФІЗИЧНО-НЕЛІНІЙНОМУ ДЕФОРМУВАННІ ПЛОСКИХ І ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Значна частина елементів відповідальних конструкцій різних галузей техніки (енергетики, транспортного машинобудування та інших) являє собою просторові тіла. В процесі експлуатації вони зазнають складних зовнішніх впливів, зокрема тривалого довільно розподіленого у просторі силового навантаження при наявності високих температур. У таких умовах характерним є виникнення незворотних деформацій повзучості, а також змінення механічних властивостей матеріалу, що обумовлює знеміцнення матеріалу і подальшу втрату несучої здатності конструкції. В багатьох випадках конфігурація об'єктів і характер прикладання зовнішніх навантажень дозволяє розглядати їх як двовимірні плоскі або вісесиметричні тіла. Визначення їх несучої здатності потребує розв'язання нелінійних задач із визначення напружено-деформованого стану при певному розподіленні температур в межах об'єкту, визначеному, зокрема на основі розв'язку задачі нестационарної теплопровідності.

Для постановки задач фізично-нелінійного деформування використовуються вихідні співвідношення теорії пружності та термпружності, а також теорії повзучості і континуального руйнування, з використанням параметра пошкодженості Работнова [2].

Для вісесиметричних та плоско-деформованих тіл використовуються скінченні елементи (СЕ), що являють собою чотирикутники довільної форми. На характер розподілення механічних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу СЕ ніяких обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування. В межах поперечного перерізу СЕ переміщення подаються у вигляді білінійного розподілу. Для виводу матриці жорсткості скінченного елемента використана моментна схема МСЕ і варіаційний принцип Лагранжа [4].

Моделювання еволюційного характеру процесу деформування в умовах повзучості здійснюється на основі дискретних кроків за параметром часу. На кожному кроці для розв'язання систем нелінійних рівнянь МСЕ використовується метод Ньютона-Канторовича.

$$\{\Delta u_l\}_n^m = \{\Delta u_l\}_{n-1}^m + \beta [K_{ll}]^{-1} (\{Q_l\}_n^m - \{R_l\}_n^m)$$

Вектор вузлових реакцій $\{R_l\}_n^m$, обчислений за величинами повних напружень σ^{ij} , змінення яких відбуваються внаслідок прирощення навантаження і відповідного нелінійного деформування матеріалу.

Обчислення температурних деформацій ($\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}$, $\alpha_T = \alpha_T(z^k, T)$ – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу) здійснюється в термінах фізичних величин, обчислення напружень при наявності деформацій пластичності здійснюється на основі методики Уїлкінса:

$$\left(\overline{\sigma}_{ij}\right)_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} \left(\sigma_{ij}\right)_n^m + \left(\overline{s}^{ij}\right)_n^m = \left(\sigma_o\right)_n^m + \left(s^{ij}\right)_n^m \frac{\tau_s(\vartheta, T)}{\tau},$$

s_{ij} – компоненти девіатора напружень; $\tau_s(\vartheta, T)$ і $\tau = \sqrt{s_{ij}s^{ij}/2}$ – поточні величина межі текучості матеріалу і значення інтенсивності дотичних напружень.

Обчислення напружень при наявності деформацій повзучості здійснюється з урахуванням поточних значень деформацій повзучості:

$$\left(\overline{\sigma}_{ij}\right)_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} \left(\sigma_{ij}\right)_n^m + \left(\overline{s}^{ij}\right)_n^m = \left(\sigma_o\right)_n^m + \left[\left(s^{ij}\right)_n^m - G_1 \left(\Delta \varepsilon_{ij}^c\right)_n^m\right],$$

$$\text{де } \left(\Delta \varepsilon_{ij}^c\right)_n^m = \left(\xi_{ij}^c\right)_n^m \Delta t_m, \quad \left(\xi_{ij}^c\right)_n^m = \frac{3}{2} \left[\xi_i^c\right]_n^m \frac{\left(s_{ij}\right)_n^m}{\left(\sigma_i\right)_n^m}, \quad G_1 = E / (1 - 2\nu).$$

В разі виконання умови збіжності ітераційного процесу (3) із використанням отриманих на останній ітерації кроку напружень проводиться обчислення значень накопичених деформацій повзучості $\left(\varepsilon_{ij}^c\right)_m$ і пошкоженості ω_m :

$$\left(\varepsilon_{ij}^c\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^c\right)_{m-1} + \left(\xi_{ij}^c\right)_m \Delta t_m, \quad \omega_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_m \Delta t_m.$$

Достовірність отримуваних розв'язків при двовісному вісесиметричному і плоскому напружено-деформованому стані показана на декількох тестових задачах.

Зокрема, для доведення достовірності результатів визначення напружено-деформованого стану при наявності деформацій пластичності проведено моделювання напружено-деформованого стану товстостінної труби (рис.1, а). Отримані розміри зон пластичності по товщині стінки труби при різних величинах навантаження p (рис.1, б) збігаються із наведеними в [4]. Достовірність розробленого підходу при наявності деформацій повзучості результатами розв'язання тестових задач про деформування товстостінної труби (рис.2, а; [1]) і розтяг пластини (рис.2,

б; [5]). Величини деформацій повзучості, пошкодженості і часу до досягнення параметром пошкодженості критичного значення збіглися з наведеними в названих джерелах.

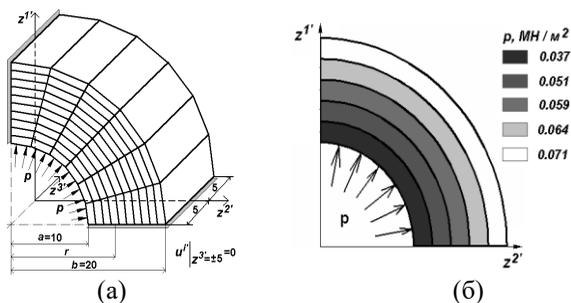


Рис. 1. Товстостінна труба (а) і зони пластичних деформацій (б)

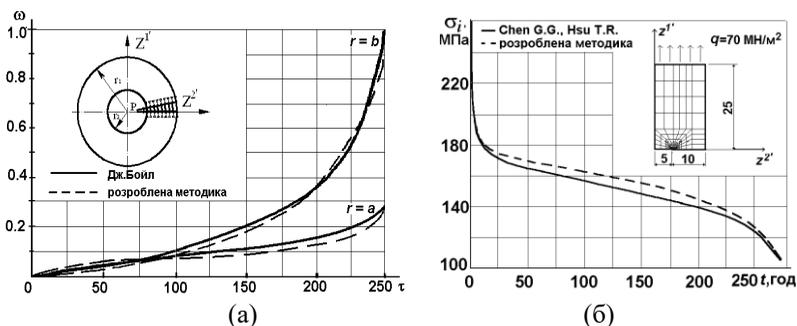


Рис. 2. Змінення в часі параметра пошкодженості в товстостінній трубі (а) і інтенсивності напружень в пластині (б)

Таким чином використані вихідні співвідношення, засоби скінченноелементної дискретизації і алгоритми дозволяють проводити визначення напружено-деформованого стану в умовах термов'язкопружнопластичного деформування двовимірних задачах.

1. *Боил Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Дж. Боил, Дж. Спенс. – М. : Мир, 1986. – 360 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1966. – 732 с.
3. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, В.В. Киричевский. – К. :Вишашк., 1982 – 480 с.
4. *Соколовский В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. :Вышш. шк., 1969. – 608 с.
5. *Chen G. G.* The role of plastic strains in creep crack growth / G. G. Chen. T. R. Hsu // Eng. Fracture Mechanics. – 1991. – Vol. 39. – № 3. – P. 493–506

УДК 519.6

Б. М. Подлевський

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**ПОБУДОВА ДВОСТОРОННІХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ВЛАСНИХ
ЗНАЧЕНЬ НЕЛІНІЙНИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ**

Нелінійні задачі на власні значення виникають у багатьох галузях природничих та інженерних наук. Однак, задачі на власні значення, які є важливими для практики, дуже рідко можуть бути розв'язані в замкненому вигляді і, як правило, для їх розв'язування потрібно застосовувати чисельні методи. Більшість чисельних методів просто забезпечує наближення до власних значень, але вони не дозволяють визначити, як далеко обчислене власне значення від точного. Клас самоспряжених задач на власні значення, можливо, найважливіший клас задач, тому що численні задачі, які виникають на практиці, належать цьому класу. Оскільки самоспряжена задача на власні значення може мати тільки дійсні власні значення, то проблема отримання наближення і відповідні оцінки точності наближення еквівалентна визначенню (обчисленню) верхніх та нижніх границь власних значень.

Велику зацікавленість до границь власних значень проявляють не тільки математики, але й фізики, хіміки, інженери і це має багато причин. Назвемо бодай дві з них:

1. Нижні оцінки для власних необхідні для того, щоб порівняти прогнози фізичних теорій з експериментальними результатами.

2. Знання границь власних значень дозволяє у багатьох випадках оцінити надійність ітераційного наближення, тобто на кожному кроці ітераційного процесу отримувати зручну апостеріорну оцінку похибки обчислень.

Для широкого класу лінійних задач, хороші верхні межі для додатних власних значень можуть бути визначені відносно легко за допомогою процедури Релея-Рітца. Для оцінки точності наближень, які отримуються методом Рітца, дуже важливо знати принаймні грубі наближення знизу. На даний час, в основному, існують три класи методів для обчислення нижніх границь власних значень (без урахування методів з дуже обмеженою сферою застосування): методи, які базуються на теоремах включення; метод проміжних задач; метод Фікера (Fischer).

Для знаходження верхніх та нижніх границь власних значень нелінійних спектральних задач, як правило, неможливо застосувати (узагальнити) ті методи, які існують для лінійних задач, тому для побудови таких методів залучають поняття та апарат інтервального аналізу.

У роботі пропонується новий підхід до побудови методів та алгоритмів двосторонніх наближень власних значень нелінійних за спектральним параметром задач на власні значення, який не використовує понять та апарату інтервального аналізу.

Ідея запропонованого підходу полягає в тому, що для неперервної монотонної в околі простого нуля $\lambda^* \in [a, b]$ функції $f : [a, b] \rightarrow R$, яка описує нелінійне рівняння, будується та досліджується деяка допоміжна функція $g : [a, b] \rightarrow R$, яка має той самий нуль, що й функція f і такі необхідні властивості, що дозволяє будувати ітераційні процеси, які дають монотонні двосторонні (альтернуючі або включаючі) наближення до кореня нелінійного рівняння [2], [4].

У рамках такого підходу побудовано та обґрунтовано алгоритми двосторонніх аналогів методу Ньютона для знаходження власних значень нелінійних спектральних задач. Отримано умови на початкове наближення, які забезпечують почерговість наближень до власного значення з двох сторін і гарантують збіжність ітераційного процесу.

При такому підході отримано нові властивості методу Геллі, які не виявлені й не досліджені в жодній з відомих автору робіт. А саме, для певного класу функцій при відповідному виборі початкових наближень давати монотонні наближення до розв'язку нелінійного рівняння як знизу, так і зверху, починаючи вже з $m = 0$. Адаптація відомих теорем збіжності для методу Геллі дозволяє отримати умови, які виділяють клас функцій $f(\lambda)$, для яких ітераційний процес методу Геллі дає альтернуючі монотонні наближення до розв'язку рівняння $f(\lambda) = 0$ і клас функцій $f(\lambda)$, для яких можемо побудувати ітераційні процеси, які дають лише включаючі монотонні наближення, причому в першому випадку потрібно лише одне початкове наближення λ_0 зліва або справа від кореня, а в другому – два: μ_0 і ν_0 з обох сторін. Для цього класу задач на основі методів Ньютона і Геллі запропоновано й побудовано алгоритми двосторонніх наближень до власного значення, які вимагають лише одного початкового наближення [1], [3], [5], [6].

На практиці, якщо це не впливає з конструктивних особливостей моделі, фізичних або інших властивостей, проблема отримання початкового наближення для методу Ньютона або Геллі є задачею не простою, як і загальна проблема вибору початкового наближення для будь-якого методу. Використовуючи чисельну процедуру обчислення похідних (першої та другої) від детермінанта матриці [1], [3], побудовано алгоритм, який дозволяє обчислити кількість власних значень спектральної задачі, які знаходяться у заданій області комплексної площини та деяке наближення до кожного з них. Тобто, не маючи ніякої апріорної інформації крім заданої області, можна за допомогою побудованого алгоритму отримати, взагалі

кажучи, грубі наближення до усіх власних значень, які знаходяться у заданій області й використати їх як початкові наближення.

Апробація побудованих алгоритмів на модельних задачах показує їх надійність та ефективність, а також переваги у порівнянні зі звичайним методом Ньютона чи методом доповненого вектора у тому розумінні, що на кожному кроці ітераційного процесу отримуємо двосторонні оцінки шуканого розв'язку, а отже, на кожному кроці отримуємо зручну апостеріорну оцінку похибки обчислень.

Запропонований підхід можна застосовувати і до лінійних за спектральним параметром задач на власні значення, причому, якщо його порівнювати з існуючими підходами для отримання нижніх оцінок власних значень самоспряжених спектральних задач, то він на відміну від:

- методів, що базуються на теоремах включення (Темпля, Крилова-Боголюбова), не вимагає знання нижньої границі наступного (у припущенні, що власні значення впорядковані за зростанням) власного значення,
- методу проміжних задач та його різних модифікацій, не вимагає побудови такого базового оператора з відомими власними значеннями, щоб різниця між самоспряженим оператором вихідної задачі та базовим була додатним оператором та побудови скінченномірних збудень базового оператора,
- методу Фікера та його модифікацій, на вимагає, щоб обернений до вихідного оператора був цілком неперервним та його побудови.

1. *Подлевський Б. М.* Двосторонні методи розв'язування нелінійних спектральних задач. / Б. М. Подлевський. – Київ: Наукова думка, 2014. – 175 с.
2. *Подлевський Б. М.* Про один підхід до побудови двосторонніх ітераційних методів розв'язування нелінійних рівнянь / Б. М. Подлевський // Доп. НАН України. – 1998. – № 5. – С. 37-41.
3. *Подлевський Б. М.* Чисельні методи та алгоритми розв'язування узагальнених спектральних задач: Дис. док. фіз.-мат. наук: 01.01.07 / Подлевський Богдан Михайлович. – Київ, 2011. – 316 с.
4. *Podlevskiy B. M.* On the bilateral convergence of Halley's method / B. M. Podlevskiy // Z. angew. Math. Mech. –2003. – Vol. 83, No. 4. – P. 282-286.
5. *Podlevskiy B. M.* One approach to construction of bilateral approximations methods for solution of nonlinear eigenvalue problems / B. M. Podlevskiy // American Journal of Computational Mathematics. – 2012. – Vol. 2, No. 2. – P. 118-124.
6. *Podlevskiy B. M.* One approach to construction of bilateral approximations methods for solution of nonlinear eigenvalue problems / B. M. Podlevskiy // Canadian Open Mathematics Journal. – 2014. – Vol. 1, No. 2. – P. 1-17.

УДК 532.546

Поляков В.Л.

(Інститут гідромеханіки НАНУ)

ПРО МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ З ПОДВІЙНОЮ ПОРИСТИСТІЮ

В природі широко розповсюджені пористі середовища з різними структурними неоднорідностями. У водогосподарчій практиці, при видобутку рідинних корисних копалин нерідко доводиться стикатися з агрегованими ґрунтами, тріщинуватими породами. Фактично в них містяться системи пор двох типів, а саме, макро- і мікропори. Перші займають малу частину порового простору. Маючи відносно невеликий гідравлічний опір, вони здатні пропускати значну кількість рідини, а тому в підземному транспорті речовин грають визначальну роль. Разом з цим серйозний внесок в динаміку ґрунтових і підземних вод дають пори другого типу. Вони зосереджені в матриці середовища, яку з механічної точки зору виправдано розглядати як сукупність елементарних блоків (елементів). Їх характерні розміри на декілька порядків менше, ніж розміри області руху. При цьому кожний з таких елементів пронизаний величезною кількістю пор – мікроканалів, в яких знаходяться основні запаси рідини. Тому, хоча фільтраційний процес тут протікає набагато повільніше, тим не менш він в змозі забезпечувати на протязі тривалого часу підживлення (або спрацювання) макропотoku. В цілому вплив матриці на роботу інженерних пристроїв і споруд в середовищах з подвійною пористістю може виражатися у вельми значних змінах характеристик фільтраційного режиму і очевидно, що відмічений структурний фактор важливо враховувати правильно з фізичної точки зору і при проектуванні, і при експлуатації вказаних інженерних засобів, в першу чергу різноманітних дренажів.

Надійний розрахунок дренажів у подібних середовищах можливий тільки за умови роздільного розгляду руху рідини по системам макро- і мікропор. Відповідні математичні моделі включають два взаємопов'язаних блока. Якщо виходити з концепції суцільного середовища, то ці блоки сумісно описують фільтрацію рідини в двох континуумах, які вкладені один в одній. Перший породжений мережею макропор (тріщин), а другий – елементами матриці. У даному випадку можна застосовувати два підходи, кожний з яких має свої переваги і недоліки. Нижче увага акцентується на структурному підході. У відповідності з ним перш за все потрібно детально вивчати закономірності фільтрації рідини в межах окремого елемента з акуратним врахуванням водно-фізичних умов, які складаються в оточуючих його макропорах. Однак, попередньо необхідно вдатися до

схематизації будови матриці, яка полягає в уніфікації структуроутворюючих елементів. Її результатом є вибір репрезентативного елемента, розміри і форма якого приписуються всім елементам модельної матриці. Тоді неусталена напірна фільтрація в межах такого елемента сферичної форми описується наступним рівнянням

$$a \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \right) = r \frac{\partial s}{\partial t}, \quad r_e \geq r \geq 0; \quad (1)$$

де s – функція зниження п'єзометричного напору в мікрообласті фільтрації; $a = k/(\rho g \beta)$, k – коефіцієнт фільтрації, ρ – густина рідини, g – прискорення сили тяжіння, $\beta = n_0 \beta_l + \beta_f$, β – коефіцієнт пружної ємності, n_0 – пористість, β_l і β_f – стисливість рідини і системи макропор, r_e – радіус елемента. Оператор граничних і початкових умов включає

$$r = r_e, \quad s = S_e(t); \quad (2)$$

$$r = r_*, \quad s = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial r} = 0; \quad (3)$$

$$t = 0; \quad s = 0; \quad r_* = r_e. \quad (4)$$

Тут S_e – зниження напору в макропорах навкруги елемента, r_* – радіус зони гідродинамічного впливу вказаних макропор на його водно-фізичний стан. Задача (1)-(4) спочатку була переформульована з використанням безрозмірних змінних і параметрів, а потім розв'язана з допомогою прийому динамічного осереднення. Наближений розв'язок в загальному випадку виражається залежністю для відносного зниження

$$\bar{s}(\bar{r}, \bar{r}_*(\bar{t})) = \bar{S}_e(\bar{t}) \frac{\frac{\bar{r}_*}{\bar{r}} + \ln \frac{\bar{r}}{\bar{r}_*} - 1}{\bar{r}_* - \ln \bar{r}_* - 1} \quad (5)$$

і звичайним диференціальним рівнянням першого порядку відносно радіусу \bar{r}_*

$$\frac{d\bar{r}_*}{d\bar{t}} = \frac{\bar{r}_* - \ln \bar{r}_* - 1}{\varphi_2(\bar{r}_*)} \left[1 - \bar{r}_* - \varphi_1(\bar{r}_*) \frac{d \ln \bar{r}_* \bar{S}_e}{d\bar{t}} \right]. \quad (6)$$

Тут $\bar{s} = s/S^0$, S^0 – масштаб для шуканої величини s , наприклад, початковий напір в пласті, $\bar{r} = r/r_e$; $\bar{t} = at/r_e^2$; $\varphi_1(\bar{r}_*) = \frac{\bar{r}_*}{2} - \frac{\bar{r}_*^3}{18} - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \ln \bar{r}_*$,

$\varphi_2(\bar{r}_*) = \frac{(1 - \bar{r}_*)(\bar{r}_*^3 - 1)}{9\bar{r}_*} - \frac{1 - \bar{r}_*^2}{6} \ln \bar{r}_*$. До рівняння (6) приєднується друга з

умов (4). Дана задача легко розв'язується в двох частинних випадках. Так, при $S_e = const$ розв'язок має вигляд такої зворотньої інтегральної функції

$$\bar{t} = \frac{1}{18} \int_1^{\bar{r}} \frac{2(\xi^3 - 1) - 3\xi(\xi + 1) \ln \xi}{\xi(\xi - \ln \xi - 1)} d\xi. \quad (7)$$

Таким чином відносна витрата рідини крізь поверхню виділеного елемента \bar{i} складе

$$\bar{i}(\bar{r}_*) = \left. \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=1} = \frac{1 - \bar{r}_*}{\bar{r}_* - \ln \bar{r}_* - 1} = f(\bar{r}_*). \quad (8)$$

Слід відмітити, що точний розв'язок задачі (1)-(4) відомий давно і виражається в рядах, які добре збігаються при великих значеннях часу. Тому він може слугувати еталоном при оцінці точності нового розв'язку. Однак, цінність наближеного розв'язку полягає не тільки в його простоті, але і в тому, що його неважко узагальнити на більш складні водно-фізичні умови, коли строгі залежності одержати вже не вдається. Отже, точні значення функцій $\bar{s}(\bar{r}, \bar{t})$, $\bar{i}(\bar{t})$ при $S_e = const$ можуть точно обчислюватись з виразів

$$\bar{s}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{2\bar{S}_e}{\pi \bar{r}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\pi \bar{r}}{n} e^{-n^2 \pi^2 \bar{t}}, \quad (9)$$

$$\bar{i}(\bar{t}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \bar{t}}. \quad (10)$$

Був виконаний порівняльний аналіз обох розв'язків. Його ілюструє рис.1, на якому представлені результати розрахунку основної для внутрішньої задачі характеристики. Похибки при цьому виявились настільки малими, що криві 1 і 2 практично злилися.

Кожний блок матриці при складанні загального балансу рідини в пласті, що розробляється, грає роль елементарного джерела (або стоку). Сукупність же мікропотоків, що утворюються і забезпечують обмін рідиною між мережами транспортних і нетранспортних пор, при реалізації структурного підходу зручно описувати неперервною функцією джерел (або стоків) I від макрорадіусу R і t . Гідродинамічна обстановка в усьому (без)напорному пласті перш за все характеризується полями тисків (напорів), а саме, за наявності осьової симетрії і в рамках гідравлічної теорії функціями $\rho(R, t)$ або $S(R, t)$. Тоді швидкість обміну рідиною між вищезгадуваними мережами при дії свердловини в напорному пласті описується наступним чином

$$I(R, t) = \chi \cdot \left. \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=1} = \frac{\chi}{S^0} f(\bar{r}_*) \cdot S(R, t). \quad (11)$$

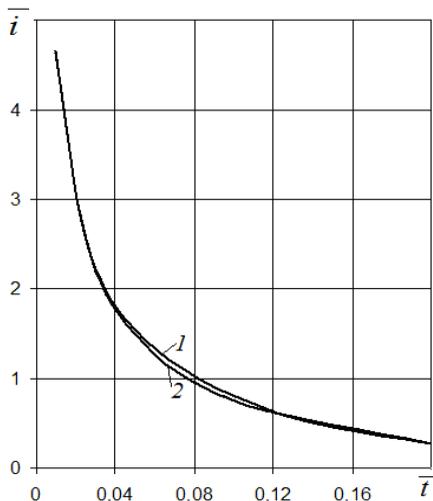


Рис.1. Зміна з часом відносної витрати рідини через поверхню елемента матриці: 1 – за формулою (10), 2 – за (8) .

Тут $\chi = 3 \frac{k(1-n_f)S^0 R_w}{k_f r_e^2}$, n_f – питомий об'єм макропор, R_w – радіус

свердловини, k_f – коефіцієнт фільтрації фіктивного пористого середовища, яке містить тільки макропори. Конкретизація функції джерел дозволила сформулювати зовнішню задачу. Її розв'язок поки що можливий тільки чисельними методами і дозволить встановити дійсні розподіли тиску (напору) і швидкості в межах всього пласта.

Разом з цим побудований ефективний розв'язок внутрішньої задачі дає можливість обґрунтувати обмінний коефіцієнт в математичній моделі, яка являється базовою при застосуванні континуального підходу. Даний підхід передбачає представлення пористого середовища у вигляді вже двох континуумів, які утворені на основі окремо макро- і мікропор. Обмін між ними контролюється перепадом напорів, які являють собою шукані неперервні функції від R і t . Була сформульована відповідна математична задача, а потім вона була зведена до задачі Коши. Розв'язати останню неважко з використанням відомих пакетів програм математичного аналізу (Mathcad і Matlab). Нарешті проведено змістовний кількісний аналіз на численних прикладах. Форма представлення результатів дозволяє їх використовувати в інженерній практиці.

УДК 519.21

О.В. Прищепа

(Національний університет водного господарства та природокористування)

ПРО СИСТЕМУ ТИПУ М/М/2/Ν З ОБМЕЖЕНИМ ЧИСЛОМ ПОВТОРНИХ СПРОБ

Сучасні практичні задачі вимагають використання нових моделей систем масового обслуговування, що більш точно моделюють процеси обслуговування. В багатьох ситуаціях особливе місце займають системи з повторними викликами. Для таких систем характерне те, що вимоги можуть здійснювати повторні виклики до тих пір, поки не отримають обслуговування (див., наприклад, [1], [2]). Хоча на практиці число повторних спроб часто буває обмеженим.

В роботі, що пропонується, розглядається система масового обслуговування з двома приладами та однією повторною спробою. Формально дану систему можна описати наступним чином. Ззовні до системи через випадкові проміжки часу надходять вимоги, які обслуговуються у випадку наявності хоча б одного вільного приладу та залишають систему. Час обслуговування вимог має показниковий розподіл з параметром μ . Якщо всі прилади зайняті, то вимоги формують джерела повторних викликів, звідки мають можливість здійснити повторне звернення для отримання обслуговування з інтенсивністю ν . Кількість місць для формування джерел повторних викликів дорівнює N . Якщо при повторній спробі всі прилади є зайняті, то вимога залишає систему без обслуговування. При умові, що всі прилади зайняті та існує N джерел повторних викликів, нові вимоги при надходженні втрачаються системою назавжди. Інтенсивність надходження вимог λ_j залежить від кількості джерел повторних викликів.

Процес обслуговування для даної моделі визначається двовимірним ланцюгом Маркова $Q^N(t) = (Q_1^N(t), Q_2^N(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S(Q^N) = \{0,1,2\} \times \{0,1,\dots,N\}$. Оскільки фазовий простір $S(Q^N)$ процесу $Q^N(t)$ скінченний, то для нього завжди існує стаціонарний режим.

Використовуючи ланцюгові дроби виду $x_j = \left[0; \frac{b_{j+1}}{a_{j+1}}, \dots, \frac{b_{N-1}}{a_{N-1}}; \frac{b_N}{a_N} \right]$, $j = 0,1,\dots,N-1$ [3], що визначаються через параметри системи λ_j, μ, ν , знайдено явні формули для стаціонарних ймовірностей π_{ij}^N , $(i, j) \in S(Q^N)$.

Теорема 1. Якщо $\lambda_j, \mu, \nu > 0$, то стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}$, $(i, j) \in S(Q^N)$ системи типу $M/M/2/N$ можна подати в наступному вигляді:

$$\pi_{0j}^N = \left[\prod_{k=j}^{N-1} x_k \right]^{-1} \pi_{0N}^N, \quad \pi_{1j}^N = \frac{\lambda_j + j\nu}{\mu} \left[\prod_{k=j}^{N-1} x_k \right]^{-1} \pi_{0N}^N,$$

$$\pi_{2j}^N = \frac{1}{2\mu^2} ((\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu\mu - (j+1)\nu\mu x_j) \left[\prod_{k=j}^{N-1} x_k \right]^{-1} \pi_{0N}^N, \quad j=0,1,\dots,N-1,$$

$$\pi_{1N}^N = \frac{\lambda_N + N\nu}{\mu} \pi_{0N}^N, \quad \pi_{2N}^N = \frac{(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu}{2\mu^2} \pi_{0N}^N,$$

$$\left(\pi_{0N}^N \right)^{-1} = \frac{1}{2\mu^2} \left(\sum_{j=0}^{N-1} ((\lambda_j + \mu + j\nu)(\lambda_j + 2\mu + j\nu) - \mu(\lambda_j + (j+1)\nu x_j)) \left[\prod_{k=j}^{N-1} x_k \right]^{-1} + \right. \\ \left. + (\lambda_N + \mu + N\nu)(\lambda_N + 2\mu + N\nu) - \lambda_N \mu \right).$$

Враховуючи змінний характер інтенсивності вхідного потоку в поданій моделі, пропонується порогова стратегія керування, яка задається порогом H . У цьому випадку система може функціонувати у двох режимах. Якщо сумарна кількість джерел повторних викликів в системі не перевищує H , то вона функціонує в першому режимі з інтенсивністю вхідного потоку h_1 . Якщо сумарна кількість джерел повторних викликів стає більшою за H , то система переходить в другий режим з інтенсивністю вхідного потоку h_2 . Для такого типу керування системою побудовано оптимізаційну задачу, розв'язком якої є такий поріг H , який максимізує середній прибуток від роботи системи. Подібна оптимізаційна задача для систем з повторними викликами розглядалася в роботі [4].

1. *Artalejo J. R.* Retrial Queueing Systems A Computational Approach / *J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral*. – Springer, 2008. – 317 p.
2. *Falin G.I.* Retrial Queues / *G. I. Falin, J.G.C. Templeton*. – London:Chapman and Hall, 1997. – 317 p.
3. *Демидович П.Б.* Основы вычислительной математики / *П.Б.Демидович, И.А.Марон*. – Москва, 1966. – 664 с.
4. *Лебедев Є.О.* Оптимізація систем з повторами і скінченним числом джерел вимог / *Лебедев Є.О., Пономарьов В.Д.* // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.- мат. науки. - 2008. - № 2. - с. 91-97.

УДК 519.6:539.3

І. І. Прокопишин

(Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВІ ІТЕРАЦІЙНІ АЛГОРИТМИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ

Проблема розв'язування нелінійних операторних і варіаційних рівнянь з недиференційовним оператором виникає у багатьох галузях сучасної науки, зокрема і в механіці деформівного твердого тіла. Такими рівняннями можна описувати математичні моделі теорії пластичності, а також механіки контактної взаємодії.

Ефективними ітераційними методами розв'язування згаданих рівнянь є різницеві методи [1-5, 7] та напівгладкі методи Ньютона [6, 8, 9], які, зазвичай, мають надлінійну швидкість збіжності в околі розв'язку. Обидва класи методів є узагальненнями методу Ньютона, який безпосередньо не є застосовним до рівнянь з недиференційовним оператором. В ітераційних методах різницевого типу диференціал оператора, який використовують у класичному методі Ньютона, замінюють різними різницевиими формулами, а у напівгладких методах Ньютона – субдиференціалами.

У пропонованій роботі розглянуто задачу про контакт багатьох нелінійно пружних тіл за можливої наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів. Здійснено слабе формулювання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння з недиференційовним оператором у гільбертовому просторі. Досліджено існування та єдиність розв'язку цього рівняння.

Ефективним підходом до розв'язування задач про контакт багатьох тіл є застосування методів декомпозиції за підобластями (тілами). Методи декомпозиції області (МДО) – це клас алгоритмів, які зводять розв'язування задач математичної фізики у складній багатокомпонентній області до розв'язування послідовності задач в окремих підобластях. Це дозволяє організовувати розпаралелення обчислень та використовувати різні математичні моделі і методи в різних підобластях.

Нажаль, застосування різницевих ітераційних методів та напівгладких методів Ньютона до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння контактної задачі, що розглядається, не дозволяє отримати декомпозицію за підобластями.

У цьому дослідженні запропоновано такі ітераційні методи, які зводять до декомпозиції задачі за підобластями, тобто зводять розв'язування отриманого нелінійного варіаційного рівняння до розв'язування на

кожній ітерації незалежних лінійних варіаційних рівнянь в окремих підобластях (тілах). Розроблено два класи паралельних ітераційних методів декомпозиції області типу Робіна – одноточкові та двоточкові неявні нестационарні параметричні алгоритми декомпозиції. Деякі з алгоритмів першого класу можна розглядати як певні модифікації напівгладких методів Ньютона. Алгоритми МДО другого класу отримано на основі модифікацій комбінованих різницевих методів, а саме – комбінованого методу Ньютона і хорд [4, 5] та комбінованого методу Ньютона і Курчатова [3, 4].

Доведено теорему про умови слабкої збіжності методів першого класу. Здійснено програмну реалізацію розроблених МДО з використанням скінченноелементних апроксимацій на трикутних елементах для плоских задач про контакт двох та трьох лінійно пружних тіл з урахуванням нелінійних поверхневих шарів вінклерівського типу. Досліджено вплив ітераційних параметрів алгоритмів на фізичних параметрів задачі на швидкість збіжності запропонованих методів. Проведено порівняння числової ефективності алгоритмів декомпозиції області з обох класів.

1. *Бартіш М. Я.* Про один різницевий метод розв'язування нелінійних операторних рівнянь / М. Я. Бартіш, Ю. М. Щербина // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 7. – С. 579-582.
2. *Шахно С. М.* Про двокроковий ітераційний процес в узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку / С. М. Шахно // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – Т. 52, № 1. – С. 59-66.
3. *Шахно С. М.* Двоточковий метод для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором / С. М. Шахно, Г. П. Ярмола // Мат. студії. – 2011. – Т. 36, № 2. – С. 213-220.
4. *Шахно С. М.* Аналіз збіжності комбінованого методу для розв'язування нелінійних рівнянь / С. М. Шахно, І. В. Мельник, Г. П. Ярмола // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, № 1. – С. 31-39.
5. *Argyros I. K.* A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space / I. K. Argyros // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – Vol. 298, No. 2. – P. 374-397.
6. *Chen X.* Smoothing methods and semismooth methods for nondifferentiable operator equations / X. Chen, Z. Nashed, L. Qi // SIAM J. Numer. Anal. – 2000. – Vol. 38. – P. 1200-1216.
7. *Hernández M. A.* The secant method for nondifferentiable operators / M. A. Hernández, M. J. Rubio // Appl. Math. Lett. – 2002. – Vol. 15, No. 4. – P. 395-399.
8. *Hintermüller M.* The primal-dual active set strategy as semismooth Newton method / M. Hintermüller, K. Ito, K. Kunisch // SIAM J. Optim. – 2003. – Vol. 13, No. 3. – P. 865-888.
9. *Ulbrich M.* Semismooth Newton methods for operator equations in function spaces / M. Ulbrich // SIAM J. Optim. – 2003. – Vol. 13, No. 3. – P. 805-842.

УДК 539.3

В. С. Проценко, Н. А. Українець

(Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ»)

**ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ
ПРУЖНОСТІ ДЛЯ НАПІВПРОСТОРУ З НЕСКІНЧЕНОЮ
КРУГОВОЮ ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ**

За допомогою узагальненого методу Фур'є [1] у роботах [2-4] були розглянуті перша та друга основні задачі теорії пружності для пружного напівпростору з круговою циліндричною порожниною, що паралельна до його границі. Дослідження напружено-деформованого стану цієї просторової області у випадку, коли на циліндричній поверхні задані переміщення, а на границі напівпростору – напруження, наведено в [5].

В даній роботі знайдено розв'язок однорідного рівняння Ламе у пружному напівпростору з нескінченною круговою циліндричною порожниною при умові, що на границі напівпростору задані переміщення, а на циліндричній поверхні – напруження.

Розглянемо просторову область Ω , що обмежена двома координатними поверхнями декартової та циліндричної систем координат: площиною S_1 та поверхнею кругового циліндра S_2 , вісь якого спрямована паралельно до S_1 . Область Ω заповнена однорідним та ізотропним середовищем. З граничними поверхнями S_i ($i=1, 2$) пов'яжемо відповідні однаково орієнтовані декартову $\{x, y, z\}$ та циліндричну $\{\rho, \varphi, z\}$ системи координат з поєднаними центрами. Вісь Oz спрямована уздовж осі циліндра радіуса a , початок координат O знаходиться на відстані h від поверхні S_1 , а вісь Oy перпендикулярна до S_1 . Тоді рівняння площини S_1 запишеться у вигляді $y = h$, рівняння циліндричної поверхні – у вигляді $\rho = a$, а область Ω визначатиметься системою нерівностей: $\{y < h, \rho > a, a < h\}$.

Розглянемо граничну задачу для рівняння Ламе:

$$\begin{aligned} \Omega : \quad \Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \\ \vec{u}|_{S_1} &= \vec{u}_{01}(x, z), \\ F\vec{u}|_{S_2} &= F\vec{u}_{02}(\varphi, z), \end{aligned}$$

де \vec{u} , $F\vec{u}$ - вектори пружних переміщень та напружень, σ - коефіцієнт Пуассона.

Для дослідження задачі скористуємося УМФ [1]. Згідно з цим методом для кожної граничної поверхні області Ω розглядається система базисних розв'язків рівняння Ламе. Так, у роботах [2, 3] наведені системи базисних розв'язків однорідного рівняння Ламе для напівпростору $\vec{u}_k^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ та циліндра $\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ ($\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$) ($k = 1, 2, 3, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), які записані відповідно в декартовій та циліндричній системах координат.

Внутрішні (зовнішні) базисні розв'язки для напівпростору – це векторні функції $\vec{u}_k^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu)$, які є регулярними в області $\{y < h\}$ ($\{y > h\}$). Внутрішні (зовнішні) базисні розв'язки для циліндра – це векторні функції $\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ ($\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$), які є регулярними в області $\{\rho < a\}$ ($\{\rho > a\}$). Базисні розв'язки для циліндра містять модифіковані функції Бесселя 1-го та 2-го роду.

Для базисних розв'язків рівняння Ламе отримано формули для зусиль $F\vec{u}_k^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu)$, $F\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ та $F\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$, які діють на поверхнях S_1 та S_2 відповідно [2].

Загальний розв'язок граничної задачі надається у вигляді суперпозиції зовнішніх базисних розв'язків для циліндра та внутрішніх базисних розв'язків для напівпростору

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{km}(\lambda) \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda + \sum_{p=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_p(\lambda, \mu) \vec{u}_p^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) d\mu d\lambda$$

де $B_{km}(\lambda)$ ($k = 1, 2, 3, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) та $H_p(\lambda, \mu)$ ($p = 1, 2, 3$) – невідомі інтегральні щільності.

Авторами доказані теореми додавання (або формули перерозкладання) базисних розв'язків однорідного рівняння Ламе для напівпростору та циліндра. Доказ теорем ґрунтується на застосуванні співвідношень, які зв'язують відповідні гармонійні функції в даних системах координат [6]. Застосування цих формул дозволяє записати розв'язок задачі у декартовій та циліндричній системах координат та задовольнити граничним умовам на відповідних поверхнях області Ω . Так задача зводиться до трьох нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно інтегральних щільностей $B_{km}(\lambda)$. В операторній формі ці системи мають вигляд

$$(I + G)\vec{b} = \vec{q},$$

де G – оператор системи, I – одиничний оператор, \vec{b} та \vec{q} – вектор-стовпці невідомих щільностей $B_{km}(\lambda)$ та правих частин системи відповідно.

Доказано теорему про те, що оператор G є цілком неперервним у просторі l_2 , а праві частини належать l_2 за умови, що граничні поверхні області Ω не перетинаються, тобто $a < h$. Згідно з альтернативою Гілберта система рівнянь має єдиний розв'язок, який теж належить l_2 . Його можна знайти за допомогою метода редукції [7].

Чисельні розрахунки проведені для різних значень геометричних параметрів та заданих на граничних поверхнях функцій. Вони свідчать про швидку збіжність методу редукції. Знайдено розподіл напружень і деформацій в області Ω . Відзначимо, що напруження суттєво залежать від значення параметра $\varepsilon = a/h$. Вони концентруються поблизу границі області Ω і суттєво зростають, коли $\varepsilon \rightarrow 1$.

1. *Проценко В.С.* Решение пространственных задач теории упругости с помощью формул переразложения / В.С. Проценко, А.Г. Николаев // Прикладная механика. - 1986. - Т. 22, № 7. - С. 83–89.
2. *Проценко В.С.* Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Українець // Вісник Запорізького нац. ун-ту: Збірн. наук. ст. Фіз.-мат. науки. – Запоріжжя: Запорізький нац. ун-т, 2015. – № 2. – С. 192–201.
3. *Проценко В.С.* Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Попова // Доповіді НАН України. - 2004. - № 12. - С. 52–58.
4. *Попова Н.А.* Исследование напряженно-деформированного состояния упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью / Н.А. Попова // Вісник Харківського національного університету. Серія Математика, прикладна математика і механіка. – 2004. – № 645. – С. 102–107.
5. *Проценко В.С.* Смешанная задача для упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Українець // Теоретическая и прикладная механика. – Донецк, 2006. – № 42. – С. 17–22.
6. *Ерофеенко В.Т.* Теоремы сложения: Справочник / В.Т. Ерофеенко. – Минск: Наука и техника, 1989. – 255 с.
7. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 742 с.

УДК 621.64.029

Я. Д. П'янило, А.Т. Лянце, Г.М. П'янило, О. Б. Браташ, В.О. Собко

(Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України)

**ВИКОРИСТАННЯ СПЕКТРАЛЬНИХ РОЗКЛАДІВ В ЗАДАЧАХ
МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ**

Спектральні методи дають можливість розв'язувати задачі у тому випадку, коли функції, що входять у математичну модель опису фізичного процесу, зображаються збіжними рядами за даним базисом. У теорії ортогональних рядів наводяться теореми, у яких сформульовано умови збіжності [4]. Спектральні методи розв'язування задач зводяться до обчислення узагальнених спектрів, а способи їх обчислення залежать від вигляду вхідної інформації.

Нехай многочлени $u_n(x)$ ортогональні на проміжку $[a, b]$ і функція $\varphi(x)$ подається ортогональним рядом за даними многочленами

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} u_n(x). \quad (1)$$

Відомо, що $N+1$ -ий ортогональний многочлен має $N+1$ дійсний корінь, який належить до проміжку ортогональності. Для обчислення узагальнених спектрів φ_n існує квадратурна формула

$$\varphi_n \approx \sum_{j=0}^N \rho_j^2 u_n(x_j) \varphi(x_j), \quad \rho_j^{-2} = \sum_{i=0}^N u_i^2(x_j), \quad (2)$$

де x_j - корені многочлена $u_{N+1}(x)$, тобто $u_{N+1}(x_j) = 0$.

Якщо апроксимуючі функції $\varphi(x)$ та $f(t)$ задаються в аналітичному вигляді, то існують параметричні зображення узагальнених спектрів рядів, зокрема для многочленів Якобі $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ та Чебишева-Лагерра $L_n^\lambda(t)$.

$$\varphi_n = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \varphi(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx. \quad (3)$$

$$f_n = \int_0^\infty t^\lambda e^{-t} f(t) L_n^\lambda(t) dt, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (4)$$

При внесенні вхідних значень у дискретній формі, тобто, коли відомі значення функції $\varphi(x_j)$ в точках x_j , $j = \overline{1, N}$, для знаходження узагальнених спектрів можна використати квадратурні формули для

обчислення інтегралів (3) і (4), метод найменших квадратів або ж інші способи.

Коефіцієнти φ_n залежать від значень коренів x_i і значень функції $\varphi(x_i)$. Аналіз результатів обчислювального експерименту дає можливість зробити висновок про те, що похибка у значеннях функції $\varphi(x_i)$ має значно менший вплив на точність обчислень коефіцієнтів φ_n , ніж похибка у визначенні значень коренів x_i .

Многочлени Чебишева-Лагерра мають істотний недолік, який полягає в тому, що при великих порядках n їх поведінка наступна

$$L_n^\lambda(t) = O\left(e^{t/2} t^{-(2\lambda+1)/4} n^{(2\lambda-1)/4}\right). \quad (5)$$

Ця властивість многочленів Чебишева-Лагерра значно звужує клас задач, у яких використовується ортогональне перетворення типу (4), оскільки виникають обчислювальні труднощі при сумуванні ряду (2) для великих t . На практиці ця проблема вирішується введенням масштабного множника. Однак, зміна масштабного множника вимагає повторного розв'язку задачі й приводить до нестійкості в обчисленні оригіналу $f(t)$. Тому пропонується узагальнити перетворення Чебишева-Лагерра наступним чином.

Нехай

$$f_n = \int_0^\infty t^{\nu^2 + \nu - 1} e^{-\mu t} L_n^\lambda(\mu t^\nu) f(t) dt, \quad (6)$$

де $\mu > 0$, $|\nu| < \infty$, $\nu \neq 0$.

Тоді $f(t)$ буде обчислюватися за формулою

$$f(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{n! f_n}{\Gamma(n + \lambda + 1)} L_n^\lambda(\mu t^\nu). \quad (7)$$

При апроксимації функції рядом (7) квадратурна формула для обчислення лагеррівського спектру буде мати вигляд

$$f_n = \frac{1}{|\nu|} \mu^{-\lambda-1} \sum_{j=0}^N \frac{t_j L_N^\lambda(t_j) f\left[\left(t_j / \mu\right)^{1/\nu}\right]}{(N+1)^2 \left[L_{N+1}^\lambda(t_j)\right]^2}. \quad (8)$$

Відмітимо те, що введене таким чином узагальнення ряду Фур'є-Лагерра дозволяє використати при його дослідженні всі властивості многочленів Чебишева-Лагерра.

Слід зазначити, що поряд із використанням узагальнених многочленів Чебишева-Лагерра можна застосовувати спектральний розклад у базисі функцій Лагерра

$$\varphi_n(t) = e^{-t/2} L_n^\lambda(t), \quad \lambda > -1, \quad (9)$$

які є ортогональними на проміжку $[0, \infty)$ і зберігають всі основні властивості многочленів Чебишева-Лагерра. При $n \rightarrow \infty$ і $t \rightarrow \infty$ функції Лагерра $\varphi_n(t)$ прямують до нуля.

Із формули (9) випливає те, що корені функції Лагерра $\varphi_n(t)$ на проміжку ортогональності співпадають із коренями многочленів Чебишева-Лагерра.

Поряд з ортогональними базисами останнім часом успішно застосовуються біортогональні базиси. Основною перевагою застосування біортогональних базисів є більша швидкість збіжності ряду. Недоліком є те, що відомих реальних біртогональних базисів є небагато, а побудова нових пов'язана із значними обчислювальними труднощами.

В роботі побудовано квазіспектральні біортогональні поліноми на базі оператора інтегрування $L: L_{2,\rho}[-1,1] \rightarrow L_{2,\rho}[-1,1]$ з ваговою функцією $\rho = 1/\sqrt{1-x^2}$, який для функції $f \in L_{2,\rho}[-1,1]$ ставить у відповідність вираз [5,9]

$$Lf(x) = \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} f(x_2) dx_2 = \int_{-1}^x (x-x_1) f(x_1) dx_1. \quad (10)$$

Відомо, що вираз (10) не має відмінних від нуля власних значень. На базі цього оператора та многочленів Чебишева $T_n(x)$ побудовано біортогональні базиси, які апробовані на модельних задачах. Зокрема, доведено наступні твердження.

Твердження 1. Якщо многочлен $\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x)$, $i = 1, \dots, s$

такий, що $\int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i-1}^{2s-1}(x) \bar{U}_{2j-1}^{2s-1}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_{2i-1}, & i = j \end{cases}$, то коефіцієнти \bar{c}_{2j-1}^{2i-1}

знаходять згідно з побудованим алгоритмом.

Твердження 2. Якщо многочлен $\bar{U}_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j}^{2i} T_{2j}(x)$, $i = 1, \dots, s$

такий, що $\int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i}^{2s}(x) \bar{U}_{2j}^{2s}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_{2i}, & i = j \end{cases}$, то його коефіцієнти \bar{c}_{2j}^{2i}

знаходяться згідно з алгоритмом.

Зауважимо, що аналогічним чином можна побудувати біортогональні базиси і на базі інших класичних ортогональних многочленів.

Якщо поліноми $\bar{U}_i^s(x)$ зінтегрувати в межах від -1 до x з вагою $\rho(x)$, то дістанемо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_{2i}^{2s}(x) \\ \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) \end{array} \right\} = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \left\{ \begin{array}{l} \bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x_1) \\ \bar{U}_{2i}^{2s}(x_1) \end{array} \right\} \frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}} \quad i = 1, \dots, s. \quad (11)$$

Поліноми $V_{2i}^{2s+j}(x)$ та $\bar{V}_{2i-j}^{2s+j}(x)$, $i = 1, \dots, s$, $j = \overline{0,1}$ є біортогональними на проміжку від -1 до $+1$ і володіють властивостями

$$\int_{-1}^1 \rho(x) V_{2i}^{2s}(x) \bar{V}_{2j}^{2s}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ -\sigma_{2i-1} / \lambda_{2i-1}, & i = j \end{cases}, \quad (12)$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) V_{2i-1}^{2s+1}(x) \bar{V}_{2j-1}^{2s+1}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ -\sigma_{2i} / \lambda_{2i}, & i = j \end{cases}. \quad (13)$$

Числовий експеримент. Нестационарний рух газу в горизонтальних трубопроводах описується лінеаризованою системою диференціальних рівнянь в часткових похідних, яка має такий вигляд [1-3]

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + a\omega(x,t) - bp(x,t) = 0, \\ \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

де p, ω – відповідно, тиск і масова швидкість руху газу; t – час; x – біжуча координата, $x \in [0, L]$; L – довжина трубопроводу.

Висновки. Як показує практика, вибір базису для знаходження розв'язків крайових задач залежить від поставлених критеріїв до цих розв'язків та аналізу самих задач. Отримані теоретичні результати підтверджують необхідність побудови та дослідження різних базисів для знаходження розв'язків задач математичної фізики.

1. *B.B. Lapuk.* The theoretical basis for the development of deposits of natural gas. - Moscow-Izhevsk: institut Computer Science, 2002, 296 c. (in Ukrainian).
2. *Lihong Zhang, Guotao Wang, Guangxing Song.* On mixed boundary value problem of impulsive semilinear evolution equations of fractional order // *Zhang et al.* Boundary Value Problems 2012, 2012:17 p. 1-8.
3. *Mariusz Ciesielski and Jacek Leszczynski.* Numerical simulations of anomalous diffusion // Gliwice, Poland – Computer Methods in Mechanics June 3-6, 2003, p. 1-5.
4. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

УДК 517:518.948

П.С. Сеньо

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

МЕТОДИКА ПОБУДОВИ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ

Нехай потрібно знайти двохсторонні обмеження розв'язку задачі Коші

$$y' = f(x, y(x)), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

які з наперед заданою точністю гарантовано містять цей розв'язок.

Розроблена математика, (див. [1], [2], [3]), основними об'єктами якої є функціональні інтервали, означені в просторі обмежених в інтервалі $X \subseteq D \subset R$ функцій. Введені арифметичні та теоретико – множинні операції над такими об'єктами; поняття віддалі, норми та ширини їх.

Доведено, що квазілінійний простір $L(X)$ таких елементів при так введеної метриці є повним метричним простором, а так означені операції є неперервними та замкненими. На цій основі природнім чином трактується збіжність послідовностей таких елементів.

В [3] доведена наступна теорема, висновки якої, зокрема, є основою побудови методів розв'язування задачі (1) - (2).

Теорема 1. Нехай функція $y(x)$ один раз неперервно диференційовна у кожній точці x інтервалу $[a, b]$ і функції $\underline{g}(x)$, $\bar{g}(x)$ такі, що на цьому інтервалі виконується подвійна нерівність

$$\underline{g}(x) \leq y'(x) \leq \bar{g}(x). \quad (3)$$

Тоді виконуються наступні нерівності:

$$y_a + \int_a^x \underline{g}(t) dt \leq y(x) \leq y_a + \int_a^x \bar{g}(t) dt, \quad (4)$$

$$y_b - \int_x^b \underline{g}(t) dt \leq y(x) \leq y_b - \int_x^b \bar{g}(t) dt, \quad (5)$$

де $y_a = y(a)$, $y_b = y(b)$. ■ (6)

На інтервалі $[a, b]$ будемо лінійний функціональний інтервал $L(X) = \{X, \underline{l}(x), \bar{l}(x)\}$, що містить функцію $f(x, y(x))$, обмежуючі функції якого $\underline{l}(x), \bar{l}(x)$ кусково-лінійні. Для цього попередньо вибираємо лінійний

функціональний інтервал $[\underline{k} x + \underline{m}, \bar{k} x + \bar{m}]$ невідомої функції - розв'язку $y(x)$ згідно наступного принципу.

Принцип 1. Миттєвий розвиток функціональної залежності в кожній точці області визначення будь якої диференційовної функції відбувається вздовж її дотичної в цій точці ■.

В результаті проведених побудов отримуємо сукупність квадратних парабол, які визначають гарантовані двох сторонні обмеження розв'язку задачі (1) - (2) на інтервалі $[a, x^*] \subset [a, b]$, у якому узгоджуються між собою лінійні функціональні інтервали $L(X) = \{X, \underline{l}(x), \bar{l}(x)\}$ та $[\underline{k} x + \underline{m}, \bar{k} x + \bar{m}]$.

Всі наступні кроки алгоритмів здійснюємо за цією ж схемою, але з врахуванням наступних результатів (див. [3]).

Нехай визначені функції

$$\underline{g}(x) = \underline{k} x + \underline{m}, \quad (7)$$

$$\bar{g}(x) = \bar{k} x + \bar{m}, \quad (8)$$

$$\underline{p}_a(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + \underline{m} x - 0.5 \underline{k} a^2 - \underline{m} a + y_a, \quad (9)$$

$$\bar{p}_a(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + \bar{m} x - 0.5 \bar{k} a^2 - \bar{m} a + y_a, \quad (10)$$

$$\underline{p}_b(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + \bar{m} x - 0.5 \bar{k} b^2 - \bar{m} b + y_b, \quad (11)$$

$$\bar{p}_b(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + \underline{m} x - 0.5 \underline{k} b^2 - \underline{m} b + y_b, \quad (12)$$

$$\omega_a(x) = \bar{p}_a(x) - \underline{p}_a(x), \quad (13)$$

$$\omega_b(x) = \bar{p}_b(x) - \underline{p}_b(x), \quad (14)$$

де $y_a = y(a)$, $y_b = y(b)$, (15)

\underline{k} , \underline{m} , \bar{k} , \bar{m} - деякі константи. Тоді виконується наступна теорема.

Теорема 2. Нехай в інтервалі $X = [a, b]$ функція $y(x)$ неперервно диференційовна і її похідна $y'(x)$ задовольняє подвійну нерівність

$$\underline{g}(x) \leq y'(x) \leq \bar{g}(x). \quad (16)$$

Тоді: $\underline{p}_a(x) \leq y(x) \leq \bar{p}_a(x)$, (17)

$$\underline{p}_b(x) \leq y(x) \leq \bar{p}_b(x); \quad (18)$$

функція $\omega_a(x)$ монотонно зростаюча, а функція $\omega_b(x)$ монотонно спадна, і їх прирости співпадають з точністю до знака; для будь-якого $x \in X = [a, b]$

$$\omega_a(x) + \omega_b(x) = C > 0, \quad (19)$$

де константа

$$C = 0.5 (\bar{k} - \underline{k})(b^2 - a^2) + (\bar{m} - \underline{m})(b - a); \quad (20)$$

якщо $\underline{k} \neq \bar{k}$, то в інтервалі $[a, b]$ рівнянь

$$\bar{p}_a(x) = \bar{p}_b(x), \quad (21)$$

$$\underline{p}_a(x) = \underline{p}_b(x) \quad (22)$$

мають розв'язки \bar{x}^* , \underline{x}^* , відповідно, і вони єдині; максимальна віддаль $diam_y$ в інтервалі $[a, b]$ вздовж осі OY між точками множини точок, обмежених параболою $\bar{p}_a(x), \bar{p}_b(x), \underline{p}_a(x), \underline{p}_b(x)$ ("параболічного паралелограма"), задовольняє співвідношення

$$diam_y = \min(Y_1, Y_2) \leq 0.5 C, \quad (23)$$

де константи

$$Y_2 = 0.5 \bar{k} (b^2 - a^2) + \bar{m} (b - a) + y_a - y_b, \quad (24)$$

$$Y_1 = y_b - y_a - 0.5 \underline{k} (b^2 - a^2) - \underline{m} (b - a). \blacksquare \quad (25)$$

Послідовне застосування висновків теорем 1, 2 з [3] до невідомої функції $y(x)$ при врахуванні того, що, згідно (1), $y' = f(x, y(x))$, дає можливість будувати двохсторонні обмеження розв'язку задачі Коші (1) - (2) на будь - якому інтервалі у вигляді квадратичних сплайнів.

Зауваження 1. Так побудовані методи дають можливість отримувати будь - яку бажану максимальну ширину двохсторонніх обмежень (див. [2]) розв'язку задачі (1) - (2).

1. П.С. Сеньо Арифметика лінійних функціональних інтервалів / П.С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. - 2014. – Вип. 21. С. 38 -57.
2. П.С. Сеньо Топологія простору лінійних функціональних інтервалів / П.С. Сеньо // Матем. та комп. моделювання. Серія: фізико-матем. науки. - 2014. – Вип. 11. С. 209- 223.
3. П.С. Сеньо Деякі застосування математики функціональних інтервалів / П.С. Сеньо // Матем. та комп. моделювання. Серія: фізико-матем. науки. - 2016. – Вип. 13. С. 182- 193.

УДК 519.6

Ю.М. Сибіль

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**ПРО ІНТЕГРАЛЬНЕ ПОДАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ
ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТРИВИМІРНОГО РІВНЯННЯ
ЛАПЛАСА**

Визначальну роль в процесі застосування методу граничних інтегральних рівнянь (методу граничних елементів) до розв'язування змішаних граничних задач відіграє подання шуканого розв'язку в певному інтегральному вигляді. В результаті ми отримуємо різні типи систем інтегральних або сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, матричні оператори яких мають різні властивості.

Нехай $\Omega_+ \subset R^3$ деяка обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею Σ , $\bar{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \Sigma$. Тоді $\Omega_- = R^3 \setminus \bar{\Omega}_+$ – область зовнішня до Ω_+ . Поверхня $\Sigma = S_0 \cup \bar{S}_1$, де $\bar{S}_1 = S_1 \cup \Gamma$, Γ – спільна межа поверхонь S_0 та S_1 . Позначимо $\Omega' = \Omega_+ \cup \Omega_-$. Розглянемо наступну граничну задачу: знайти функцію $u \in H^1(\Omega_+, L)$, яка задовольняє в Ω_+ рівняння

$$Lu = -\Delta u = 0,$$

граничну умову Діріхле на S_0 та Неймана на S_1 :

$$\gamma_{0,S_0}^+ u = g \in H^{1/2}(S_0), \quad \gamma_{1,S_1}^+ u = f \in H^{-1/2}(S_1).$$

Для функції $u \in H^1(\Omega')$, яка задовольняє в Ω' рівняння $Lu = 0$ та відповідну умову на нескінченності, вірне наступне інтегральне подання:

$$u(x) = V[\gamma_1]u(x) - W[\gamma_0]u(x), \quad (1)$$

де $[\gamma_0]u = \gamma_0^+ u - \gamma_0^- u$, $[\gamma_1]u = \gamma_1^+ u - \gamma_1^- u$, а V та W відповідно потенціали простого та подвійного шару, визначені на поверхні Σ .

1. Нехай $u(x) = 0$, $x \in \Omega_-$. Тоді з інтегрального подання (1) отримаємо:

$$u(x) = V\gamma_1^+ u(x) - W\gamma_0^+ u(x), \quad x \in \Omega_+.$$

Якщо $\tilde{g} \in H^{1/2}(\Sigma)$ – продовження g на S_1 , а $\tilde{f} \in H^{-1/2}(\Sigma)$ – продовження f на S_0 , то отримаємо наступний вираз:

$$u(x) = V_{S_0} \tau(x) - W_{S_1} \mu(x) + V\tilde{f} - W\tilde{g}, \quad x \in \Omega_+, \quad (2)$$

де $\tau \in H_{00}^{-1/2}(S_0)$, $\mu \in H_{00}^{1/2}(S_1)$, V_{S_0} та W_{S_1} – потенціали простого та подвійного шару відповідно по S_0 та S_1 . Використовуючи граничні умови, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} K\tau - \gamma_{0,S_0}^+ W\mu = g_0, \\ \gamma_{1,S_1}^+ V\tau - H\mu = f_1. \end{cases} \quad (3)$$

де $g_0 = \frac{1}{2}g - \gamma_{0,S_0}^+ V\tilde{f} + M\tilde{g}$, $f_1 = \frac{1}{2}f - N\tilde{f} + \gamma_{1,S_1}^+ W\tilde{g}$.

$K = \gamma_{0,S_0}^+ V_{S_0} : H_{00}^{-1/2}(S_0) \rightarrow H^{1/2}(S_0)$ – інтегральний оператор із слабкою особливістю, а $H = \gamma_{1,S_1}^+ W_{S_1} : H_{00}^{1/2}(S_1) \rightarrow H^{-1/2}(S_1)$ – сингулярний інтегро-диференціальний оператор.

Матричний оператор отриманої системи є додатньо визначеним у відповідних просторах слідів. Відповідна система (3) має єдиний розв’язок для довільних $g_0 \in H^{1/2}(S_0)$ та $f_1 \in H^{-1/2}(S_1)$.

Використовуючи формули стрибка

$$\gamma_1^\pm V\tau = \pm \frac{1}{2}\tau + N\tau, \quad \gamma_0^\pm W\mu = \mp \frac{1}{2}\mu + M\mu,$$

інтегральне подання (2) можна використати також для отримання системи інтегральних рівнянь другого роду:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\tau + N\tau - \gamma_{1,S_0}^+ W\mu = f_0, \\ \gamma_{0,S_1}^+ V\tau - \frac{1}{2}\mu - M\mu = g_1. \end{cases}$$

де $g_1 = \frac{1}{2}\tilde{g} + M\tilde{g} - \gamma_{0,S_1}^+ V\tilde{f}$, $f_0 = \frac{1}{2}\tilde{f} - N\tilde{f} + \gamma_{1,S_0}^+ W\tilde{g}$.

2. Припустимо, що $\gamma_{0,S_0}^- u = g$, $\gamma_{1,S_1}^- u = f$. Тоді можливе наступне інтегральне подання :

$$u(x) = V_{S_0}\tau(x) - W_{S_1}\mu(x),$$

в якому $\tau \in H_{00}^{-1/2}(S_0)$, $\mu \in H_{00}^{1/2}(S_1)$, а вихідна задача зведеться до системи граничних рівнянь (3) з $g_0 = g$ та $f_0 = f$.

3. Розглянемо випадок, коли $\gamma_{1,S_0}^+ u = \gamma_{1,S_0}^- u$, $\gamma_{0,S_1}^+ u = \gamma_{0,S_1}^- u$. Інтегральне подання має наступний вигляд:

$$u(x) = V_{S_1}\tau_1(x) - W_{S_0}\mu_0(x),$$

в якому $\tau_1 \in H_{00}^{-1/2}(S_1)$, $\mu_0 \in H_{00}^{1/2}(S_0)$. Задача зведеться до розв'язування системи інтегральних рівнянь другого роду:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 - M\mu_0 + \gamma_{0,s_0}^+ V_{s_1}\tau_1 = g, \\ -\gamma_{1,s_1}^+ W_{s_0}\mu_0 + \frac{1}{2}\tau_1 + N\tau_1 = f. \end{cases}$$

4. Нехай $\gamma_0^+ u = \gamma_0^- u$. Тоді розв'язок змішаної задачі буде мати вигляд:

$$u(x) = V\tau(x),$$

де $\tau \in H^{-1/2}(\Sigma)$. Якщо $\tau \in L_2(\Sigma)$, то $u(x) = V_{s_0}\tau_0(x) + V_{s_1}\tau_1(x)$, $\tau_0 \in L_2(S_0)$, $\tau_1 \in L_2(S_1)$. В результаті отримаємо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} K\tau_0 + \gamma_{0,s_0}^+ V_{s_1}\tau_1 = g, \\ \gamma_{1,s_1}^+ V_{s_0}\tau_0 + \frac{1}{2}\tau_1 + N\tau_1 = f. \end{cases}$$

5. У випадку $\gamma_1^+ u = \gamma_1^- u$ розв'язок змішаної задачі задається наступним чином:

$$u(x) = W\mu(x),$$

де $\mu \in H^{1/2}(\Sigma)$, а вихідна диференціальна задача зведеться до системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_0 + M\mu_0 + \gamma_{0,s_0}^+ W_{s_1}\mu_1 = g, \\ \gamma_{1,s_1}^+ W_{s_0}\mu_0 + H\mu_1 = f, \end{cases}$$

з умовою $\mu_0 = \mu_1$ на Γ .

Розглянуті випадки охоплюють практично всі основні типи інтегрального подання розв'язку внутрішньої змішаної задачі для рівняння Лапласа. Аналогічно до наведених систем граничних рівнянь зводиться зовнішня задача із змішаними граничними умовами. Стосовно відповідного інтегрального подання всі отримані системи граничних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь є еквівалентними вихідній диференціальній задачі та мають єдиний розв'язок у відповідних функціональних просторах.

УДК 519.816

О.В. Сосницький

(Бердянський державний педагогічний університет)

**ПРОБЛЕМА НЕКОНСТРУКТИВНОСТІ КЛАСИЧНИХ
ВИЗНАЧЕНЬ ЕКСТРЕМУМІВ ТА УНІВЕРСАЛЬНИЙ МЕХАНІЗМ
ГЛОБАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ**

У статті обговорюється проблема неконструктивності класичних визначень екстремумів критеріїв оптимізації, що вказують ознаки, але не механізми їх виникнення й досягнення [1]. У результаті виявляється неможливим контролювати ступінь оптимізації розв'язків багатьох реальних розмірних і складних задач. У статті представляється механізм глобальної оптимізації, узагальнений з багаторічного з 1975 рр. технологічного досвіду розміщення комутаційних схем реальних електронних вузлів. Він дозволив уперше у свій час експериментально на великих обсягах даних виявити загальні механізми виникнення й подолання багатоекстремальності як наслідок неоднорідності об'єкта оптимізації, контрольованої по кривих розподілу компонентів об'єкта за значенням критерію оптимізації, актуальність яких збільшується з ростом розмірності й складності об'єктів. Уперше виявлені поняття макро- і мікропорядку оптимізації об'єкта й обґрунтовано конструктивне уявлення процесу оптимізації ієрархічною оптимізацією зв'язних груп від рівня об'єкта до рівня компонентів, на яких визначений критерій. Оскільки всі явища мають вихідну структурну екстремальну формалізацію, дані уявлення й механізми властиві широкому колу реальних задач і дозволяють регулярно досягати субглобальні стани об'єктів оптимізації.

Розміщення компонентів є типовою оптимізаційною задачею конструювання вузлів, яке виконується після компонування комутаційної схеми (КС) перед трасуванням електричних з'єднань [2]. У найпростішому випадку одногабаритних компонентів з боковими роз'ємами й двомірним ортогональним розташуванням посадочних місць із заданими ланцюгами на компонентах і роз'ємах вона формалізується як пошук розміщення компонентів у посадочні місця з мінімальною сумарною довжиною найкоротших сполучних дерев (Прима) ланцюгів.

Аналітичними методами така задача нерозв'язна, точні методи відсутні внаслідок непереборності для реальних розмірностей від декількох десятків компонентів і тому реально застосовуються пошукові методи з великими обмеженнями як по числу компонентів, що переставляються, так і по ступеню оптимізації розміщення.

Принциповим авторським рішенням було застосування методів (потенціалів, перебору ЛЕ) ітераційного перерозміщення на гіперграфовій

моделі КС за допомогою групових циклічних перестановок значного числа компонентів (r_{max}) з досягненням ЛЕ й субглобальних розміщень у реальних технологічних процесах друкованих вузлів багатьох провідних організацій (табл. 1), що дозволило кардинально стабілізувати процес проектування вузлів і комплексно підвищити їхню якість, що актуально дотепер [3].

Таблиця 1. Параметри тестових електронних вузлів

Параметри моделі вузла	Тестові електронні вузли організації-розроблювачів або САПР						
	Вузол 1 (ИНЕУМ)	Вузол 2 (ИНЕУМ)	Вузол 3 (МНДПС)	Вузол 4 (ЕСАП)	Вузол 5 (АВТОГРАФ)	Вузол 6 (НИЦЕВТ)	Вузол 7 (КПП)
Число місць	30	30	81	72	42	60	20
Число Компонентів	25	26	71	72	40	60	20
Розмір ґрат місць	6 x 5	6 x 5	9 x 9	8 x 9	7 x 6	5 x 12	4 x 5
Число ланцюгів	58	49	157	114	102	106	39
Складність схеми (довжина списку ланцюгів)	160	117	454	286	273	248	127
Гнучкість схеми (середня складність ланцюгів)	2,76	2,39	2,89	2,51	2,68	4,04	3,26
Густота схеми	7,52	7,27	5,31	3,72	5,15	6,97	4,50

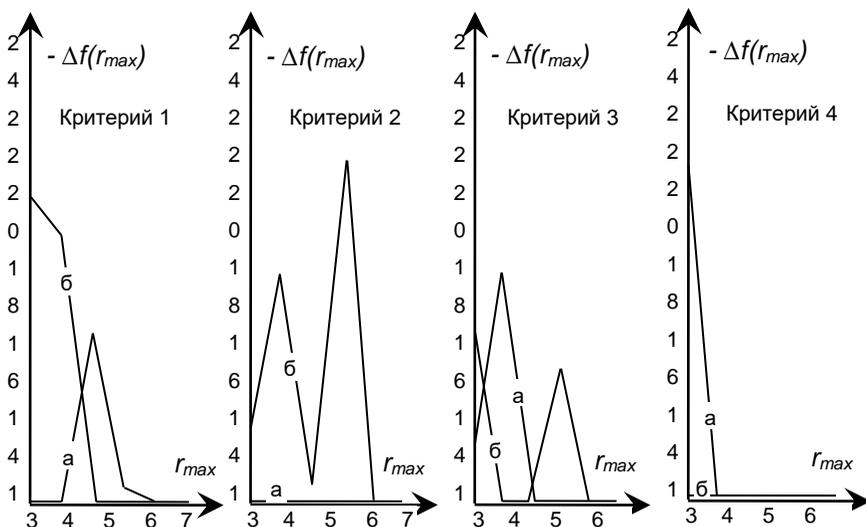


Рис. 1. Додаткове для кожного r_{max} зменшення значення критерію після 1-го ЛЕ для вузлів 1 (а) і 2 (б) для різних критеріїв 1-4.

Експерименти виконувалися для різних критеріїв оптимізації:

1. Мінімізація сумарної довжини дерев (СДД) Прима ланцюгів.

2. Мінімізація СДД ланцюгів з виділеним центральним з'єднанням.
3. Мінімізація СДД радіальних мереж на компонентах ланцюгів.
4. Мінімізація сумарної площі прямокутників ланцюгів.

Таблиця 2. Значення критеріїв у ЛЕ й мікропорядках розташування схеми

Критерій оптимізації	Вузол 1			Вузол 2		
	ЛЕ	Мікропорядок	% зменшення	ЛЕ	Мікропорядок	% зменшення
1	343	333	3	382	351	8,1
2	344	344	0	390	355	9
3	335	320	4,5	377	359	4,8
4	376	359	4,5	376	376	0

Вони показали (рис. 1, табл. 2), що збільшення кількості компонентів, що переставляються, дає додаткове зменшення значення критерію в середньому до 5% для всіх критеріїв у порівнянні з парними перестановками (ЛЕ) і зникає при подальшій збільшенні цього числа (близько 7), що свідчить про існування особливого стану оптимізації, званому мікропорядком.

Для забезпечення подальшого руху зв'язних груп компонентів застосовувалися різні способи, найпростішим з яких є випадковий контрольований збурювання (струси) розташування компонентів з наступною оптимізацією до досягнення раціонального кінцевого розміщення, після якого припиняється процес збіжності (табл. 3).

Таблиця 3. Перебір ЛЕ для вузла 1 за критерієм 1. Мікропорядок контролюється по числу коротких (1-2) з'єднань, макропорядок – крайніх (4-5) з'єднань, медіанна частина розподілу (3) приблизно зберігається.

Розташування схеми		Значення критерію	Розподіл з'єднань за значенням критерію						
			1	2	3	4	5	6	7
Випадкове		581	23	33	15	23	17	12	4
Мікропорядок		333	64	41	8	11	2	1	
Перебір квазі-мікропорядків розташування схеми	1	392	53	32	17	17	7	1	
	2	379	59	28	20	12	6	2	
	3	370	63	23	20	11	8	2	
	4	334	72	25	12	12	4	2	
	5	330	71	31	5	15	4	1	
	6	335	72	30	10	11	3	1	
Квазімакропорядок		7	315	73	31	12	9	2	

Цей ефект пояснений множинними дослідженнями й промальовуваннями розташування ланцюгів, виконаних автором і технологічно підтверджених в ОКБ Львівської політехніки [4], утворюванням сильно оптимізованих коротких взаємних з'єднань компонентів (що завжди беруть

участь у багатьох ланцюгах, кожен з яких оптимізує свій зв'язок у конкуренції за близькі місця до компонентів, що зв'язуються) на зразок кристалічної структури. Виникнення такої структури виключає довгі з'єднання з оптимізації, блокує подальший оптимізуючий рух компонентів і утворює ЛЕ, який вже неможливо подолати перерозміщенням обмежених груп компонентів. Для досягнення субглобального стану потрібно забезпечити раціональні мікро- та макропорядки відношень, що оптимізуються, які контролюються по кривій розподілу оптимізуємих компонентів (з'єднань) (табл. 4).

Таблиця 4. Порівняння даного методу з іншими відомими методами на прикладі вузла 7 за критерієм 1.

№	Метод розміщення	Значення критерію	Розподіл з'єднань за значенням критерію					
			1	2	3	4	5	6
1	Псевдовипадковий	215	6	16	12	5	2	
2	Ручний	138	29	5	6	1		
3	Пружне моделювання	146	21	15	3	2		
4	Послідовний	173	13	17	9		1	1
5	Ітераційний парними перестановками на графовій моделі КС	150	22	10	4	4	1	
6	Метод потенціалів з перебором ЛЕ	125	30	11				

У такий спосіб за допомогою кривої розподілу оптимізуємих компонентів вдається візуалізувати невидимі стани мікро- і макропорядків змінних відношень, які конструктивно розвивають поняття ЛЕ й ГЕ, відповідно, і вперше дозволяють розв'язати проблему контрольованого досягнення субглобальних розв'язків багатьох реальних складних задач оптимізації імовірно для різних критеріїв та класів об'єктів.

1. Жигляевский А.А., Жилинкас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. — М. : Наука, Физматлит, 1991.
2. Сосницький А.В. Об одном подходе к размещению цифровых схем на печатных платах / УСиМ. — 1977. - №5. - С. 123-130.
3. Сосницький А.В. Разработка и исследование алгоритмических методов размещения коммутационной схемы электронных узлов с регулярной структурой монтажного пространства: Дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук. — М.: 1982. — 227 с. - / Моск. инст. электр. машиностр./.
4. Сосницький А.В., Грибок И.Г. О реализации алгоритма размещения компонентов схем методом топологических потенциалов / Контрольно-измерительная техника. — 1978. - вып. 24.. - С. 29-32.

УДК 517.958:519.6

Н. В. Сподар, Я. Г. Савула

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АСПЕКТИ РІЗНОМАСШТАБНОГО МЕТОДУ
СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Вступ. Метод скінченних елементів (МСЕ) є ефективним для розв'язування задач адвекції-дифузії в однорідному середовищі [3]. Проте у випадку великих чисел Пекле та неоднорідного середовища застосування МСЕ наштовхується на значні труднощі з огляду на нестійкість обчислювального процесу. Вирішити цю проблему дозволяє різномасштабний метод скінченних елементів (PMSE) [1, 2]. У роботі [4] показано, що у цьому випадку PMSE дає хороші результати, тоді як розв'язок класичним методом скінченних елементів містить неприродні осциляції. Оскільки для знаходження різномасштабних базисних функцій використовують класичний метод скінченних елементів, то цікаво дослідити точність знаходження цих функцій у порівнянні з аналітичним розв'язком.

Знаходження різномасштабних базисних функцій. У випадку моделювання стаціонарної адвекції-дифузії крайова задача для знаходження різномасштабних базисних функцій на одному скінченному елементі має такий вигляд [4]:

$$-(k(x)\varphi_i'(x))' + Pe k(x)\varphi_i'(x) = 0, x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (1)$$

$$\varphi_i(x_{i-1}) = 0, \varphi_i(x_i) = 1, \quad (2)$$

$$\varphi_i(x_{i-1}) = 1, \varphi_i(x_i) = 0, \quad (2')$$

де $k(x)$ – функція, яка характеризує неоднорідності [2], $\varphi_i(x)$ – шукана базисна функція PMSE, Pe – число Пекле, $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$ – скінченні елементи. Крайові умови (2) і (2') мають місце для непарних та парних значень параметра i відповідно.

Після застосування класичного МСЕ з використанням кусково-лінійних базисних функцій до розв'язування задачі (1)-(2) знайдемо різномасштабні базисні функції. Для того, щоб дослідити точність знаходження цих функцій, знайдемо аналітичний розв'язок задачі (1)-(2). Для цього будемо вважати, що коефіцієнт $k(x)$ має вигляд

$$k(x) = \frac{1}{4 + p \sin(2\pi x / \varepsilon)},$$

де $p = \text{const}$ – відомий параметр, який контролює величину осциляції.

Обчислювальний експеримент. Розглянемо різномасштабні базисні функції, знайдені за допомогою класичного методу скінченних елементів та аналітично. Для експериментів виберемо такі значення параметрів: $p = 1.8$, $\varepsilon = 0.005$, $Pe = 1000$ та відрізок $[a, b] = [0, 1]$. Вважатимемо, що відрізок $[a, b]$ поділений на 16 скінченних елементів, і для аналізу та порівняння результатів різномасштабну базисну функцію шукатимемо на першому скінченному елементі, тобто на відрізку $[0, 0.0625]$. Нехай m - кількість скінченних елементів дрібної сітки на цьому відрізку.

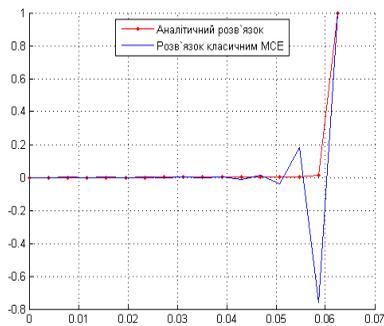


Рис. 1. Графічна ілюстрація аналітичного розв'язку та розв'язку класичним МСЕ при $m = 16$

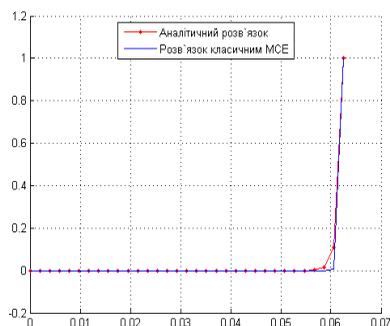


Рис. 2. Графічна ілюстрація аналітичного розв'язку та розв'язку класичним МСЕ при $m = 32$

Висновки. З рисунків 1-2 бачимо, що при згущенні дрібної сітки розв'язок МСЕ збігається до аналітичного розв'язку, тобто різномасштабні базисні функції обчислюються методом скінченних елементів досить точно.

1. *Efendiev Y. Multiscale finite element methods. Theory and application / Y. Efendiev, T. Hou. – NY : Springer, 2009. – P. 234. – (Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences; vol. 4).*
2. *Hou T.Y. Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients / T.Y. Hou, X.-H.Wu, Z. Cai // Mathematics of Computation. - 1999. - Vol. 68. - № 227. - P. 913-943.*
3. *Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. - Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.*
4. *Сподар Н. Застосування різномасштабного методу скінченних елементів до розв'язування одновимірної задачі адвекції-дифузії / Н. Сподар, Я. Савула // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – Вип. 19. – С. 190-197.*

УДК 519.816

Н. К. Тимофієва(Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем
НАН та МОН України)**СКІНЧЕННІ ТА НЕСКІНЧЕННІ КОМБІНАТОРНІ МНОЖИНИ ЯК
АРГУМЕНТ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ**

Вступ. Розглядаються скінченні та нескінченні комбінаторні множини (сполучення та розміщення з повтореннями та без повторень), а також розбиття n -елементної множини на підмножини, які в задачі кластеризації є скінченними, а в задачі класифікації – нескінченними. В задачах покриття ця комбінаторна конфігурація може бути як з повтореннями так і без повторень. В літературі ці властивості комбінаторних конфігурацій ґрунтовно не досліджувалися. Також і як аргумент цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації вони достатньою мірою не вивчалися.

Основна частина. Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ [1]. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k = (w_1^k, \dots, w_\eta^k)$, де $\eta \in \{1, \dots, n\}$ – кількість елементів у w^k (в подальшому η позначатимемо і як η^k), $W = \{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1, \dots, q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W , q – кількість w^k у W .

Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний [1].

Дві нетотожні комбінаторні конфігурації $w^k = (w_1^k, \dots, w_{\eta^k}^k)$ та $w^i = (w_1^i, \dots, w_{\eta^i}^i)$ назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$.

Підмножину $W_{\eta^k} \subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Аргументом цільової функції в задачах штучного інтелекту, як правило, виступають вибірки різних типів. Їхня множина (сполучення та розміщення з повтореннями та без повторень) упорядковуються підмножинами ізоморфних вибірок. Для фіксованого n на підмножині ізоморфних вибірок різних типів – множина $W_{\eta^k} \subset W$ скінченна. На усій множині W

для сполучення та розміщення без повторень вона також скінченна, а для сполучення та розміщення з повтореннями W – нескінченна. Для довільного n множина різних типів вибірок – нескінченна. Оскільки ці множини утворюються та впорядковуються за одними і тими ж правилами, то вони – самоподібні. Такі властивості характерні для фракталів. Тому комбінаторні множини мають фрактальну структуру.

Розглянемо розбиття n -елементної базової множини, яке є аргументом цільової функції в задачах розбиття (кластеризації, класифікації, задачі покриття об'єктами заданої поверхні тощо). В залежності від поставленої задачі множина цієї комбінаторної конфігурації може бути як скінченною так і нескінченною. В кластеризації та класифікації виділимо такі підзадачі:

а) задано скінченну базову множину A . Кількість кластерів може бути як задано так і не задано. Необхідно розподілити елементи базової множини по кластерах так, щоб останні не перетиналися. Ця задача зводиться до задачі кластеризації;

б) задано скінченну базову множину A . Кластери можуть бути як задано так і не задано. Елементи множини A розподіляються так, що один елемент може належати різним кластерам. В даному разі аргументом цільової функції є розбиття n -елементної множини A на η підмножин з повтореннями;

в) задано нескінченну базову множину, частина елементів якої відома, а частина визначається в процесі розв'язання задачі, тобто інформація поступає в процесі розв'язання задачі та змінюється в часі. Аргументом цільової функції в ній є часткове розбиття нескінченної множини A на η підмножин з повтореннями. В цьому разі вводиться часткова цільова функція і часткове розбиття.

Розглянемо задачу кластеризації. Назвемо множину підмножин $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_\eta)$ такою, що $\rho_p \cap \rho_s = \emptyset$, $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_\eta = A$, $p \neq l$, $\rho_p \neq \emptyset$, $p, s \in \{1, \dots, \eta\}$. Непуста підмножина $\rho_p = \{a_1, \dots, a_{\xi_p}\}$, $a_s \in A$, $s \in \{1, \dots, n\}$, може мати від 1 до n елементів ($\xi_p \in \{1, \dots, n\}$). Кількість підмножин ρ_p у розбитті ρ може бути від 1 до n ($\eta \in \{1, \dots, n\}$). Їхню множину позначимо Θ .

Два розбиття ρ^k та ρ^i назвемо ізоморфними, якщо кількість їхніх підмножин однакова, і для будь-якої підмножини $\rho_p^k \subset \rho^k$ можна знайти у множині ρ^i підмножину ρ_s^i , яка не відрізняється від ρ_p^k кількістю елементів, а відрізняється самими елементами.

Підмножину $\Theta_\eta \subset \Theta$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Оскільки для перших двох задач розбиття ρ^k утворюється із елементів скінченної множини, що характерно для задачі кластеризації, розглянемо аргумент цільової функції для третьої задачі, яка є задачею класифікації. Уведемо базову нескінченну множину \tilde{A} , в якій елементи \tilde{a}_l для $l = \overline{1, n}$ задано, а для $l > n$ визначаються в процесі розв'язання задачі. З відомих елементів $\tilde{a}_r \in \tilde{A}$, $r = \overline{1, q''}$, утворюємо часткове розбиття множини \tilde{A} на η підмножин (блоків) $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_\eta)$, $q'' > n$ – кількість відомих елементів. Тоді множина підмножин $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_\eta)$ має такі характеристики: $\tilde{\rho}_1 \cup \dots \cup \tilde{\rho}_\eta = \tilde{A}$, $\tilde{\rho}_p \cap \tilde{\rho}_s = \emptyset$ або $\tilde{\rho}_p \cap \tilde{\rho}_s \neq \emptyset$, $p \neq s$, $\tilde{\rho}_p \neq \emptyset$, $p, s \in \{1, \dots, \eta\}$. Непуста підмножина $\tilde{\rho}_p = \{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{\xi_p}\}$ може мати від 1 до q^* елементів ($\xi_p \in \{1, \dots, q^*\}$), $\eta \in \{1, \dots, q''\}$, $q^* > q''$, $\tilde{a}_r = \tilde{a}_l$ або $\tilde{a}_r \neq \tilde{a}_l$, $\tilde{a}_r, \tilde{a}_l \in \rho_p$, $r, l \in \{1, \dots, \xi_p\}$. Їхню множину позначимо $\tilde{\Theta}$.

Як правило, при моделюванні задачі класифікації аргументом цільової функції вважають вхідні дані. Але в цій задачі оцінка результату проводиться за частковими цільовими функціями, аргументом якої є часткове розбиття нескінченної множини на підмножини з повтореннями.

В класифікації характеристика кластерів відома, об'єкти, які необхідно визначити, до якого вони класу відносяться, аналізуються не одночасно, а групами чи окремими елементами. Оскільки результат виначається не одночасно, а за частковою цільовою функцією, то задача класифікації відноситься до динамічних задач комбінаторної оптимізації.

До задач розбиття відноситься і задача покриття об'єктами заданої поверхні [2]. Змоделювавши її в рамках теорії комбінаторної оптимізації можна побачити, що аргументом цільової функції в ній є розбиття n -елементної множини на підмножини як з повтореннями так і без повторень.

Нехай задано поверхню з нанесеною на ній координатною сіткою. Послідовність комірок цієї сітки задамо упорядкованою множиною A . Елементи, які відповідають коміркам сітки, розміщені в A послідовно, починаючи з верхнього рядка сітки і до останнього, нижнього рядка. В цій задачі необхідно вибраними геометричними об'єктами оптимально покрити задану поверхню. Виділимо в ній такі підзадачі:

- а) поверхня покривається об'єктами так, щоб останні не перетиналися.
- б) поверхня покривається об'єктами так, щоб останні повністю її покривали. В цьому разі один і той же елемент із A може належати різним класам.

Для обох задач розбиття $\rho \in \Theta$ утворюється із елементів скінченної множини A . В першій задачі утворені кластери не перетинаються, тобто

$\rho_p \cap \rho_l = \emptyset$. При цьому $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_n = A$ у разі розв'язної задачі або $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_n = A^*$, де $A^* \subset A$ – підмножина розподілених по кластерах елементів. Позначимо $A^{**} = A \setminus A^*$ – підмножину не розподілених між кластерами елементів із A . Задача полягає в знаходженні такого розбиття $\rho^* \in \Theta$, для якого змодельована цільова функція набуває оптимального розв'язку за умови, що $\overline{A^{**}} \rightarrow 0$ при виконанні заданих обмежень.

У другій задачі утворені кластери перетинаються, тобто $\rho_p \cap \rho_l \neq \emptyset$. Необхідно мінімізувати площу вибраних об'єктів покриття так, щоб вони повністю покрили задану поверхню, а кількість однакових в одному кластері елементів, об'єднаних у множину $A^{***} \subset A$, була б мінімальною. Ця задача полягає в знаходженні такого розбиття $\rho^* \in \Theta$, для якого змодельована цільова функція набуває оптимального розв'язку за умови, що $\overline{A^{***}} \rightarrow 0$ при виконанні певних обмежень. В цих задачах проводиться мінімізація елементів із множини A , які не розподілені між кластерами або мінімізація однакових елементів, які розподілені між різними кластерами.

Висновок. Отже, множини комбінаторних конфігурацій (аргумент цільової функції) можуть бути як скінченними так і нескінченними. В залежності від умови задачі комбінаторної оптимізації комбінаторна конфігурація може бути як з повтореннями так і без повторень. Оскільки ці множини – самоподібні, то вони характеризуються фрактальною структурою.

1. *Тимофієва Н.К.* Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ. – 2007. – 32 с.
2. *Кomyak V.V.*, Obtaining the Local Extremum in the Problem of Covering the Fields by the Circles of Variable Radius / V.V. Komyak, V. M. Komyak, A.V. Pankratov, A.Yu. Prikodko // USiM. – 2016.– №2. – P. 22–27.

УДК 004.9

Д. Ю. Унтілов, С. В. Антоненко

(Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара)

ОГЛЯД ТЕХНОЛОГІЇ ВІРТУАЛЬНОЇ РЕАЛЬНОСТІ

Віртуальна реальність – створений за допомогою технічних засобів, «новий» світ, що передається людині, у реальному часі, через її відчуття (зір, слух, дотик та ін.).

Відмінність між технологією віртуальної реальності та звичайним комп'ютером полягає в тому, що технічні засоби віртуальної реальності впливають на всі п'ять відчуттів людини.

До технічних засобів віртуальної реальності належать:

1. Шоломи (окуляри) віртуальної реальності (HMD, head-mounted display). Вони мають один або декілька вбудованих дисплеїв, на які виводяться зображення для кожного ока, лінзи для корегування зображення та систему для відстежування орієнтації у просторі (гіроскоп/акселерометр).

2. MotionParallax3D дисплеї – створюють ефект віртуальної реальності за рахунок виведення зображення на декілька дисплеїв (декілька мобільних телефонів або навіть ціла кімната з десятком дисплеїв).

3. Віртуальні ретинальні монітори – формують зображення безпосередньо на сітківці ока.

4. Звукові багатоканальні системи (орієнтація у просторі по звуку).

5. Засоби імітації тактильних відчуттів.

6. Засоби керування (костюми/рукавички віртуальної реальності), а також засоби для взаємодії з інтерфейсами, близькими до реальних (рулі та педалі автомобіля, руків'я зброї та ін.).

7. Засоби підключення напряму до нервової системи, що передають сигнали безпосередньо нервовим закінченням або навіть до головного мозку людини.

На даний момент стрімкої популярності набувають шоломи віртуальної реальності (Oculus Rift, HTC Vive, Samsung Gear VR, Google Cardboard та ін.), в зв'язку зі своєю доступністю відносно інших технологічних засобів. Вони знаходять широке застосування у різних областях, таких як: навчання (імітація керування літаком чи автомобілем), в тому числі, підготовка армії, перегляд відео з кутом огляду в 360 градусів, спортивні трансляції, соціальні сервіси, комп'ютерні ігри, проектування та програмне забезпечення для архітектурної візуалізації, продаж автомобілів (зокрема Audi) та ін.

Враховуючи вищевикладене, дана тема є досить актуальною. В подальшому планується розробка програмного додатку для архітектурної візуалізації з підтримкою віртуальної реальності, цей додаток надаватиме можливість користувачам в режимі реального часу переглядати архітектурні моделі, наприклад модель будинку, який замовляє клієнт у будівельної компанії.

Опис процесу роботи (англ. workflow) з програмним додатком приведено нижче:

- створення/відкриття файлу моделі в форматі, який підтримує Unity3D (Unity3D підтримує формати *.fbx, *.obj, *.dae, *.3ds, *.dxf).
- розміщення моделі в ігровому просторі;
- запуск додатку для безпосереднього огляду моделі (переміщення по моделі, як у комп'ютерних іграх, від першої особи).

Для реалізації даного проекту обрано наступні технології:

- ігровий движок Unity3D;
- SteamVR plugin, для розробки додатків віртуальної реальності за допомогою Unity3D та бібліотека OpenVR SDK;
- мова програмування C# та .NET Framework;
- шолом віртуальної реальності HTC Vive (рис. 1).



Рис. 1 - Шолом віртуальної реальності та контролери HTC Vive

HTC Vive має два вбудованих OLED-дисплеї з роздільною здатністю 2160x1200 пікселів, звуковий вихід для навушників, 2 контролери для взаємодії з інтерфейсом користувача, має 2 сенсорні датчики для відстеження положення шолома у просторі (повороти, переміщення та ін.).

УДК 539.

Л.А. Фильштинський, Т.С. Сушко, Ю.О. Шевченко, Г.А. Єременко

(Сумський державний університет)

АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ МАГНЕТОЕЛЕКТРОПРУЖНОГО ТІЛА ОСЛАБЛЕНОГО ТРІЩИНАМИ

У декартових координатах $Ox_1x_2x_3$ розглянемо магнетоелектропружній (МЕП) простір ослаблене тунельними, уздовж осі x_3 , тріщинами, поперечні перерізи яких площиною $x_3 = 0$ - ляпуновські дуги $\Gamma_n (n = \overline{1, m})$, $\cap \Gamma_n = \emptyset$.

Комплексні подання польових величин мають вигляд

$$\begin{pmatrix} \sigma_{31} - i\sigma_{23} \\ D_1 - iD_2 \\ B_1 - iB_2 \end{pmatrix} = 2F(z), \quad (1)$$

σ_{k3} , D_k , B_k , ($k = 1, 2$) - відповідно зсувні механічні напруження, електрична та магнітна індукція. $F(z) = f'(z)$ - функція аналітична в площині поперечного перерізу тіла.

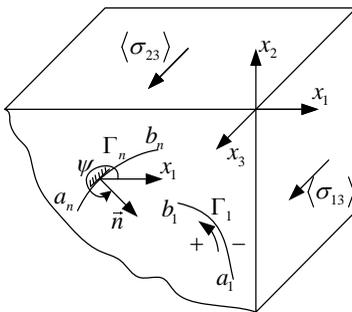


Рис. 1 До постанови антипласкої задачі магнітоелектропружності для тіла з тріщинами

Нехай на нескінченності мають місце рівномірні поля зсувних напружень $\langle \sigma_{31} \rangle, \langle \sigma_{32} \rangle$, електричної та магнітної індукції $\langle D_1 \rangle, \langle D_2 \rangle$ і

$\langle B_1 \rangle$, $\langle B_2 \rangle$, а на поверхнях тріщини вільні від сил. Електричні та магнітні умови на берегах тріщин візьмемо у вигляді.

$$D_n = (D_1 \cos \psi + D_2 \sin \psi)_\Gamma = 0, \quad B_n = (B_1 \cos \psi + B_2 \sin \psi)_\Gamma = 0, \quad (2)$$

де ψ - кут додатної нормалі до лівого берега Γ_n (при русі від початку - точки a_n до кінця - b_n) з променем Ox_1 .

Враховуючи комплексні подання (1) зведемо крайові умови (2) до граничної задачі теорії функції

$$2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi} F^\pm(z) \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для розв'язку задачі (3) введемо аналітичний вектор-стовпчик $F(z)$ у вигляді інтегралу типу Коші:

$$F(z) = A + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\omega(\xi)}{\xi - z} ds, \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \omega(\xi) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

$$\xi \in \Gamma = \cup \Gamma_n, \quad \omega_k(\xi) = \left(\omega_k^{(n)}(\xi), \xi \in \Gamma_n \right), \quad (k = 1, 2, 3).$$

де ds - елемент дуги контура Γ , константи A_k повинні забезпечити виконання умов на нескінченності, стовпець $\omega(\xi)$ визначається з граничних умов (3).

Підставляючи граничні функції $F(z)$ в крайові умови (2) приходимо до сингулярного інтегрального рівняння першого роду з ядром Коші.

$$\frac{1}{\pi} \int_\Gamma q(\xi) \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\xi - \xi_0} ds = N(\xi_0), \quad \xi \in \Gamma = \bigcup_{n=1}^m \Gamma_n \quad (5)$$

$$N(\xi_0) = \gamma_1 \cos \psi_0 + \gamma_2 \sin \psi_0, \quad q(\xi) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} \langle \sigma_{31} \rangle \\ \langle D_1 \rangle \\ \langle B_1 \rangle \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} \langle \sigma_{32} \rangle \\ \langle D_2 \rangle \\ \langle B_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Рівняння (5) необхідно розглядати разом з додатковими умовами, що забезпечують умови однозначності, переміщення та потенціалів електричного і магнітного полів.

$$\int_{\Gamma_n} q(\xi) ds = 0, \quad q(\xi) = \begin{pmatrix} q_1(\xi) \\ q_2(\xi) \\ q_3(\xi) \end{pmatrix}, \quad (n = \overline{1, m}). \quad (6)$$

Характеристики руйнування.

Використовуючи асимптотику інтегралу типу Коші на кінцях лінії інтегрування знаходимо головну асимптотику польових величин у вершинах тріщин

$$\begin{pmatrix} \sigma_{31} - i\sigma_{23} \\ D_1 - iD_2 \\ B_1 - iB_2 \end{pmatrix} = \frac{Q(\pm 1)}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} e^{-i\left(\psi_c \pm \frac{\theta_c}{2}\right)} \quad (7)$$

де верхній знак відповідає вершині $c = b$, нижній – вершині $c = a$, Q – вектор – стовбець відомих величин.

Коефіцієнти інтенсивності, механічних, електричних і магнітних величини виражаються формулами:

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_{3n}(r)), \quad K_D = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} D_n(r)), \quad (8)$$

$$K_B = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} B_n(r)),$$

$$\sigma_{3n}(r) = \sigma_{31} \cos \psi_c + \sigma_{32} \sin \psi_c, \quad D_n(r) = D_1 \cos \psi_c + D_2 \sin \psi_c,$$

$$B_n(r) = B_1 \cos \psi_c + B_2 \sin \psi_c,$$

де ψ_c - кут між додатною нормаллю до Γ_n у вершині c та віссю Ox_1 , r - мала відстань від точки (центра нескінченно малого елемента) на продовженні дотичної до вершини c .

Враховуючи (8), знаходимо коефіцієнти інтенсивності польових величин:

$$\begin{pmatrix} K_{III} \\ K_D \\ K_B \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} Q(\pm 1), \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

У відповідності з (9) маємо:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{31} \\ D_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \frac{Q(\pm 1)}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \cos\left(\psi_c \pm \frac{1}{2}\theta_c\right), \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{32} \\ D_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{Q(\pm 1)}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \sin\left(\psi_c \pm \frac{1}{2}\theta_c\right).$$

З урахуванням асимптотики полів в вершинах тріщин знаходимо потік енергії в вершину.

$$\Delta A_{\Delta} = \frac{\pi}{2} [K_{III}, K_D, K_B] \alpha^{-1} \begin{bmatrix} K_{III} \\ K_D \\ K_B \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де $\alpha = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} & h_{15} \\ e_{15} & -\varepsilon_{11} & -\beta_{11} \\ h_{15} & -\beta_{11} & -\gamma_{11} \end{bmatrix}$, $\det \alpha \neq 0$ - матриця коефіцієнтів

матеріальних рівнянь.

В якості тестового прикладу розглянемо середовище з прямолінійною довільно орієнтованою тріщиною. В цьому випадку сингулярне інтегральне рівняння (5) розв'язується в замкнутому вигляді і коефіцієнти інтенсивності польових величин визначаються формулою.

$$\begin{bmatrix} K_{III} \\ K_D \\ K_B \end{bmatrix} = -\sqrt{\pi l} \left\{ \begin{bmatrix} \langle \sigma_{31}^{\infty} \rangle \\ \langle D_1^{\infty} \rangle \\ \langle B_1^{\infty} \rangle \end{bmatrix} \cos \psi + \begin{bmatrix} \langle \sigma_{32}^{\infty} \rangle \\ \langle D_2^{\infty} \rangle \\ \langle B_2^{\infty} \rangle \end{bmatrix} \sin \psi \right\}, \quad (12)$$

1. Zhou, Z.G., Wang, B., 2004. Two parallel symmetry permeable cracks in functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials under anti-plane shear loading. *Int. J. Solids Struct.* 41, 4407-4422.
2. Zhou, Z.G., Wang, B., 2006 The scattering of the harmonic anti-plane shear stress waves by two collinear interface cracks between two dissimilar functionally graded piezoelectric/piezomagnetic material half-infinite planes dynamic loading. *PI Mech. Eng. C-J. Mech.* 220, 137-148.

УДК 519.6

О.М. Хіміч, О.А. Ніколаєвська, Т.В. Чистякова

(Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України)

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕКОРЕКТНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ НА ГІБРИДНИХ КОМП'ЮТЕРАХ

Математичне моделювання процесів та явищ в різних предметних областях зводиться до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) великих розмірів. На сьогоднішній день ця проблема вирішується використанням гібридних комп'ютерів, які поєднують MIMD- і SIMD-архітектури, тобто реалізуються обчислення на багатоядерних комп'ютерах (CPU) з прискоренням на графічних процесорах (GPU) [1]. Розпаралелення обчислень між процесорами на CPU здійснюється, наприклад, за допомогою системи MPI, а на GPU – за допомогою технології CUDA. Проте величезний розрив між високою продуктивністю графічних процесорів і повільними комунікаційними зв'язками між CPU і GPU, а також принципові архітектурні відмінності цих обчислювальних пристроїв, значно ускладнюють проблеми розробки ефективних гібридних алгоритмів. Тільки за умови правильного використання обчислювальних ресурсів можна створити ефективні гібридні алгоритми розв'язування СЛАР. Під ефективним алгоритмом розв'язування розуміється алгоритм, який дозволяє отримати достовірний розв'язок задачі з мінімальним використанням ресурсів комп'ютера – процесорів, пам'яті, часу.

Комп'ютерна модель задачі має завжди наближений щодо вихідної задачі характер або через похибку вихідних даних, або через похибку отримання (вводу) числових даних про задачу в комп'ютері [2]. Тому властивості лінійної системи, яку доводиться розв'язувати на комп'ютері, можуть відрізнятися від властивостей математичної задачі. Виникає необхідність створення алгоритму розв'язування СЛАР з апіорі невизначеними властивостями та великих розмірів.

Гібридний алгоритм методу найменших квадратів на основі сингулярного (SVD) розвинення матриці. Розглянемо несумісну в загальному випадку СЛАР з точно заданими вихідними даними (математична модель з точно заданими вихідними даними):

$$Ax = b, \quad A \in R^{m \times n}, \quad x \in R^n, \quad b \in R^m \quad (1)$$

та систему рівнянь з наближеними даними (математичну модель з наближено заданими вихідними даними):

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{b}, \quad \Delta A = A - \bar{A}, \quad \Delta b = b - \bar{b}. \quad (2)$$

Будемо вважати, що для похибок елементів матриці та правої частини виконуються наступні співвідношення:

$$\|\Delta A\| \leq \varepsilon_A \|A\|, \quad \|\Delta b\| \leq \varepsilon_b \|b\|.$$

В загальному випадку задача розв'язування СЛАР з матрицею довільного рангу є некоректною, а система в багатьох випадках – несумісною. Для таких СЛАР можна одержати розв'язок методом найменших квадратів (псевдорозв'язок), який для сумісної і коректної задачі співпадає з класичним розв'язком [2]:

$$A = U\Sigma V^T. \quad (3)$$

Сингулярне розвинення (3) реалізується за допомогою послідовності двосторонніх ортогональних перетворень Хаусхолдера та QR -алгоритма з неявним зсувом. Псевдорозв'язок отримується за формулами:

$$x^\# = V(\Sigma^\# c), \quad c = U^T b, \quad (4)$$

де $\Sigma^\#$ – псевдообернена матриця сингулярних чисел.

При обчисленні за допомогою сингулярного розвинення (3) псевдорозв'язку (4) СЛАР з прямокутною матрицею довільного рангу розміру $m \times n$ ($m \geq n$) можна виділити п'ять підзадач:

1) приведення вихідної матриці до верхньої дводіагональної форми

$A^{(n-1)} \equiv \begin{pmatrix} J^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}$, де $J^{(0)}$ – квадратна верхня дводіагональна матриця порядку

n , в якій відмінні від нуля лише елементи $j_{k,k}^{(0)}, j_{k,k+1}^{(0)}$;

2) сингулярне розвинення верхньої дводіагональної матриці $J^{(0)}$, тобто приведення $J^{(0)}$ до діагональної матриці Σ ;

3) формування матриці правих сингулярних векторів V ;

4) формування матриці (вектора) c з (4);

5) обчислення псевдорозв'язку (4).

Для приведення прямокутної матриці $A^{(0)}$ розміру $m_1 \times n_1$ ($m_1 = \max\{m, n\}$, $n_1 = \min\{m, n\}$, $A^{(0)} \equiv A$, якщо $m \geq n$, або $A^{(0)} \equiv A^T$, якщо $m < n$), до верхньої дводіагональної форми можна використати алгоритм Хаусхолдера. При цьому необхідно виконати $n_1 - 1$ двосторонніх елементарних перетворень відображення:

$$A^{(i)} = P^{(i)} A^{(i-1)} Q^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n_1 - 1),$$

де ортогональні матриці $P^{(i)} = I + s_i u_i u_i^T$, $Q^{(i)} = I + t_i v_i v_i^T$, а вектори u_i, v_i та множники s_i, t_i визначаються так, щоб для кожного $i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$ виконувались умови:

$$s_i u_i^T u_i = t_i v_i^T v_i = 2, \quad a_{k,j}^{(i)} = a_{j,k}^{(i)} = 0 \quad (k = i+1, \dots, m_i; \quad j = i+2, \dots, n_i).$$

Для сингулярного розвинення верхньої дводіагональної матриці $J^{(0)}$ використовується паралельний QR -алгоритм з неявним зсувом [4]. Цей алгоритм полягає в побудові послідовності верхніх дводіагональних матриць $J^{(0)}, J^{(1)}, \dots, J^{(N)}, \dots$, які збігаються до діагональної матриці Σ . Перехід від $J^{(k-1)}$ до $J^{(k)}$ виконується за допомогою серії двосторонніх плоских обертань Гівенса:

$$J^{(k)} = S^{(k)T} J^{(k-1)} T^{(k)}, \quad (5)$$

де $S^{(k)} = S_2^{(k)} S_3^{(k)} \dots S_n^{(k)}$, $T^{(k)} = T_2^{(k)} T_3^{(k)} \dots T_n^{(k)}$, а $S_j^{(k)}, T_j^{(k)}$ – елементарні матриці плоских обертань. В результаті отримуємо сингулярне розвинення дводіагональної матриці:

$$J^{(0)} = G \tilde{\Sigma} H^T, \quad \tilde{\Sigma} \equiv J^{(N)}, \quad G = S^{(1)} S^{(2)} \dots S^{(N)}, \quad H = T^{(1)} T^{(2)} \dots T^{(N)}. \quad (6)$$

В даному алгоритмі реалізація обчислень на GPU здійснюється за допомогою технології CUDA. Через те, що на гібридних комп'ютерах дуже повільні зв'язки між CPU та GPU, матриці та вектори в алгоритмі розподілені таким чином, щоб за один раз переслати всі необхідні масиви на глобальну пам'ять GPU, виконати з ними необхідні матрично-векторні операції, розпаралелюючи на GPU, і отримані результати переслати на CPU. Оскільки на GPU обчислення розпаралелюється на дуже велику кількість потоків, це дає можливість ефективно розпаралелити матрично-векторні операції з великою кількістю даних, забезпечуючи при цьому високу швидкість. Крім того, швидкість операцій можна підвищити застосовуючи відповідні функції бібліотеки CUBLAS [4].

При реалізації гібридного паралельного алгоритму Хаусхолдера для зведення прямокутної матриці $A^{(0)}$ розміру $m \times n$ до верхньої дводіагональної форми $A^{(n-1)}$ застосовується стрічково-циклічний розподіл матриці СЛАР між процесами CPU, за яким процесу з логічним номером $k-1$ послідовно розподіляються елементи рядків з номерами $k, k+p, k+2p, \dots$, де $k=1, 2, \dots, p$, p – кількість процесів, що використовується. Розпаралелення на CPU виконується за допомогою MPI-функцій. При такому розташуванні матриці на процесорах простих процесорів (ядер) CPU буде мінімальний, адже обчислення в кожному з них відбуватимуться майже до кінця модифікації матриці A . Отже, такий підхід забезпечить рівномірне завантаження (балансування) процесів. Зрозуміло, що необхідно передбачити виконання обчислень на процесорах таким чином, щоб наявність інформаційних зв'язків (комунікаційних взаємодій) між ними була мінімальною.

Всі діагональні та наддіагональні елементи верхньої дводіагональної матриці $J^{(0)}$ зберігаються в кожному процесі. Також в кожному процесі зберігаються всі обчислені наближені сингулярні числа.

Оскільки окреме (елементарне) плоске обертання, яке використовується при обчисленні матриць сингулярних векторів (6), складається з попарних перетворень лише двох елементів (які належать стовпчикам, що модифікуються) кожного рядка, а параметри плоского обертання обчислюються кожним процесом, то елементи матриці сингулярних векторів, що формується, та матриці c^T з

$$c = G^T b^{(n-1)} \quad \text{або} \quad c = H^T b^{(m-1)} \quad (7)$$

розподіляються за стрічково-циклічною схемою. В цьому випадку потреби в обмінах даними між процесами при формуванні цих матриць немає. Після виконання паралельного QR -алгоритму [3], результати обчислень збираються в одному процесі на CPU.

Експериментальне дослідження гібридного алгоритму. Було проведено дослідження ефективності гібридного алгоритму для розв'язування СЛАР з виродженими матрицями різного порядку та при використанні різної кількості CPU та GPU на суперкомп'ютері Інпарком_g гібридної архітектури [5] (мал. 1).

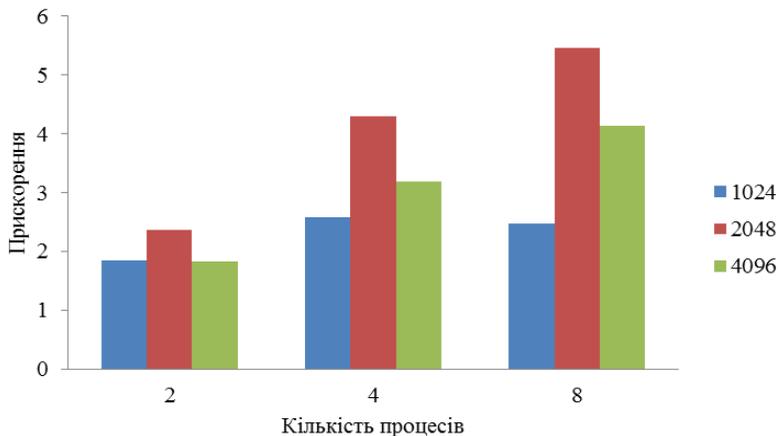


Рис. 1 Залежність прискорення від кількості процесів та порядку матриці розв'язування задачі гібридним алгоритмом SVD на Інпарком_g

На графіку видно, що для великих порядків матриці найкраще прискорення досягається при використанні 8 процесів.

1. Боресков А.В., Харламов А.А. Основы работы с технологией CUDA. – М.: Пресс, 2010. – с. 232.
2. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. – Київ: Наук. думка, 1987. – 288 с.
3. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В. и др. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. – К., Наукова думка, – 2008. – 248 с.
4. CUBLAS: <http://www.nvidia.com.ua/object/tesla-gpu-accelerated-libraries-cublas-ru.html>
5. Молчанов И.М., Мова В.И. Интеллектуальные параллельные компьютеры на графических процессорах для решения научно-технических задач // Праці Міжнародної молодіжної математичної школи «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)». — Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. — С. 121-122.

УДК 519.6

С.М. Шахно, А.-В.І. Баб'як, Г.П. Ярмола

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ НЬЮТОНА-ПОТРА ЗА СЛАБКИХ УМОВ

Нехай маємо нелінійне рівняння

$$H(x) \equiv F(x) + G(x) = 0, \quad (1)$$

де оператори F і G визначені на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями у банаховому просторі Y . Відомо, що F – диференційовний за Гато оператор, G – неперервний оператор, диференційовності якого, в загальному випадку, не вимагається. Задача полягає у апроксимації локально єдиного розв'язку x^* рівняння (1). Оскільки G є недиференційовним оператором, то скористатися класичним методом Ньютона для знаходження розв'язку рівняння (1) не можна. Найчастіше для розв'язування рівняння (1) застосовують метод типу Ньютона, різницеві та комбіновані методи.

У роботі [3] нами запропоновано комбінований ітераційний процес, побудований на основі методів Ньютона і Трауба-Потра [1, 2]. Його ітераційна формула має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - A_n^{-1}H(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

де $A_n = F'(x_n) + G(x_n; x_{n-1}) + G(x_{n-2}; x_n) - G(x_{n-2}; x_{n-1})$. Тут $G(x; y)$ – поділена різниця першого порядку оператора G за точками x та y . У цій же праці проведено дослідження локальної та напівлокальної збіжності методу (2) за класичних умов Ліпшиця для похідної Фреше першого порядку та поділених різниць першого і другого порядків.

В літературі є багато задач, для яких оператор F не є диференційовним за Фреше, проте є диференційовним в іншому сенсі. Тому у цій праці вивчення напівлокальної збіжності методу (2) проводиться за припущення, що оператор F є диференційовним за Гато і F' є кусково напівнеперервним оператором на множині D . Також умови накладаються лише на похідні та поділені різниці першого порядку.

Позначимо через $U(x_0, r)$ відкриту кулю з центром в точці x_0 та радіусом $r > 0$. Наведемо головний результат напівлокальної збіжності методу (2).

Теорема. Нехай $F : D \subseteq X \rightarrow Y$ диференційовний за Гато оператор в кожній точці деякого околу точки $x_0 \in D$ і $G : D \subseteq X \rightarrow Y$ – неперервний

оператор, для якого існують поділені різниці першого порядку $G(\cdot; \cdot)$. Припустимо, що:

1) існують точки $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in D$ і $r > 0$ такі, що $A_0^{-1} \in L(X, Y)$ і $\|A_0^{-1}\| \leq \alpha$;

2) в кулі $U(x_0, r)$ виконуються умови

$$\|F'(x) - F'(x_0)\| \leq \varepsilon_0, \|F'(x) - F'(y)\| \leq \varepsilon_1,$$

$$\|G(x; y) - G(u; v)\| \leq \varepsilon_2;$$

3) оператор $F'(x)$ є кусково напівнеперервним для всіх $x \in U(x_0, r)$;

4) існують константи β, η, γ такі, що

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha(\varepsilon_0 + 3\varepsilon_2)}, \eta = \alpha \|F(x_0) + G(x_0)\|,$$

$$0 < \gamma = \beta(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2) < 1, \frac{\eta}{1 - \gamma} < r;$$

5) $\bar{U}(x_0, r) \subseteq D$.

Тоді послідовність $\{x_n\}$, генерована ітераційним процесом Ньютона-Трауба-Потра (2), є добре визначена, міститься в $U(x_0, r)$ і збігається до єдиного розв'язку $x^* \in \bar{U}(x_0, r)$ рівняння $F(x) + G(x) = 0$. Крім цього, для всіх $n \geq 0$ виконується оцінка

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \eta.$$

Також проведено практичне дослідження ітераційного процесу (2). Метод Ньютона-Трауба-Потра застосовано для розв'язування задач з недиференційовним оператором. Отримані результати вказують на перевагу методу (2) перед базовими методами.

1. *Potra F.A.* On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations / F.A. Potra // Numer. Funct. Anal. Optim. – 1984–1985. – 7, № 1. – Р. 75-106.
2. *Дэннис Дж.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. – Москва: Мир, 1988. – 440 с.
3. *Шахно С.М.* Комбінований метод Ньютона-Потра для розв'язування нелінійних операторних рівнянь / С.М. Шахно, А.-В.І. Баб'як, Г.П. Ярмола // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – № 3. – С. 170-178.

УДК 519.6

С.М. Шахно, Р.П. Якимчук, О.С. Довганик

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ПРО ДЕЯКІ ДВОКРОКОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Нехай задано нелінійну задачу найменших квадратів

$$\min_{x \in R^n} f(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x), \quad (1)$$

де F – диференційований за Фреше оператор, визначений в R^n із значеннями в R^m , $m \geq n$.

У цій праці ми будемо розглядати декілька методів для знаходження розв'язку задачі (1), зокрема метод Гаусса-Ньютона [1], двокроковий метод Гаусса-Ньютона [2], методи з послідовною і паралельною апроксимацією оберненого оператора [3].

Ітераційний процес Гаусса-Ньютона для розв'язування (1) має вигляд

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)^T F'(x_k)]^{-1} F'(x_k)^T F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

де $x_0 \in R^n$ – початкове наближення.

Теорема про збіжність методу (2) сформульована і доведена в [1].

Розглянемо двокроковий метод Гаусса-Ньютона, який має вигляд

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - [F'(z_k)^T F'(z_k)]^{-1} F'(z_k)^T F(x_k), \\ y_{k+1} &= x_{k+1} - [F'(z_k)^T F'(z_k)]^{-1} F'(z_k)^T F(x_{k+1}), \end{aligned} \quad (3)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$, $z_k = (x_k + y_k)/2$; x_0 і y_0 задані.

Умови збіжності та оцінки швидкості збіжності методу (3) за узагальнених умов Ліпшиця встановлені в такій теоремі.

Теорема 1. Нехай оператор $F : R^n \rightarrow R^m$, $m \geq n$, двічі диференційований за Фреше в $D \subset R^n$. Припустимо, що задача (1) має розв'язок $x^* \in D$ і похідна Фреше $F'(x^*)$ має повний стовпцевий ранг, а похідні $F'(x)$ і $F''(x)$ на $B(x^*, r) = \{x \in D : \|x - x^*\| < r\}$ задовольняють умови Ліпшиця з L і N в середньому:

$$\|F'(x) - F'(x^*)\| \leq \int_0^{\rho(x)} L(u) du, \quad \|F''(x) - F''(y)\| \leq \int_0^{\|x-y\|} N(u) du,$$

де $x, y \in B(x^*, r)$, $\rho(x) = \|x - x^*\|$, $L(u)$ і $N(u)$ – додатні неспадні функції. Крім того, радіус $r > 0$ задовольняє

$$0 < \frac{(\beta/8) \int_0^r N(u)(r-u)^2 du + \beta r \int_0^{(3/2)r} L(u) du + \sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^r L(u) du}{1 - \beta \int_0^r L(u) du} \leq r.$$

Тоді для всіх $x_0, y_0 \in B(x^*, r)$ послідовності $\{x_k\}$ і $\{y_k\}$, генеровані методом (3), добре визначені, належать $B(x^*, r)$ для всіх $k \geq 0$ і збігаються до x^* , причому

$$\begin{aligned} \rho(x_{k+1}) &\leq \gamma \rho(x_k)^3 + \eta \rho(x_k) \rho(y_k) + \theta [\rho(x_k) + \rho(y_k)]/2, \\ \rho(y_{k+1}) &\leq \gamma \rho(x_{k+1})^3 + \left(\frac{\eta}{3}\right) (\rho(x_k) + \rho(y_k) + \rho(x_{k+1})) \rho(x_{k+1}) + \\ &\quad + \theta [\rho(x_k) + \rho(y_k)]/2, \\ r_{k+1} &= \max\{\|x_{k+1} - x^*\|, \|y_{k+1} - x^*\|\} \leq q r^k \leq \dots \leq q^{k+1} r_0, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} q &= \frac{\beta \int_0^{\rho(x_0)} N(u) (\rho(x_0) - u)^2 du}{8\rho(x_0) \left(1 - \int_0^{\rho(z_0)} L(u) du\right)} + \frac{3\beta \rho(x_0) \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)/2} L(u) du}{(2\rho(x_0) + \rho(y_0)) \left(1 - \beta \int_0^{\rho(z_0)} L(u) du\right)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{\rho(z_0)} L(u) du}{\rho(z_0) \left(1 - \beta \int_0^{\rho(z_0)} L(u) du\right)} < 1, \\ \gamma &= \frac{\beta \int_0^{\rho(x_0)} N(u) (\rho(x_0) - u)^2 du}{8\rho(x_0)^3 \left(1 - \int_0^{\rho(z_0)} L(u) du\right)}, \quad \theta = \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{\rho(z_0)} L(u) du}{\rho(z_0) \left(1 - \beta \int_0^{\rho(z_0)} L(u) du\right)}, \\ \eta &= \frac{3\beta \rho(x_0) \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)/2} L(u) du}{(2\rho(x_0) + \rho(y_0)) \left(1 - \beta \int_0^{\rho(z_0)} L(u) du\right)}, \\ \alpha &= \|F(x^*)\|, \quad \beta = \left\| \left(F'(x^*)^T F'(x^*) \right)^{-1} F'(x^*)^T \right\|. \end{aligned}$$

Також розглянуто методи, які використовують апроксимацію оберненого оператора.

Метод з послідовною апроксимацією оберненого оператора має вигляд

$$x_{k+1} = x_k - A_k J(x_k)^T F(x_k), \quad (4)$$

$$A_{k+1} = A_k [2E - J(x_{k+1})^T J(x_{k+1}) A_k], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тут F – тотожний оператор (одинична матриця), $J(x) = F'(x)$, x_0, A_0 – початкові наближення до точного розв'язку x^* задачі (1) і до оберненого оператора $A^* = (J(x^*)^T J(x^*))^{-1}$, відповідно. Метод (4) складається з двох гілок, які виконуються по чергово.

Для розв'язування задачі (1) на комп'ютерах з паралельними процесорами, що працюють із спільною пам'яттю, ми розглянемо наступний ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - A_k J(x_k)^T F(x_k), \quad (5)$$

$$A_{k+1} = A_k [2E - J(x_k)^T J(x_k) A_k], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Метод (5), як і метод (4), складається з двох гілок, але тут обидві гілки можуть обчислюватися паралельно одна одній. Крім того, обчислення в кожній гілці можна розпаралелити за допомогою методів лінійної алгебри.

За наявності переваг методу (5), він має також недоліки: швидкість збіжності зменшується до 1,618...<2. Крім того, через різний об'єм обчислень в формулах (5) один із процесорів буде менш завантаженим і

може простоювати. Хоч за рахунок використання паралельних обчислювальних пристроїв досягається скорочення загального часу розв'язування задачі (1), проте обчислювальні ресурси будуть використовуватися неефективно. Для того, щоб уникнути цих недоліків, можна реалізувати обчислювальний процес, який не передбачає синхронізацію обчислення в різних процесорах.

Такий підхід приводить нас до асинхронної версії методу (5):

$$x_{k+1}^{m+1} = x_{k+1}^m - A_k J(x_{k+1}^{m_k-1})^T F(x_{k+1}^m), \quad m = 0, 1, \dots, m_{k-1} - 1, \quad (6)$$

$$A_{k+1} = A_k [2E - J(x_{k+1}^{m_k-1})^T J(x_{k+1}^{m_k-1}) A_k], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

де $x_k^{m_k}$ – останнє наближення до точного розв'язку x^* задачі (1), $x_k^{m_k} = x_k = x_{k+1}^0$; x_0 , A_0 - початкові наближення.

Метод (6) використовує асинхронну апроксимацію оберненого оператора. Перевага методу (6) перед методом (5) в тому, що при реалізації методу (6) на двох паралельних процесорах не буде простою. Крім того, швидкість збіжності процесу (6) більша (2 проти 1,618...).

Наведені методи реалізовано програмно та проведено чисельний експеримент на низці тестових задач.

1. *Chong L.* Convergence and Uniqueness Properties of Gauss-Newton's Method / L.Chong, Z.Wen-Hong, J.Xiao-Qing // Computers and Mathematics with Applications. – 2004. – Vol. 47. – P. 1057-1067.
2. *Iakymchuk R.* On the Convergence Analysis of a Two-Step Modification of the Gauss-Newton Method / R. Iakymchuk, S. Shakhno // Proc. Appl. Math. Mech. – 2014. - Vol. 14. - P. 813-814.
3. *Iakymchuk R.* Methods with Successive and Parallel Approximations of Inverse Operator for the Nonlinear Least Squares Problem / R. Iakymchuk, S. Shakhno // Proc. Appl. Math. Mech. – 2015. – Vol. 15. – P. 569–570.

УДК 004.432.2, 004.424.5

С.А. Ярошко⁽¹⁾, С.М. Ярошко⁽²⁾⁽¹⁾ Львівський національний університет імені Івана Франка,⁽²⁾ Національний університет «Львівська політехніка»

НАЛАШТУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОСТІ БАГАТОПОТОКОВОЇ АПЛІКАЦІЇ НА ЕТАПІ ВИКОНАННЯ

Сучасні технології програмування дають змогу створювати гнучкі застосунки, чії функціональні можливості можна налаштувати не лише на етапах проектування та компілювання, а й під час виконання. Вперше, мабуть, такі можливості з'явилися в системі програмування Smalltalk. Відомо, що у ній всі сутності є об'єктами: екземпляр класу, сам клас і, навіть, компілятор. Тому природньо, що саме клас «звертається» до компілятора з вимогою відтранслювати для нього код методу чи підкласу. Компілятор не перевіряє, чи може об'єкт опрацювати кожне повідомлення, бо це відповідальність самого об'єкта. Відповідне рішення приймається на етапі виконання. Таке влаштування системи відкриває перед програмістом широкі можливості побудови програм «на льоту». Наприклад, якщо деякий об'єкт «не зрозумів» повідомлення *aMessage*, він може виконати такий код, де *Builder* – клас, що вміє створювати рядок з текстом нового методу:

```
self class compile: (Builder buildMethodCode: aMessage).  
^ aMessage sendTo: self.
```

У результаті в класі об'єкта з'явиться новий метод, який він одразу ж і виконає. Докладніше такі можливості описані в [1].

Платформа програмування .Net також підтримує засоби рефлексії – засоби для дослідження та побудови компільованого коду на етапі виконання програм. Вони надають вичерпний перелік інструментів, влаштованих, проте, складніше, ніж у Smalltalk: для кожного завдання використовують окремий клас. Наприклад, для дослідження типу – *TypeInfo*, для взаємодії з одним методом – *MethodInfo* тощо.

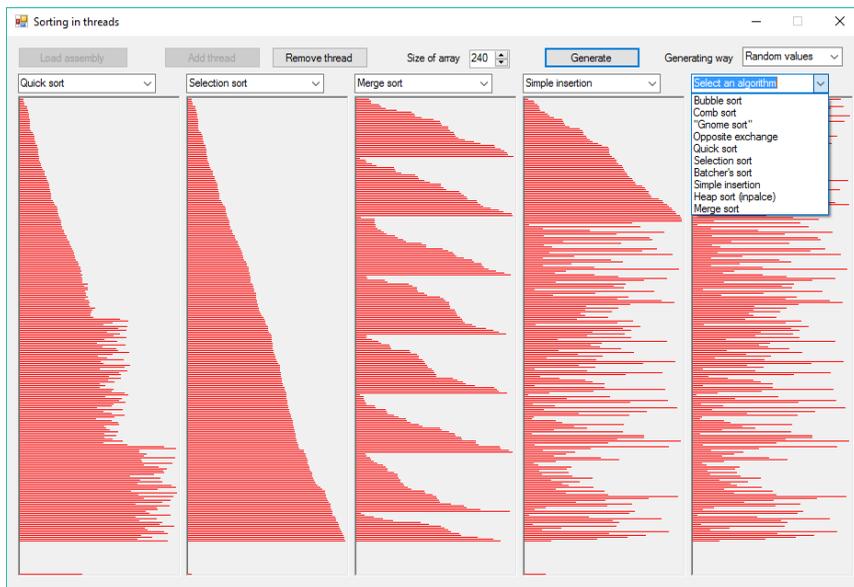
Ми продемонструємо використання рефлексії .Net на прикладі побудови аплікації, що візуалізує процеси виконання різних алгоритмів упорядкування послідовності чисел, які виконуються паралельно в окремих потоках. Алгоритми впорядкування пристосовано для роботи в потоці і реалізовано як методи класу в окремій бібліотеці. Завданнями аплікації є: завантажити таку бібліотеку під час виконання, надати користувачеві можливості вибору потрібних алгоритмів та наочно зобразити їхню роботу.

Аплікація повинна створювати потоки виконання, запускати та зупиняти їх, отримувати від них інформацію про хід впорядкування чи його завершення та опрацювати її. Для цього використано шаблон асинхронної

взаємодії з потоками *BackgroundWorker*. Виявилось зручно написати власний клас для автоматизації його налаштування [2].

Для того, щоб вибрати із завантаженої бібліотеки відповідні методи, було використано власний клас атрибутів коду [3]. Для графічного відображення процесу впорядкування використано нову візуальну компоненту [4]. Оскільки користувач доволно вибирає методи впорядкування, то й відповідні їм візуальні компоненти додаються до інтерфейсу аплікації динамічно [3]. Архітектура аплікації спроектована з дотриманням шаблону MVC.

Приклад використання програми зображено нижче.



1. *Andrew P. Black* Pharo by example / Andrew P. Black, Stéphane Ducasse and other – Square Bracket Associates, Switzerland, 2009. – 336 P.
2. *Iaroshko S.* Covering a BackgroundWorker by an Own Class to Lighten the Creation of a Multithread Application [Електронний ресурс] / S. Iaroshko // CodeProject, 2015. – Режим доступу: <http://www.codeproject.com/Articles/1004012/Covering-a-BackgroundWorker-by-an-Own-Class-to-Lig> – Назва з екрану.
3. *Iaroshko S.* Dynamic Construction of Functionality of an Application by Reflection Tools [Електронний ресурс] / S. Iaroshko // CodeProject, 2016. – Режим доступу: <http://www.codeproject.com/Articles/1112276/Dynamic-Construction-of-Functionality-of-an-Applic> – Назва з екрану.
4. *Ярошко С.* Використання шаблону асинхронної взаємодії потоків для візуалізації вибраних алгоритмів сортування в середовищі .Net / С. Ярошко, О. Ярошко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – 2015. – Вип. 23. – С. 125–137.

eleks[®]

- 25 років на ринку
- 800+ працівників
- Топ-100 найкращих аутсорсингових компаній світу (Global Outsourcing 100)
- 10+ років успішної співпраці з компаніями з рейтингу Fortune 500
- 5 офісів розробки: Львів, Київ, Івано-Франківськ, Тернопіль, Жешів
- 3 представницькі центри: Львів, Лондон, Лас-Вегас

ELEKS – інженерна інноваційна компанія, яка надає послуги з розробки комплексних програмних продуктів для великих гравців світового ринку в галузях фінансів, страхування, роздрібно́ї торгівлі, транспортування, логістики та інших, серед яких компанії з рейтингу Fortune 500. Понад 800 працівників працюють у Львові, Києві, Івано-Франківську, Тернополі та Жешові, де розміщені центри розробки. З 2014 року ELEKS входить до списку топ-100 найкращих аутсорсингових компаній світу (Global Outsourcing 100) за версією міжнародної асоціації аусорсинг-професіоналів (International Association of Outsourcing Professionals). Компанія також відома успішними R&D-експериментами.

З 2014 року ELEKS є співорганізатором найбільш успішної ІТ-події в Україні – конференції Lviv IT Arena, яка щороку під одним дахом збирає понад 100 спікерів з усього світу, а також понад 2,5 тисячі відвідувачів. ELEKS активно долучається до розвитку української ІТ-спільноти та підвищення рівня освіти для майбутніх ІТ-спеціалістів. З 2015 року ELEKS є партнером Бакалаврської програми з комп'ютерних наук УКУ, а також в рамках корпоративного університету ELEKS University постійно створює власні освітні проекти: навчальні програми для девелоперів, DevOps-спеціалістів, QA-інженерів та ін. Провідні експерти та топ-менеджери компанії є викладачами та членами Наглядової ради освітніх програм Львівської Бізнес-школи УКУ.

Більше інформації на сайті компанії: eleks.com.



Science is our passion
Being smart is our nature

ABTO Software is a global technology solutions company specializing in software development and IT consultancy services.

The team of the brightest minds, technical experts, and strategic thinkers allows us to build unrivaled scientific software products.

We apply diverse methods and instruments like Mathematical Modeling, MATLAB, Numerical Analysis, Computational Geometry, etc. to solve the most challenging problems in Data science, Machine learning, Computer vision, Augmented reality and Virtual reality domains.

Our experts accomplished a whole range of complex development projects for R&D, Government, Healthcare, Security, Manufacturing and other industries.

If you share the same values,
come join us:

Ukraine: Lviv, Uzhgorod

USA: San Francisco

www.abtosoftware.com

jobs@abtosoftware.com

Skype: abto.software



Збірник наукових праць

XXII Всеукраїнська наукова конференція

Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики

Матеріали конференції

Матеріали доповідей надруковано в авторській редакції без внесення суттєвих змін редакційною колегією

Технічний редактор та комп'ютерне макетування С.Ярошко

Формат 60×84/16. Ум.друк.арк. 3,8 Тираж 100 прим. Зам. _____

Видавець:

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції: Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.